CORNEL POPA

LOGICĂ ŞI METALOGICĂ
II

Universitatea Spiru Haret

© Editura Fundației România de Mâine, 2002
ISBN 973-582-541-4

Redactor: Octavian CHEȚAN
Tehnoredactor: Vasilichia IONESCU
Florentina STEMATE
Cosma TUDOSE
Coperta: Stan BARON

Bun de tipar: 06.06.2002; Coli de tipar: 27,25
Format: 16/61x86

Editura şi Tipografia Fundației *România de Mâine*
Splaiul Independenței, nr. 313, Bucureşti, sector 6, O.P. 78
Tel.: 410.43.80, Fax: 411.33.84; www.SpiruHaret.ro

Universitatea Spiru Haret

UNIVERSITATEA *SPIRU HARET*
FACULTATEA DE FILOSOFIE ŞI JURNALISTICĂ

Prof. univ. **CORNEL POPA**

LOGICĂ
ŞI
METALOGICĂ

II

EDITURA FUNDAŢIEI *ROMÂNIA DE MÂINE*
Bucureşti, 2002

Universitatea Spiru Haret

C U P R I N S

Prefață 11

Cap. 1. **EXISTENȚĂ, LIMBĂ ŞI GÂNDIRE LOGICĂ. LOGICĂ ŞI METALOGICĂ** 15

1. Existența, comportamentul şi geneza schemelor de inferență 15
2. Niveluri ale discursului logic 19
3. Nivelurile şi tipologia operațiilor logice 22
4. Acțiunile, comunicarea şi atitudinile propoziționale .....

Cap. 2. **AXIOMATIZAREA LOGICII PROPOZIȚIILOR** 34

1. Introducere 34
2. Sistemul Hilbert-Ackermann 35
   2.1. Vocabularul 35
   2.2. Regulile de formare 35
   2.3. Definiții 36
   2.4. Axiome 36
   2.5. Reguli de inferență 36
   2.6. Teoreme 37

Observații 38
3. Noncontradicția sistemului Hilbert-Ackermann 49
4. Completitudinea sistemului Hilbert-Ackermann 51
5. Independența sistemului Hilbert-Ackermann 53
6. Teorema deducției şi demonstrațiile în sistemele axiomatice 61
7. Alte sisteme axiomatice 66
   7.1. Sistemul lui Gotlab Frege 66
   7.2. Sistemul lui Ian Lukasiewicz 67
   7.3. Sistemul P2 al lui Alonzo Church 67
   7.4. Sistemul lui H. Freudenthal 70
   7.5. Sistemul lui D. Hilbert şi P. Bernays 71

Universitatea Spiru Haret

7.6. Sistemul lui A. Grzegorczyk …….. 71
7.7 Sistemul lui Elliot Mendelson ……. 73
8. Concluzii …….. 74

Cap. 3. **AXIOMATIZAREA LOGICII PREDICATELOR** …..... 78

1. Limbajul sistemului axiomatic al logicii predicatelor …….. 79
2. Sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann al logicii predicatelor …. 83
3. Teorema deducţiei în logica predicatelor …….. 88
4. Teorema deducţiei şi legea exportaţiei ……. 91
5. Utilizarea teoremei deducţiei şi demonstraţia din ipoteze …… 94
6. Principiul dualităţii …… 101
7. Alte teoreme în logica predicatelor de ordinul întâi ……. 103
8. Necontradicţia sistemului axiomatic al logicii predicatelor …….. 106
9. Teorema formelor normale prenexe …….. 109
10. Formele normale Skolem …… 111
11. Echivalenţă şi echivalenţă deductivă …….. 114
12. Teorema lui T. Skolem ……... 115

Cap. 4. **TEORIA DEFINIŢIILOR ŞI BAZELE DE CUNOŞTINŢE** 125

1. Introducere …… 125
2. Teoria aristotelică a definiţiei ……... 125
3. Critica teoriei aristotelice a definiţiei …… 128
4. Exemple de definiţii …….. 130
5. Teoria conceptului …… 132
6. Definirea unor proprietăţi sau relaţii ……. 137
7. Definirea operaţiilor sau a simbolurilor funcţionale ……. 139
8. Definirea constantelor individuale …… 141
9. Definiţiile condiţionale ……. 141
10. Structura definitorului şi realizabilitatea predicatului definit ….. 143
11. Criteriile eliminabilităţii şi non-creativităţii ……... 145
11.1. Criteriu de eliminabilitate ……. 146
11.2. Criteriu de non-creativitate …… 147
12. Teoria semiotică a definiţiilor …… 149
13. Definiţiile explicite şi bazele de cunoştinţe …… 160
14. Rolul definiţiilor în ştiinţele juridice. …….. 165
Normele, definiţiile stipulative şi instrucţiunile Prolog ……... 165
15. Definiţiile explicite şi conceptele economiei de viaţă …… 169
16. Definiţiile operaţionale ……... 176
16.1. Exemple ……. 176
16.2. O perspectivă semiotică-acţionalistă
asupra definiţilor operaţionale …… 177

Universitatea Spiru Haret

16.3. Definițiile operaționale şi schemele de inferență …….. 179
16.4. Agenți, operații şi abilități …….. 181
16.5. Obiecte, operații, domeniu ……. 183
16.6. Abilități, deschideri şi definiții …….. 184
17. Definițiile lexicale şi definițiile stipulative ……. 186
17.1. Definiții lexicale …… 186
17.2. Definiții stipulative …… 188
17.3. Raporturile dintre definițiile stipulative şi cele lexicale …. 189

Cap. 5. **TEORIA CLASIFICĂRII, REZOLUȚIA DUALĂ ŞI BAZELE DE CUNOŞTINȚE** …….. 193

1. Introducere …… 193
2. Ce clasificăm ? …….. 194
3. Definiția clasificării elementare …… 195
4. Criterii, măsurători şi definiții operaționale …….. 199
5. Interpretarea relaționistă a clasificărilor elementare ……. 203
6. Clasificarea elementară ca o relație binară ……... 206
7. Reprezentarea grafică a clasificărilor …… 208
8. Clasificările elementare şi schemele de inferență ……. 212
9. Clasificările alternative şi inferențele imediate ……. 213
10. Compunerea clasificărilor ……... 216
11. Clasificarea multinivelară ……... 218
12. Tipuri de clasificări multinivelare ……... 220
13. Proprietățile formale ale compunerii clasificărilor ……. 221
14. Clasificările multinivelare şi Prologul …… 223
15. Diagramele Karnaugh şi teoria clasificării ……. 225
16. Clasificările, arborii semantici şi formele normale disjuncte ….. 226
17. Relația dintre clasificări şi diviziuni ……... 229
18. Diviziunea, expandarea şi rezoluția dual simetrică ……... 230

Cap. 6. **LOGICA MODALĂ ALETICĂ** …….…….. 240

1. Geneza logicii modale. Implicația materială şi implicația strictă .. 240
2. Limbajul logicii modale propoziționale. Sistemul K …… 244
3. Sistemul T ……. 250
4. Sistemul D ……..…… 253
5. Sistemul S4 ……..……... 253
6. Sistemul S5 ……... 257
7. Validitatea lui S5 ……... 260
8. Semantica de lumi posibile pentru logicile modale …….. 262
Observații finale.……. 268

Universitatea Spiru Haret

Cap. 7. **LOGICA TEMPORALĂ** …….. 271

1. Sistemul diodorean de logică temporală …….. 271
2. Decizia matriceală în sistemul temporal diodorean …….. 273
3. Sisteme temporale metrice …… 275
4. Semantica lumilor posibile şi logicile temporale …… 277
5. Logica intervalelor temporale ……... 280
Concluzii ……... 286
Probleme de logică temporală …….. 287

Cap. 8. **LOGICĂ DINAMICĂ** ……..……... 288

1. Limbajul logicii dinamice propoziționale elementare …….. 289
2. Semantica logicii dinamice elementare ……..... 289
3. Logica propozițională dinamică …… 292
   3.1. Limbajul logicii propoziționale dinamice …….. 292
   3.2. Semantica logicii propoziționale dinamice …… 293
   3.3. Legi ale logicii dinamice propoziționale …… 294
4. Logica dinamicii de ordinul întâi ……. 296
   4.1. Sintaxa logicii dinamice de ordinul întâi …… 296
   4.2. Semantica logicii dinamice de ordinul întâi …….. 298
5. Logica dinamică şi descrierea acțiunilor umane. Un exemplu ….. 300
6. O semantică pe arbori a logicii dinamice …….. 303
7. Produsele de calitate, logica dinamică, tehnologiile şi agenții ….. 311

Cap. 9. **LOGICA DEONTICĂ** ……..……. 323

1. Sistemele wrightiene P şi O …….. 324
2. Logica deontică standard …….. 329
3. Limitele sistemelor de logică deontică ……. 330
4. Sistemele monadice Smiley-Hanson şi conceptul de normalitate la L. Åquist ....……. 332
   4.1. Sistemul OK ……..... 334
   4.2. Sistemul OM ……... 338
   4.3. Sistemul OS4 …….. 339
   4.4. Sistemul OB …… 340
   4.5. Sistemul OS5 …….. 341
5. Demonstrabilitate şi consistență ……... 346
6. Semantica sistemelor deontice Smiley-Hanson …… 346
7. Validitatea şi realizabilitatea cu sistemele Smiley-Hanson …….. 350
8. Noncontradicția sistemelor Smiley-Hanson ……. 350
9. Completitudinea sistemelor Smiley-Hanson ……. 356
10. Logica deontică dinamică ……... 359
   10.1. Logica deontică şi modalitățile acționale ……. 361

Universitatea Spiru Haret

10.2. Un nou paradox în logica deontică standard …… 364
10.3. Logica deontică dinamică propusă de J.J.Ch.Meyer ..……..
10.4. O semantică a logicii deontice dinamice pe arbori etichetați 364
10.5. Scheme de inferență în logica deontică dinamică …… 368
10.6. Întemeierea logicii deontice pe logica acceptării ……. 380
Concluzii ……... 384

Cap. 10. **LOGICA ACCEPTĂRII** ……..……... 390

1. Statutul logicii acceptării. Logica acceptării, actele de vorbire şi acțiunile umane …….. 395
2. Logica trivalentă a acceptărilor de fapt ……. 397
3. Concepte primitive şi concepte derivate ……... 400
4. Acceptare şi acceptabilitate ……... 401
5. Decizia prin arbori de decizie ……... 402
6. problema criteriilor de acceptare şi respingere ……. 407
7. Opinii şi aserțiuni. Ce credem şi ce declarăm ……... 407
8. Stare de fapt, stare interioară, discurs, evaluare …… 410
9. Ce acceptăm şi ce respingem în legătură cu acțiunea umană? ….. 413
10. Logica acceptării şi metoda rezoluției …… 414
11. Axiomatizări ale logicii acceptării …….. 416
11.1. Sistemul modal K şi axiomatizarea logicii acceptării. Sistemul AK ……. 416
11.2. Sistemul D şi logica acceptării. Sistemul AD …….. 420
12. Sfârşit de capitol şi început de drum ……... 423

ÎNCHEIERE ……. 426

Bibliografie ……... 430

Universitatea Spiru Haret

Prefață

Primul volum din lucrarea de față a fost publicat în anul 2000 sub titlul Logică şi metalogică*. El reprezintă prima parte a cursului nostru de* Teoria sistemelor logice. Logică şi Metalogică

Al doilea volum din Logică şi Metalogică *conține, în principal, un capitol introductiv despre existență, limbi naturale şi limbaje logice, axiomatizarea logicii propozițiilor – axiomatizarea logicii predicatelor, căci nu putem face metalogică mai înainte de a cunoaşte conținutul şi structura unor teorii logice de bază. Urmează apoi teoria definițiilor, capitol în care am adus mai multe înnoiri în comparație cu lucrarea mea mai veche pe această temă. Între altele, am legat teoria definițiilor de limbajele teoriilor ştiințifice şi de sistemele axiomatice. În plus, mi-am revăzut propria perspectivă semiotică asupra definițiilor, aducând-o la zi cu stadiul cunoştințele mele despre limbajul logicii predicatelor şi metateoria acestuia. Dar elementul nou cel mai important, din perspectiva aplicațiilor practice, îl reprezintă conectarea teoriei definițiilor cu analiza conceptelor primitive şi derivate şi cu programarea logică.*

Capitolul despre teoria clasificării reprezintă şi el o regândire a temei în raport cu tot ce s-a scris pe această temă în țara noastră.

Teoria sistemelor logice neclasice este prezentată mult mai concis de cât am fi dorit. Am pierdut în timpul efectuării unui Up Great la calculatorul propriu peste 1200 de fişiere şi, între acestea, fişierele cărții de față. Prins între dorința de a prezenta o versiune înnoită şi cerința de a edita manualul cât mai repede am găsit o tăietură pe cât posibil convenabilă. Am inclus în volum capitole distincte despre logica modală aletică, sistemele normale K, D, S4, B, S5, axiomatica şi semantica acestora, logica temporală, logica dinamică, logica deontică şi logica acceptării.

Metalogica este o reflecție de ordinul al doilea ce vizează proprietățile limbajelor logice şi ale modelelor semantice ale acestora.

Logica modernă, mai mult decât logica aristotelică, face uz de nişte limbaje formale în care descrie structura raționamentelor făcute de oameni în limbile naturale. Chiar dacă limba naturală rămâne pentru toate disciplinele ştiințifice limbajul cel mai cuprinzător în care se explică funcțiile

Universitatea Spiru Haret

limbajelor specializate, specialistul dintr-o ştiinţă, oricare ar fi aceasta, nu se poate lipsi de limbajul specializat al disciplinei sale. Nu se poate lipsi nici de limbajele specializate ale ştiinţelor-instrument, de limbajul matematicii, de limbajele de programare, de limbajul logicii moderne.

Este soarta noastră în acest mileniu să ne alfabetizăm de mai multe ori şi să învăţăm mai multe limbaje. Nici măcar poeţii nu mai pot trăi exclusiv în perimetrul limbii materne. Sunt nevoiţi şi ei să înveţe regulile şi metodele unor limbaje specializate de care este impregnat mediul ambiant.

Oamenii gândesc în limbile materne şi în limbile străine asimilate destul de bine. Dar formulările din limbile naturale sunt, din nefericire, adesea imprecise, ambigui. Pentru verificarea corectitudinii operaţiilor noastre logice de inferenţă sau deducţie, de definire sau clasificare, de argumentare sau întemeiere a unor puncte de vedere într-o problemă dată au fost create, de-a lungul secolelor, mai multe limbaje logice. Toţi marii logicieni au creat sau au perfecţionat limbaje logice.

Pentru omul modern, limbajul logic de bază este limbajul logicii predicatelor de ordinul întâi. Acesta nu este, după cum greşit cred mulţi, un limbaj păsăresc al unei secte de matematicieni ciudaţi, ci este limbajul logic de bază al omului modern*, indiferent de profesia sa. Este tot atât de important ca şi cunoaşterea gramaticii limbii materne. Cunoaşterea gramaticii ne fereşte de comiterea unor greşeli de exprimare. Cunoaşterea logicii ne fereşte de comiterea unor greşeli de gândire. Şi sunt mai grave greşelile de raţionament decât greşelile de exprimare gramaticală. În plus, logica predicatelor este teoria de bază care ne conduce pe un drum scurt spre programarea logică şi construirea unor baze de cunoştinţe relaţionale şi a unor sisteme expert în cele mai diferite domenii de activitate.*

Limbajul logicii aristotelice este extrem de sărac şi neperformant. Este ca o căruţă pe lângă un automobil de ultim tip. Cui îi place astăzi să umble cu căruţa într-o metropolă ?

După prezentarea limbajelor celor două teorii logice menţionate mai sus ne-am concentrat atenţia asupra metodelor de decizie. Acestea ne permit să ne pronunţăm asupra validităţii sau invalidităţii raţionamentelor făcute de noi înşine sau de interlocutorii noştri în limbile naturale sau în alte limbaje specializate. Mai mult, putem determina dacă un set de aserţiuni dintr-un domeniu oarecare ce alcătuiesc o teorie sau o bază de cunoştinţe sunt mutual consistente, au un model sau nu. Ne permit, totodată, să descoperim contramodelele sau cazurile de infirmare.

A trecut de mult vremea când logica diagnostica doar raţionamentele. Astăzi, logica este arhitectul ce construieşte extinse baze de cunoştinţe relaţionale din domeniul ştiinţelor economice sau tehnice, defineşte maşini inferenţiale, contribuind astfel la construirea unor sisteme expert sau de

inteligență artificială. Pe acest temei am acordat o atenție sporită teoriei formelor normale, clauzelor disjunctive şi celor conjunctive, rolului lor în alcătuirea bazelor de cunoştințe computaționale.

În redactarea manualului am fost călăuziți de dorința de a oferi studentului metode şi proceduri cu care să poată face ceva: formaliza datele unei probleme, decide asupra validității unui raționament, descoperi răspunsurile la anumite întrebări legate de datele formalizate.

Teoria logică se prelungeşte în mod firesc în programarea logică.

Teoriile logice de astăzi nu sunt cu mult mai dificile decât logica clasică, dar, cu certitudine, sunt mult mai folositoare. Ele permit înțelegerea profundă a structurii unei teorii ştiințifice, a mecanismului ei deductiv, a relațiilor dintre concepte şi clasele de obiecte pe care le desemnează. Totodată, ele permit descrierea enunțurilor teoretice, a datelor factuale şi a întrebărilor unei probleme, precum şi scrierea unui program pentru rezolvarea computerizată a acesteia.

Logica este o disciplină profund formativă. Ea dezvoltă puterea de judecată a tinerilor, îi învață să-şi ordoneze corect ideile, să demonstreze şi să argumenteze, să facă abstracție şi să coboare de la abstract la concret sau determinare. Logica le dezvoltă spiritul critic, puterea de analiză şi încrederea în judecata proprie, contribuie la educația intelectuală a acestora.

Am dat prioritate sistemului axiomatic Hilbert Ackermann şi demonstrațiilor de noncontradicție, completitudine şi independență ale acestuia. Prezentăm, totodată, teorema deducției ca o metodă de a scurta lungimea textelor demonstrative în sistemele axiomatice şi de a face mai intuitivă desfăşurarea acestora. Am prezentat succint şi alte sisteme axiomatice pentru logica propozițiilor create de Gottlob Frege, David Hilbert şi Paul Bernays, Alonzo Church, Ian Lukasiewicz, H. Freudenthal, A. Grzegorczyk, Elliott Mendelson.

Un loc important în volumul al doilea ocupă teoria conceptelor, în speță, teoria definițiilor şi a clasificărilor. Prin introducerea acestor două capitole vrem să întrerupem obiceiul de a omite, în cursurile universitare de logică, capitolele despre teoria definițiilor şi teoria clasificărilor.

Chiar dacă am susținut în 1971 o teză de doctorat despre definițiile operaționale şi în 1972 am publicat o monografie despre Teoria definiției, tradusă şi recenzată favorabil şi peste hotare, m-am supus şi eu trei decenii tradiției şi am omis în cursurile orale şi în manualele tipărite aceste capitole.

De data aceasta am inclus în cursul nostru aceste capitole. Mai mult, le vom lega de teoria sistemelor axiomatice şi de programarea logică.

Am inclus în volumul de față mai multe capitole de logică neclasică. Prezentăm pentru prima dată în limba română unele sisteme de logică

Universitatea Spiru Haret

temporală şi dinamică. Propunem, în premieră, o semantică pe arbori pentru logica dinamică şi construim şi o logică deontică dinamică pe infrastructura semantică propusă.

Am omis, din motive de spaţiu, un capitol despre logica epistemică şi altul despre sistemele teleologice, o teorie logică despre scopuri şi programe de acţiune, despre eficacitate, eficienţă, directive practice şi erori practice. Am făcut aceasta cu strângere de inimă, căci teleologica este o născocire a mea din anii '70 şi face parte din ceea ce noi numim pragmatizarea logicii şi, în prezent, teoria scopurilor şi a programelor este o temă predilectă în logica modală aplicată şi în inteligenţa artificială.

Am adăugat, în schimb, un capitol despre logica acceptării, o nouă ramură de logică modală, care dă seama de judecăţile de valoare, intim legată de procesul luării deciziilor, dar şi de teoria argumentării, orientare cultivată intens în literatura logică occidentală din ultimele decenii.

Desigur, în alcătuirea volumului am folosit rezultate, exemple sau texte incluse în manualele noastre publicate anterior. Textele folosite au fost revizuite şi completate substanţial, întregite cu noi capitole sau paragrafe.

Dorind să sporim eficacitatea manualului nostru şi să venim în ajutorul tuturor categoriilor de studenţi , la zi sau cu frecvenţă redusă, am inserat în capitole şi paragrafe probleme şi exerciţii, teme de referate.

Adăugăm la sfârşit liste de probleme din capitolele cursului, pe baza cărora alcătuim biletele de examen .

Bucureşti, februarie 2002 *Prof. univ. dr.* Cornel Popa

Universitatea Spiru Haret

Cap. 1. **EXISTENŢĂ, LIMBĂ ŞI GÂNDIRE LOGICĂ**

LOGICĂ ŞI METALOGICĂ

Ne întrebăm, în capitolul de faţă, la ce niveluri putem vorbi de gândire logică şi în ce măsură gândirea logică este un atribut al actelor agentului gânditor individual şi în ce măsură aceasta poate fi descoperită în structura limbilor naturale.

Care sunt nivelurile discursive la care se manifestă structuri, forme şi scheme de gândire logică ?

Ce relaţii există între existenţa fizic-naturală şi cea istoric-socială, pe de o parte, şi gândirea logică, pe de altă parte. Sunt legile gândirii logice reflectări directe ale existenţei, după cum susţinea dialectica marxistă, sau acestea sunt mai intim legate de structurile lingvistice şi de comunicarea interumană ?

Ce raport există între logică şi teoriile ştiinţifice ? Cum se raportează limbajele logice la limbile naturale şi la existenţa naturală şi socială ?

Ce relaţii există între logică şi metalogică ?

1. **Existenţa, comportamentul şi geneza schemelor de inferenţă**

Logicienii nu se ocupă de geneza gândirii la reprezentanţii speciei umane şi nici de actele de gândire la speciile preumane.

Gândirea discursivă este, în opina noastră, un act deliberat, intenţionat, chiar dacă admitem că pot exista la nivel comportamental şi acte de gândire reflex adaptativă, mai mult sau mai puţin spontană. Chiar şi calculul matematic dispune de stereotipii şi automatisme dobândite prin antrenament şi exerciţii. Acestea pot juca un rol important după ce a fost descoperit modelul unei probleme şi a fost determinat algoritmul ei de rezolvare.

Ne întrebăm dacă gândirea interioară tacită, în forul intim al subiectului, aparţine sau nu logicii sau aceasta ţine exclusiv de

Universitatea Spiru Haret

psihologie. Am putea fi înclinați să admitem că aceasta, fiind legată de experiența intimă, senzorial-perceptivă a individului, de memoria, idiolectul şi abilitățile discursive ale acestuia, ține exclusiv de domeniul psihologiei şi nu şi de cel al logicii. Şi sigur, ne întrebăm, în ce măsură schemele şi structurile logice reflectă existența fizică, comportamentul biologic sau conduitele umane. Ne întrebăm, totodată, dacă logica nu a fost extrasă din structura şi articulațiile limbilor naturale ele însele conectate prin conduita agenților vorbitori la mediul natural şi la raporturile sociale.

Gândirea logică primordială poate fi identificată în activitățile practice şi discursive desfăşurate de ființele umane. Fixarea ei în structurile lingvistice scrise este un efect postum, aşa cum scheletele scoicilor şi peştilor sunt descoperite târziu în straturile geologice la multe sute de mii de ani după dispariția ființelor vii. Logicienii nu se ocupă de geneza gândirii la reprezentanții speciei umane şi nici de actele de gândire la speciile preumane.

Deținătorii operațiilor şi conectorilor logici sunt ființele umane active apte de a reflecta şi descrie, de a transmite şi decodifica sau înțelege mesaje discursive.

Trebuie să admitem că gândirea umană a fost primordial preponderent legată de percepții şi reprezentări, de imagini globale, sinoptice şi de stereotipii dinamice adaptative.

Trecerea de la surprinderea globală a imaginii mediului ambiant imediat redată prin percepție şi reprezentare la comunicarea discursivă comportă inevitabil un fel de gâtuire. Vorbitorul trebuie să-şi organizeze informațiile după cerințele înțelegerii rostirii sale de către cel căruia vrea să-i comunice ceva. Trebuie să-şi ordoneze cuvintele unul după altul, astfel încât receptorul să identifice mai întâi şirul de foneme, să asambleze fonemele în cuvinte purtătoare de semnificație parțială, pe acestea să le integreze în propoziții, acestora să le capteze sensul la nivel ontic, la nivel social-comportamental, să le evalueze şi să-şi formeze propria sa opinie şi apoi să-i răspundă în termeni adecvați celui ce i-a vorbit. Găsirea cuvântului ce exprimă adevărul este după spusa poetului nostru național, Mihai Eminescu, o sarcină cumplit de dificilă.

Semnificarea începe atunci când un eveniment biologic nerelevant dobândeşte o funcție de avertizare a altui eveniment din mediul biologic relevant. Pe timp de furtună pârâitul crengii sau trunchiului unui copac ce cade este un avertisment pentru o vietate sau

Universitatea Spiru Haret

ființă umană aflată în preajmă. De aici până la sesizarea unui raport de succesiune între cele două evenimente şi a unei relații de condiționare descriptibilă printr-o implicație distanța nu este chiar atât de mare.

În mod similar, credem că actele de alegere dintre două sau mai multe alternative, dintre care una trebuie respinsă, prefigurează la nivel comportamental schema raționamentului ipotetico-disjunctiv după care din A sau B şi non A se deduce B.

Suntem tentați să legăm geneza structurilor logice mai curând de actele comportamentale, de decizii şi relații de condiționare, scop, mijloc decât strict de legile fizice sau relația de cauzalitate. Acestea sunt, desigur, furnizoare de raporturi de dependență pentru agentul cognitiv sau al actelor practice, care descrise la nivel discursiv produc propoziții condiționale sau implicative.

Am putea spune că schema *Modus Ponens* are multiple ilustrări şi la nivel ontic.

În viziunea noastră, logica nu este rezultatul direct al reflectării existenței fizice primare. Legile logicii nu sunt calchieri sau reproduceri ale raporturilor din lumea fizică, după cum pretindeau unii adepți ai filozofiei marxiste sau Ernest Nägel. Logica face uz în schemele ei de relațiile de dependență care descriu uneori realitatea fizică, dar acestea ca atare nu sunt legi logice, ci enunțuri adevărate ale unor discipline fizice, biologice sau sociale.

Nu credem că logica este „teorie despre legile şi structurile cele mai generale ale naturii, societății şi gândirii". Admitem, desigur, că actele de gândire aparțin ființei umane ce cunoaşte, grăieşte, scrie, judecă şi calculează. Relațiile omului cu natura sunt mediate de unelte, intenții sau scopuri şi programe. Relațiile individului cu membrii comunității căreia îi aparține sunt mediate de discurs. Iar legile logicii sunt legate de funcțiile descriptiv-veridice pe care le îndeplinesc adesea actele de comunicare. Iar exercitarea acestor funcții presupune luarea în considerare a domeniilor de referință sau designare, a lumii fizice, a relațiilor şi faptelor sociale, a situațiilor acționale şi a stărilor de fapt, dar şi a scopurilor sau obiectivelor asumate, precum si a conduitelor eficace ce pot lega diferite situații acționale de stările posibile viitoare asumate ca scopuri. Conduita rațională presupune şi adecvarea mijloacelor şi abilităților operaționale ale agentului la scopurile asumate.

Adecvarea aserțiunilor la natura obiectului studiat ține de condiția veridicității şi ține de drept de ştiințele particulare şi, filosofic, de teoria

Universitatea Spiru Haret

cunoaşterii. Ştiința logică lucrează cu valori de adevăr, dar nu cu adevărurile din domenii particulare. Acestea țin de ştiințele empirice. Ele pot apare în modelare şi în logica aplicată. Logicianul ajunge la acestea numai când dă exemple concrete şi face logică aplicată într-un domeniu sau altul. Logicianul nu se ocupă ca profesionist de adevărurile din fizică sau din sociologie. El se ocupă de adevărurile tautologice, neinfirmabile, de validitate şi de legi logice. El se ocupă de descoperirea schemelor de inferență care conservă adevărul în trecerea de la premise la concluzie. Schemele valide de inferență conservă, deopotrivă, validitatea şi veridicitatea.

Logicianul are grupa sangvină 0. El este un donator universal sau un prestator universal de servicii. Uneltele şi metodele lui, ca şi cele a matematicianului, se aplică în orice domeniu de cercetare ştiințifică şi în toate activitățile umane productive.

Luarea unei decizii are nevoie de argumentare şi întemeiere. Alcătuirea unui program poate fi descrisă printr-o serie de directive practice sau instrucțiuni şi acestea pot fi descrise prin serii de propoziții condiționale sau clauze generice iar acestea pot fi transpuse în instrucțiuni logice, „hrănite" de date factuale şi de scheme de inferență (de principiul rezoluției). Logicienii tind să devină astăzi arhitecți de baze de cunoştințe.

Ei inventează tehnici şi metode de verificare a corectitudinii demersurilor logice urmate de către un vorbitor sau altul, dar mai ales de garantarea actelor de inferență făcute într-o disciplină particulară sau alta. Ei creează limbaje artificiale prin intermediul cărora constructorii de teorie îşi pot verifica ei înşişi corectitudinea raționamentelor făcute.

Logicienii sunt producători de unelte ale cugetului. Nu e de ajuns să-ți dotezi întreprinderea cu tehnică de calcul de ultimă oră, cu calculatoare Pentium III. Mai ai nevoie de o instrucție modernă a celor ce fac uz de ele. Inclusiv cu tehnici şi metode logice de construcție a bazelor de cunoştințe şi cu metode moderne de analiză .

Logica modernă este ştiință formală şi, în acelaşi timp, ştiință aplicată. Pare uimitor, dar formalismul cel mai abstract este cel mai aproape de aplicațiile concrete, căci astăzi formalismele sunt dotate cu interpretări semantice bine articulate care vizează domenii particulare de aplicații. O semantică pentru un set de formule nu este nimic altceva decât o mulțime de modele pe care le satisface aceasta. Semantica asociază acelor formule mulțimi de propoziții adevărate în domeniul de interpretare considerat.

Universitatea Spiru Haret

Teoriile logice dispun de o dublă funcţionalitate. Ele pot fi interpretate ca legi ale gândirii umane, valide şi, în acelaşi timp, ca reguli de inferenţă, ca mijloace de prelucrare a informaţiei captate intr-o bază relaţională de cunoştinţe. Legile logice se transformă în unelte universale de prelucrare.

2. **Niveluri ale discursului logic**

Poziţia noastră de principiu este că logica operează la mai multe niveluri: La nivelul subiectului cunoscător care gândeşte în forul său interior; la nivelul discursului său oral şi scris. La nivelul limbilor naturale şi al teoriilor ştiinţifice particulare, la nivelul normelor juridice şi actelor administrative, la nivelul limbajelor logice specializate ce descriu diferite teorii şi metode logice şi la nivelul metalimbajelor logice în care descriem aşa-numitele limbaje logice obiect.

Pentru a distinge mai uşor nivelurile şi accepţiile termenului logică în viaţa cotidiană să considerăm pentru început câteva propoziţii:

1. Cuvântarea Dvs. despre dreptul de proprietate al cetăţenilor este logică şi convingătoare.
2. Articolul lui Petru are o logică imbatabilă.
3. Planul Dvs. este realist şi logic.
4. Logica aristotelică este expusă în „Analiticele prime" şi în „Analiticele secunde".
5. Logica predicatelor a fost creată autonom de către Gottlob Frege şi de Ch. S. Peirce.
6. Sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann este necontradictoriu.
7. Logica predicatelor de ordinul întâi este indecidabilă.

Prima propoziţie se referă la înlănţuirea coerentă şi convingătoare a ideilor în discursul unui vorbitor. Proprietăţile sau calităţile logice, coerenţa, forţa de convingere sunt atribuite *discursului oral* al unui orator care a vorbit în faţa noastră despre dreptul la proprietate al cetăţenilor unui stat, de exemplu, al cetăţenilor unui fost stat comunist.

Cea de a doua propoziţie se referă la logica şi coerenţa unui *discurs scris,* a unui articol, să spunem, publicat într-un ziar de un autor oarecare, pe nume Petru.

Cea de a treia propoziţie atribuie calităţi logice nu doar unor rostiri sau scrieri oarecare, ci rostirilor sau scrierilor ce descriu planuri

Universitatea Spiru Haret

şi deci, prin consecinţă, planurilor ca ordonări de conduite umane prin care se ating anumite stări posibile anterior asumate de cineva ca scop.

Cea de a patra propoziţie nu se referă la demersul logic al unei fiinţe umane despre un subiect oarecare ci la o *teorie logică particulară*, creată de un filosof, Aristotel, la teoria judecăţilor de predicaţie de forma S este P şi la raţionamentele valide ce pot fi făcute cu acest fel de judecăţi supuse unor restricţii, la silogismele categorice, ca şi la silogismele modale. Propoziţia ne spune în ce scrieri a fost expusă teoria logică aristotelică. O teorie logică poate să fie redată prin anumite principii, legi şi reguli ce descriu prelucrări corecte, valide ale formulelor iniţiale ce descriu declaraţii sau aserţiuni.

Cea de a cincea propoziţie vorbeşte despre o altă teorie logică, una de bază pentru ştiinţa actuală a logicii, despre logica predicatelor şi ne informează cine au fost creatorii ei.

Cea de a şasea propoziţie vorbeşte despre un sistem logic axiomatic de logica propoziţiilor, cel creat de David Hilbert şi W. Ackermann, despre care ne spune că este necontradictoriu

Cea de a şaptea propoziţie ne vorbeşte despre o proprietate a unei teorii logice şi anume despre proprietatea logicii predicatelor de a fi indecidabilă.

Propoziţiile 6 şi 7 se referă la teorii logice ca ansamblu de enunţuri despre legile logicii despre care se enunţă anumite proprietăţi. Acestea sunt *propoziţii despre sisteme de propoziţii* şi vizează aşa numitul *nivel metateoretic* al unui discurs.

Trebuie, aşadar, să distingem între:1. logica unui discurs uman sau logica unui emitent sau orator; 2. structura logică a unei scrieri a unui autor; 3. logica unui plan de acţiune care vizează o anumită ordine firească a înlănţuirii unor operaţii sau conduite în realizarea unui scop asumat de un agent individual sau colectiv; 4. expunerea concepţiei unui autor despre o teorie logică sau expunerea unei teorii logice, cum ar fi logica aristotelică, logica stoică, logica propoziţiilor, logica predicatelor, logica deontică, etc. (vezi propoziţiile 4 şi 5); 5. reflecţia metateoretică despre teoriile logice (vezi propoziţiile 6 şi 7), gândirea despre teoriile logice, metalogica înţeleasă ca o teorie despre sistemele logice şi proprietăţile lor formale cum ar fi consistenţa sau noncontradicţia, completitudinea, independenţa, decidabilitatea.

Exemple de teorii logice sunt: logica aristotelică, logica stoică, logica propoziţiilor, logica predicatelor de ordinul întâi sau de ordinul al doilea, logica modală aletică, logica deontică, logica epistemică, logica temporală, logica dinamică, logica polivalentă, logica nemonotonă etc.

Universitatea Spiru Haret

O *teorie* logică are o sintaxă sau un limbaj formal şi o semantică. Pentru o teorie logică sunt esențiale noțiunile de formulă bine formată, propoziție, formulă realizabilă, formulă infirmabilă, tautologie sau lege logică şi contradicție logică sau formulă irealizabilă, regulă de deducție, deducție şi deducție validă.

Logica poate fi înțeleasă şi ca o *metodologie*, ca un ansamblu de reguli şi tehnici în conformitate cu care se organizează un discurs uman sau o activitate umană, indiferent de domeniul de referință al acestora. Putem, aşadar, vorbi de logică ca *metodă şi tehnică de control a corectitudinii construcțiilor teoretice* şi ca *instrument de rezolvare a problemelor* cu care ne confruntăm în viața reală. În zilele noastre logica tinde să devină o tehnică rațională de analiză, formalizare şi modelare a rezolvării computerizate a problemelor. Gândirea logică asistă în calitate de arhitect la alcătuirea unui plan complex multimodular de înțelegere şi rezolvare practică a unor probleme, căci ea intervine din ce în ce mai mult în alcătuirea bazelor de cunoştințe şi în definirea maşinii inferențiale prin care acestea pot fi rezolvate. Logica devine un instrument eficace.

Logica este tot mai des privită de informaticieni ca un producător de tehnici şi metode intelectuale. Între principalele metode utilizate în logică sunt: formalizarea, axiomatizarea, modelarea, metode de decizie în diferite sisteme şi teorii logice, cum sunt metoda matriceală, metoda tablourilor semantice, metoda arborilor de decizie, metoda lui Quine, metoda Davis-Putnam, metoda rezoluției, diferite strategii rezolutive. La acestea trebuie adăugate tehnici şi metode utilizate în logica acțiunii, în teoria inducției, în raționamentele abductive, în cele plauzibile sau prin analogie, în teoria argumentării etc.

Putem, desigur, să ne întrebăm dacă există o structură logică a discursului interior tacit al unui subiect ce receptează un mesaj, care analizează şi decodifică un mesaj, face un calcul sau un raționament tacit, neexprimat verbal, îl evaluează critic, îl acceptă sau îl respinge şi îşi ticluieşte în sinea sa o replică sau un răspuns la întrebarea sau aserțiunea unui interlocutor al său. Noi credem că subiectul cunoscător săvârşeşte operații şi calcule logice şi la nivelul limbajului interior propriu, la nivelul ideolectului, că acestea au o dinamică proprie şi că ele pregătesc discursul verbal explicit al agentului. Mai mult, credem că pot fi concepute experimente mai subtile de psihologia cunoaşterii sau de ştiințe cognitive întemeiate pe logicile epistemice şi doxastice.

Observațiile de mai sus ne permit să conchidem că:

Universitatea Spiru Haret

1. Principiile şi schemele gândirii logice intervin la nivelul fiecărei fiinţe umane, mai mult sau mai puţin conştient;
2. Nici măcar gândirea umană tacită nu este complet străină de legile şi principiile logicii preluate din relaţiile de ordine impuse de actele şi conduitele umane sau din structurile lingvistice încorporate în ideolectul sau limbajul individual al subiectului cunoscător sau al oratorului;
3. Structuri logice sunt încorporate în toate limbile naturale, în toate limbajele artificiale şi în toate sistemele de norme sau reguli formulate pentru un compartiment sau altul al activităţilor umane;
4. Orice teorie ştiinţifică care identifică principii şi care degajează enunţuri adevărate sau teoreme din aceste principii conţine inevitabil apel la legi şi scheme logice de inferenţă;
5. Orice discurs public care apelează la un fond prealabil de cunoştinţe admis de interlocutori emite şi susţine aserţiuni sau teze şi respinge sau combate alte aserţiuni încercând să întemeieze deopotrivă afirmaţiile precum şi respingerile;
6. Planurile şi programele de acţiune îmbracă tot mai des forma unor argumentări procedurale şi sunt adesea susţinute cu tehnici şi procedee computaţionale.

3. **Nivelurile şi tipologia operaţiilor logice**

Redăm mai jos în două tablouri sinoptice legăturile logicii cu onticul sau existenţa, şi cu limbile naturale. Am menţionat în tablou la nivelurile 3 şi 4 două niveluri ale limbajelor logice, nivelul limbajului obiect şi nivelul metalimbajului. Nivelul 3 constă în exprimarea într-un limbaj simbolic, artificial al numelor unor obiecte individuale (coloana 3 din tabelul 1), a referirilor singulare nedeterminate din limbile naturale, prin pronumele ‘un’, ‘o’, la obiecte dintr-un domeniu fizic oarecare (vezi coloana 4 din tabelul 1). Coloana 5 din tabelul 1 are la nivelul 3, cel al limbajului obiect sau al logicii predicatelor de ordinul întâi, atomi predicativi. Aceştia descriu propoziţii elementare sau scheme de propoziţii elementare. Atomii predicativi instanţiaţi descriu propoziţii, căci ei au ca argumente constante individuale. $P(a)$ spune că obiectul individual, denotat prin constanta a, are proprietatea P. P stă pentru numele unei proprietăţi a obiectului sau individului a dintr-un domeniu existent la nivelul 1. P(a) este o propoziţie particulară factuală. Ar putea fi ceva de

Universitatea Spiru Haret

felul propoziției 'Ion este înalt', care se mai numeşte şi „fapt". P(x) de la acelaşi nivel este schema propozițională sau şablonul după care putem construi infinit de multe propoziții după acelaşi calapod, prin înlocuirea variabilei x cu o constantă individuală. Dar P(x) ca atare nu este o propoziție, ci un predicat sau formulă „deschisă".

Coloana 3 din tabloul 2 are la nivelul 3 variabile propoziționale. Acestea se referă la propoziții descriptive care, ca şi atomii predicativi din tabelul 1, pot fi adevărate sau false .

Coloana 4 din tabelul 2 are la nivelul 3, cel al logicii propozițiilor sau al logicii predicatelor de ordinul întâi, conective logice cu ajutorul cărora formăm propoziții „moleculare" sau compuse. Dar acestea pot lega şi atomi predicativi deschişi, formând pe această cale predicate moleculare. Predicatele pot deveni propoziții pe două căi, prin cuantificare completă sau prin instanțiere, respectiv prin înlocuirea variabilelor lor prin constante individuale.

La intersecția dintre coloana 5 şi nivelul 3 sunt prezentați cuantificatorii logici, care sunt într-un fel o generalizare a conectivelor logice booleene de un singur argument. Cuantificatorul universal este o generalizare a conjuncției pentru toate obiectele dintr-un domeniu D care au proprietatea P. Dacă domeniul D = {a1, a2,a3}, atunci $\forall xP(x) = P(a1) \wedge P(a2) \wedge P(a3)$.

Tabel nr.1

1	Existență	Obiecte individuale	Domenii de obiecte	Stări, evenimente
2	Limbă	Nume proprii Aristotel, Frege	Descripții vagi un, o, ceva	Nume comune, adjective, verbe
3	Logică	Constante individuale a, b, c, a1, a2	Variabile individuale x, y, z, x1, x2,	Atomi predicativi: P(a), P(x),R(x,y) x = y, z = f(x)
4	Metalogică	Tipuri de nume şi decripții individuale	Tipuri de variabile sau meta-simboluri	ϕ,γ, Proprietăți ale unor clase de atomi şi formule Metateoreme şi metareguli

Universitatea Spiru Haret

Tabel nr. 2

1	Existenţă	Stări, evenimente, acţiuni	Relaţii de succesiune, coexistenţă, dependenţă	Domenii, mulţimi de obiecte
2	Limbă	Propoziţii descriptive	Propoziţii compuse	Toţi, unii, fiecare, oricare
3	Logică	Variabile propoziţionale: p,q, r, s	Conective logice: $\wedge,\vee, \supset, \subset, \equiv, +, \downarrow, /$	Cuantificatori $\forall, \exists$
4	Metalogică	Metapropoziţii $\alpha, \beta, \gamma, \delta...$ sau A, B, C, D...	$\phi*\gamma*$=conectiv	Tipuri de cuantificatori

Să cercetăm acum ce semnificaţie logico-epistemică au trecerile de la un nivel la altul.

1. Trecerea de la nivelul 1 la 2, este pentru coloana 3 un act de denumire sau recunoaştere a numelui unui obiect pe care îl vedem acum în realitate. La nivelul coloanei a patra trecerea de la existenţă la limbă corespunde *descrierii* în limba naturală şi *asertării* unor propoziţii.

2. Trecerea de la nivelul 2 la 3, respectiv de la limba naturală la un limbaj logic, corespunde *formalizării.* Formalizarea este o codificare sau cifrare, dar nu de dragul de a ascunde sensul, ci de dragul de a dezambiguiza şi de a face calculabilă o teorie sau o bază de cunoştinţe, datele unei probleme. Formalizarea are menirea să facă limbajul logicii lipsit de ambiguitate. În plus, prin ea noi transpunem nişte raporturi de dependenţă existente la nivel ontic sau la nivelul limbilor naturale la nivelul limbajului formal. Prin formalizare *conservăm nişte structuri* de la nivel ontic la nivel semiotic.

3. Formalizarea poate fi privită şi ca o trecere directă de la nivelul ontic sau fizic material direct la un limbaj artificial, simbolic. Pentru aceasta, cel care formalizează trebuie să fie destul de bine iniţiat în domeniul de referinţă, să cunoască mulţimile de obiecte, evenimentele şi proprietăţile lor şi să fie de asemenea un mânuitor bun a lumii limbajelor formale. Actul de formalizare stabileşte corespondenţe între obiecte, proprietăţi şi relaţii la nivel ontic şi clasele de simboluri din limbajul artificial pe care îl propunem. Dar până la stabilirea de corespondenţe, cel

Universitatea Spiru Haret

ce formalizează face analize, distincţii, selecţii şi omisiuni. El face, în forul său intim, judecăți de valoare, se concentrează asupra a ceea ce consideră el esențial şi relevant pentru înjghebarea unei construcţii simbolice cu valoare denotativă şi cu funcţii sintactic operaționale. Concretul fizic, lumea obiectelor nu ne vorbeşte nouă oamenilor în nici o limbă naturală. Noi trebuie să percepem, să conceptualizăm şi să descriem simbolic ceea ce am perceput senzorial şi ceea ce am înțeles rațional. Observația nu este doar un act de contemplare perceptivă ci şi un salt de la imaginea perceptivă la discursul teoretic interuman. Acest salt este mijlocit de actul înțelegerii. Orice formalizare presupune *denotare* sau codificare a obiectelor şi evenimentelor în simbolurile limbajului în care formalizăm. Dar mai presupune şi formarea de reguli de agregare a simbolurilor primitive cu valoare descriptiv-denotațională directă la formule „moleculare", astfel încât acestea să conserve convențiile semantice anterior introduse şi să alcătuiască, la alt nivel, noi tipuri de expresii sintactice cu valoare semantică. Formalizarea conservă izomorfisme de la real la limbajul artificial şi pune bazele unui calcul ce face uz de reguli de derivare.

4. În cazul trecerii de la limbile naturale la limbajele logice ne putem întreba, în ipostaza de creatori de limbaje logice şi de ființe reflexive, dacă au fost descoperite din limbile naturale toate conectivele şi operațiile logice imbricate în acestea, cum au fost descoperite unele conective ca „şi", „sau", „dacă…, atunci...". Opina noastră este că sunt încă în limbile naturale operatori şi structuri logice nedescoperite şi necercetate.

5. Trecerea de la nivelul 1 la nivelul 3 poate însemna un *transfer de izomorfisme* de la lumea unor clase de obiecte fizice la un limbaj artificial, simbolic ce le descrie şi le transformă într-o dinamică semiotică, în calcul şi rezolvare de probleme. Tranziția de la 1 la 3 este o *modelare logică*. Acest nivel este quasi-autonom, o lume „a treia" popperiană, ideală, în care se petrec evenimente spirituale.

6. Dacă la nivelul 3 ne fixăm atenția asupra semnelor ca obiecte concrete avem ceea ce unii dialecticieni numeau cu termenii lui Marx „concretul logic". Obiectualizăm limbajul logic şi îl privim ca o serie de *rescrieri* sau *tranziții* conform unor reguli sintactice riguros definite. Orice *calcul* este o manipulare de formule după anumite reguli. Într-un calcul noi facem abstracție de semnificație. Operăm cu semnele după nişte reguli, facem nişte rescrieri. Formalizăm pentru a putea transfera prelucrarea strict sintactică maşinilor specializate, calculatoarelor.

Universitatea Spiru Haret

7. Trecerea de la 3 la 4 corespunde trecerii de la un limbaj logic particular, cu referinţă la obiecte, la un *metalimbaj* în care discutăm despre proprietăţile limbajelor logice, despre puterea lor de a cuprinde toate legile logice, despre noncontradicţia acestora şi despre relaţiile dintre ele, despre alte proprietăţi ale lor. Aceasta înseamnă o trecere de la teorie la metateorie. Gândim teoretic despre teorie. Gândirea teoretică despre teorie este o *metodologie*. Logica este un mare constructor de metode intelectuale, de algoritmi şi proceduri menite să rezolve clase variate de probleme. Toate logicile modale şi cele filozofice au fost construite pe baza analizei şi cercetării unor astfel de operatori.

8. Trecerea de la nivelul 3 la 1, respectiv de la un limbaj logic la un domeniu de referinţă obiectual sau reist corespunde *interpretării* unui limbaj logic într-un domeniu din realitate. Interpretarea face parte din semantica teoriilor logice de bază, logica propoziţiilor şi logica predicatelor. Totalitatea interpretărilor adecvate sau adevărate ale unui limbaj logic reprezintă *semantica* acestuia. Unii autori vorbesc chiar de ontologia unui limbaj formal sau a unui sistem expert sau de inteligenţă artificială.

9. Trecerea de la 3 la 2 corespunde *decodificării* unui limbaj logic particular sau explicării formulelor acestuia în termenii limbilor naturale.

10. Trecerea de la nivelul 4 la 3 înseamnă ilustrarea metateoriei prin teorie. O specie de instanţiere, dar nu la nivelul realităţii ci la nivelul entităţilor semiotice anterior construite.

Analiza celor două tablouri am făcut-o în afara subiectului uman, singurul care introduce reguli de semnificare, singurul care ştie utiliza semne, chiar rupte de contextul fizic natural şi care poate transmite ceea ce a descoperit altuia numai prin convenţiile lexicale anterior instituite.

Regulile şi structurile sintactice de prelucrare a informaţiei pot fi sesizate şi în gândirea umană vie. Ele sunt memorate şi devin abilităţi şi automatisme şi reguli ale conduitei noastre lexicale prin care conservăm veridicitatea. Acesta este nivelul cel mai intim al actelor de gândire.

Cum arată logica subiectului vorbitor de limbă naturală sau logica vie a unui cercetător, putem descoperi prin cercetarea empirică a actelor discursive şi a conduitelor diferiţilor subiecţi confruntaţi cu rezolvarea unor probleme şi cu redactarea procedurilor aplicate şi a soluţiilor descoperite.

Teoria şi metateoria logică ne permit să verificăm în ce măsură conduita discursivă a agenţilor testaţi satisface sau nu exigenţele legilor logice postulate de gândirea logică.

Universitatea Spiru Haret

Din teorie a deducţiei, logica modernă tinde să devină teorie a actelor de înţelegere şi mijloc de rezolvare a problemelor, teorie a raporturilor scop-mijloc şi a conduitelor raţionale.

Să ne imaginăm că doi colegi de şcoală, Dan şi Petru, joacă şah. Dan priveşte atent aşezarea figurilor pe tabla de şah. Este rândul lui să facă o mutare. Este încordat; cercetează atent poziţia pieselor adversarului său pe eşichier, explorează ce mutări poate face Petru şi în ce măsură aceste mutări îi pot ameninţa regele, regina, turnurile, ofiţerii şi … prostimea, pionii. În jocul de şah, toţii suntem regalişti, ţinem mult la securitatea regelui nostru. Deodată, Dan se luminează la faţă şi zice:

„- Aha ! Va să zică, asta vrei Dumneata, Musiu. Vrei să-mi dai cu calul şah la rege şi să-mi capturezi tura ! Mai pune-ţi pofta în cui !"

În momentul când a rostit interjecţia „Aha", Dan a descoperit un plan, o intenţie sau un ţel al adversarului său şi a găsit un mijloc de contracarare a planului acestuia. Dan a descoperit o mutare prin care adversarul său, dacă nu ia urgent măsuri, îl poate face să piardă o tură şi pierderea unei piese îţi reduce şansa de a câştiga războiul.

Înţelegerea a fost, în acest caz, descoperirea unui mijloc al cuiva de a-şi atinge un scop care pe tine te defavorizează. *Înţelegerea a fost un act de în-ţel-legare*.

Momentul când s-a produs în mintea lui Dan descoperirea relaţiei scop-mijloc a fost exact clipa când a rostit interjecţia „Aha!" A fost pentru Dan un act de bucurie intelectuală. Ne bucurăm oridecâteori înţelegem soluţia unei probleme, mai mici sau mai mari. Rezolvarea de probleme, în joacă sau în serios, este o sursă de bucurie intelectuală, după cum eşecul de a o rezolva devine o sursă de amărăciune şi frustrare.

Este important aici să observăm că relaţia mijloc-scop descrie în conduitele umane o formă de raţionalitate şi că gândirea logică este implicată major în efortul de descoperire a procedurii sau metodei prin care trecem de la situaţia ipotetică iniţială, în care ne sunt prezentate datele problemei şi întrebarea care descrie scopul ei epistemic, la starea în care am descoperit metoda, procedeul sau algoritmul prin care găsim soluţia problemei.

Orice *problemă* este din punct de vedere epistemic o asociere dintre o bază de cunoştinţe sau datele problemei şi o listă de întrebări sau predicate, precedate de semnul interogaţiei.

A rezolva problema înseamnă a găsi nişte scheme de analiză logică prin care reducem predicatele interogate la datele factuale ale problemei. După ce am săvârşit acest act de reducere analitică nu ne

Universitatea Spiru Haret

mai rămâne decât să refacem drumul invers, prin *modus ponens* sau raționamente progresive de la datele explicite la soluțiile problemei.

Logica a ajuns să se ocupe de reguli şi proceduri, de tehnici şi metode, de raporturile dintre scop şi mijloc, de planuri şi programe, de baze de cunoştințe şi strategii de rezolvare a unor clase de probleme.

A înțelege o problemă înseamnă a afla cum poți reduce răspunsurile la întrebările problemei prin scheme de analiză logică la baza ei de date sau, cum se mai spune astăzi, la baza ei de cunoştințe. Logica devine astăzi profesorul nostru de conduită rațională şi eficientă. O personalitate este cu atât mai puternică cu cât deține mai multe mijloace intelectuale, inclusiv logic-formale, de a prelucra ingenios şi autonom baza de cunoştințe pe care o deține şi se dovedeşte aptă de a descoperi căi originale de a rezolva problemele cu care se confruntă. O personalitate autentică înlocuieşte limbuția cu argumente temeinice şi soluții eficiente.

4. **Acțiunile, comunicarea şi atitudinile propoziționale**

Dacă e să-i dăm crezare dictonului lui Descartes, *Cogito, ergo sum*, subiectul epistemic face şi el parte din realitate şi gândirea individului este un fenomen real. Dar realitatea gândirii este, se pare, ascunsă dincolo de țeastă, în creierul uman şi în structurile neuronale purtătoare de influxuri electrice.

Fiziologii au atestat de mult costurile energetice ale travaliului neuronal. Se fac la nivel mondial cercetări intense în domeniul ştiințelor cognitive şi al modelării prin rețele, atât a unor fenomene la nivel ontic, cât şi a unora de la nivelul activităților cerebrale.

Personal nu cred că putem „citi" din structura şi funcționarea creierului semantica discursului rostit, tot aşa cum nu putem descrie din funcționarea unui televizor succesiunea gesturilor şi actelor de vorbire ale actorilor piesei transmise de pe scena unui teatru, dacă ignorăm ceea *ce* se transmite. Televizorul, ca şi creierul nostru, primeşte informații despre ceea ce se petrece în afara circuitelor sale. El este un decodificator şi recodificator de informație. Şi creierul nostru este un sistem de receptare şi prelucrare a informației. Nu putem ignora nici un moment starea şi evenimentele mediului extern şi conduita intenționată a gânditorului însuşi. Acesta se întreabă ceva, încearcă ceva şi, mai ales, converteşte o parte din cunoaşterea sa senzorial-perceptivă în cunoaştere discursivă, organizată în secvențe de semne ordonate după o gramatică.

Universitatea Spiru Haret

Cunoşti ceva nu când vezi obiectul sau fenomenul, ci când îi descoperi legea după care funcționează.

Cunoaşterea înseamnă înțelegerea obiectelor în contextul lor, captarea legilor şi regulilor după care decurg acestea.

Gândirea logică a individului uman are suport neuro-fiziologic, condiționări şi motivații psihologice, imediate şi îndepărtate şi este permanent legată de activitățile şi de interesele exterioare ale agentului. Nu putem explica logica discursului intern al insului, dacă ignorăm intențiile şi actele individului.

Cuvântul nu stă numai pentru referent sau noțiune, dar şi pentru percepție şi reprezentare. Rostirea unui simbol verbal, de exemplu, a unui nume comun, să spunem 'brad' trimite simultan la referent, la concept, dar şi la imaginea sau percepția unor brazi concreți pe care noi îi avem în fața casei sau i-am văzut luna trecută la Buşteni.

Ca logicieni ne-am ocupat prea puțin de gândirea discursivă la nivelul subiectului uman, de operațiile pe care le desfăşurăm cotidian în intelectul nostru.

Ne-am ocupat prea puțin de ce înseamnă, din punct de vedere logic, a emite o presupunere.

Ce se întâmplă când un matematician spune „Fie A o latice…" sau „Fie K o bază de cunoştințe adusă la forma sa normală conjunctivă." Matematicianul în cauză nu asertează încă nimic în acel caz. El ne invită să ne imaginăm sau să considerăm mental o anumită situație epistemică. Ne propune să fixăm un start al discursului nostru, pentru ca după ce a fixat acest start, să înceapă să aplice anumite operații sau să facă anumite aprecieri despre situația inițială considerată.

Dacă interlocutorul nostru matematician aplică asupra ipotezelor invocate inițial o serie de reguli de inferență în urma cărora ajunge la anumite consecințe derivate, atunci el va putea să constate *post factum* că dacă porneşti de la ipotezele H1,H2, H3, şi aplici la acestea regulile de inferență R1, R2, …, Rn, atunci ajungi la rezultatul C.

Pe baza teoremei deducției, el va putea, mai târziu, să conchidă cu certitudine că:

$\theta \vdash H1 \supset (H2 \supset (H3 \supset C))$

Apreciem că emiterea de ipoteze este o plasare a noastră într-o stare epistemică inițială şi o invitație a noastră să urmărim o tentativă a unui interlocutor. Chiar când nu suntem de față autorul unui articol ni se adresează nouă, celor care îl vom citi. Chiar şi cel mai deprimat poet pesimist scrie, admit, pentru autoclarificare, dar şi pentru un potențial cititor ulterior.

Universitatea Spiru Haret

Asertarea este angajarea unui subiect cunoscător în privinţa conţinutului informaţional şi a valorii de adevăr a unor propoziţii descriptive. Ca şi considerarea, asertarea este o operaţie cognitiv-informaţională. Asertarea este rezultatul unei *evaluări* făcute de subiect şi încunoştinţarea asistenţei că el admite conţinutul informaţional al propoziţiei rostite.

Argumentarea este actul de întemeiere a conţinutului unei aserţiuni pe o mulţime de alte enunţuri factuale şi generice, pe care presupunem că interlocutorul nostru le admite, sau dacă nu, atunci acestea, la rândul lor, vor trebui să fie argumentate. Argumentarea este o operaţie discursivă opusă demonstraţiei. Argumentarea este o înaintare de la concluzie sau teza de apărat către posibilele ei temeiuri. Este, într-un fel, o căutare de premise. Dar nu numai atât. Aceasta se face întotdeauna în faţa unui interlocutor, cu intenţia de a-l convinge de îndreptăţirea punctului nostru de vedere şi de–l face şi pe acesta să-l accepte sau măcar să-l tolereze. Argumentarea este încărcată de conotaţii pragmatice şi acţionale. Argumentarea, spre deosebire de demonstraţie nu e o chestiune academică, de grup, ci ea ţine de teoria comunicării şi de viaţa publică.

Am discutat amplu, în altă parte, *statutul întrebărilor* şi conexiunea acestora cu dialogul şi disputa, precum şi legătura întrebărilor cu bazele de cunoştinţe şi cu rezolvarea de probleme.

Propunerea, *întrebarea*, *sfatul*, *ordinul*, *rugămintea, oferta, decizia* sunt toate acte discursiv intelectuale care angajează teoria actelor de vorbire cu semnificaţie socială şi practică, aspecte care, pe nedrept, au fost neglijate de cercetarea logică.

Logicienii şi filosofii tradiţionalişti vor replica: aceste forme discursive nu interesează logica, deoarece ele nu se ocupă de adevăr şi de fals şi nici de validitate sau invaliditate.

Obiecţia este superficială. Adevărul este o valoare, precum sunt valori şi binele, frumosul, utilul, acceptarea sau respingerea. Am dezvoltat, cu mulţi ani în urmă, o logică trivalentă având ca valori acceptarea, respingerea şi abţinerea. Am revenit asupra logicii acceptării construind o teorie complet diferită de cea anterioară şi cu alte funcţionalităţi.

Analiza pe care am întreprins-o recent nu a mai conectat discursul logic cu actele perceptive şi cu operaţiile conceptuale, ci s-a referit la evaluarea situaţiilor, obiectivelor şi conduitelor, la determinarea atitudinii agenţilor faţă de acestea. Rezultatul analizei ne-a condus la elaborarea unei teorii formale a judecăţilor de valoare, la ceea ce noi am numit logica acceptării.

Universitatea Spiru Haret

Înţelegerea temeinică a atomilor predicativi, ca rezultat ultim al analizelor întreprinse, dă seama de natura conceptelor şi de rolul lor în structurarea grafurilor de conexiuni ce descriu raporturi de dependenţe dintr-un domeniu al realităţii. Relaţiile de similitudine şi izomorfism din mintea noastră, din modelele logice şi din realitatea fizică ne îngăduie să urcăm şi să coborâm pe această scară cu patru trepte. Acesta descrie ceea ce noi numim *mişcarea pe verticală a gândirii.* Cealaltă mişcare, ca să ne exprimăm tot spaţial, ar putea fi numită *înainte* sau *înapoi, progresiv* sau *regresiv*. Spunem că ne mişcăm *progresiv*, când înaintăm de la premise sau axiome către consecinţe mereu mai îndepărtate de acestea. Spunem că ne mişcăm *regresiv,* când, asumându-ne o anumită teză de argumentat, căutăm din aproape în aproape pe ce anume premise imediate se poate întemeia aceasta şi apoi ne întrebăm pe ce alte premise se întemeiază una din premisele anterioare.

Gândirea umană merge, pas cu pas, într-o demonstraţie. Dar poate face şi face adesea salturi spectaculoase la nivelul ipotezelor personale, când îndrăznim să formulăm ipoteze şi construcţii explicative ale unor fapte constatate, dar neacceptate încă de spiritul nostru teoretic.

Conceptul redat logic prin predicatele descrise joacă rolul nucleului neuronal prelungit prin dendrite. Rolul analog dendritelor din teoria impulsurilor pe reţelele neuronale este jucat în ipoteza noastră de argumentele simbolului predicativ. In plus, ne place să amintim că predicatul concept fiind doar o structură de propoziţie unifică prin substituţii instanţiatoare cu „faptele". Aici e legătura dintre cer şi pământ.

Dar după cum vom vedea în alte convorbiri logice teoria reţelelor conceptuale va juca un rol esenţial în alcătuirea arborilor compuşi de derivare şi întemeiere care vor furniza calea sigură de descoperire a tuturor textelor demonstrative pentru anumite teze de demonstrat.

Teoriile logice adaugă la limbajele prezentate anumite axiome sau principii admise, o listă de concepte definite şi o listă de reguli de inferenţe admise în sistem.

Într-o teorie logică bine construită toate axiomele sunt legi logice sau formule adevărate în orice interpretare şi în orice asignare de valori acordată variabilelor individuale.

O teorie ştiinţifică dintr-o ştiinţă empirică porneşte de la enunţuri adevărate într-o anumită semantică şi prin actele inferenţiale, în cazul ei, se conservă veridicitatea (nu validitatea).

O bază de cunoştinţe este un set de cunoştinţe admise cel puţin ipotetic de către agentul epistemic cu scopul de a cerceta dacă din

Universitatea Spiru Haret

aceasta pot fi obținute răspunsuri determinate la un set de întrebări relevante. Bazele de cunoştințe țintesc la rezolvarea computerizată a unor clase de probleme de interes ştiințific sau practic aplicativ.

Ele descriu, într-un fel, cazuri de logică aplicată. Am putea spune că ele sunt logică aplicată în contexte pragmatice.

Dacă mijlocul secolului al XX-lea a marcat un interes sporit pentru semantică şi teoria modelelor, putem spune că sfârşitul acestui secol şi începutul mileniului trei anunță pragmatizarea logicii şi apropierea ei tot mai accentuată de informatică.

Rostul însemnărilor de față a fost dezvăluirea rădăcinilor logicii matematice în analiza discursului din limbile naturale. Operațiile logice n-au fost inventate de logicieni. Ele au fost studiate, înțelese şi smulse din corpul limbilor naturale, interconectate, puse la un loc în teorii coerente şi funcționale.

Înțelegerea legăturilor dintre cele patru niveluri ne îngăduie o viziune unitară asupra formalizării, interpretării şi modelării ca tranziții dintre niveluri. Abstractizarea şi determinarea sunt tranziții între nivelurile la care sunt reprezentate cunoştințele umane. *Abstractizarea* efectuată de o formalizare inspirată lasă de o parte multe aspecte ale limbajului şi experienței comune, operează selecții şi distilări conceptuale, asigură rigoarea şi controlul semnificațiilor şi, mai ales, transformă limbajul formal într-o rețea conceptuală ce facilitează deopotrivă înțele-gerea şi calculul.

Determinarea este o coborâre la concret. O teorie eficace acoperă şi controlează un câmp de fapte, explică, prevede şi determină calitativ şi cantitativ clase de evenimente şi acțiuni, deschide piste noi pentru activitățile umane. Sub raport semantic, determinarea se obține prin operația de interpretate. După cum am văzut din semantica logicii predicatelor, interpretarea înseamnă raportarea alfabetului primitiv al unui limbaj logic la un domeniu de interpretare, la o mulțime de obiecte pe care se proiectează structura atomilor şi, după ea, prin inducție, structura formulelor atomare, definiția cuantificatorilor, a noțiunilor de propoziție adevărată, de formulă sau bază de cunoştințe realizabilă sau cu cel puțin o interpretare care o face adevărată. Relația de consecință logică semantică are şi ea o concretizare la un model. Numai necunoscătorii logicii îi reproşează acesteia caracterul abstract, speculativ. Logica se înalță la abstracțiuni pentru a putea capta structurile în toată puritatea lor, căci sus în munți e aerul ozonat şi de acolo vedem dealurile, câmpia şi marea. Dar, de la o înălțime mare, poți ateriza, prin interpretare, pe o mulțime de teritorii concrete care satisfac nişte exigențe structural-sintactice.

Universitatea Spiru Haret

Sub raport sintactic, determinarea se realizează prin substituție. Putem substitui o variabilă printr-o altă variabilă şi, în acest caz, rămânem la acelaşi grad de abstractizare. Putem aplica substituții într-o formulă care să amplifice gradul de complexitate al unei formule. Astfel, putem trece, prin substituție, de la formule de logica propozițiilor, la formule de logica predicatelor. A se vedea în acest sens regula s1 din capitolul despre axiomatizarea logicii predicatelor. Dar putem accede prin substituție de la o formulă abstractă la una concretă sau de instanțiere. Înlocuirea variabilelor individuale prin constante individuale este o formă de a coborî de la abstract la concret.

Dar orice teorie are şi o valoare *descriptivă* şi este totodată o cale de standardizare şi uniformizare a limbajului unei teorii sau măcar a unor „dialecte" vorbite în acea teorie. Teoriile sunt, totodată, *forme de comunicare* şi răspândire a unor informații. Toate teoriile sunt inițial idiolecte sau dialecte. Pe măsură ce i se recunoaşte unei teorii puterea explicativă, predictivă şi, mai ales, practic aplicativă, teoria devine un limbaj admis de comunitatea ştiințifică națională şi internațională. Orice teorie este într-un fel logică aplicată la un grup de concepte primitive prinse în postulatele sau axiomele acelei teorii. Omul de ştiință, ca şi logicianul, gândeşte frecvent la mai multe niveluri. Se află în timp, în etape sau momente diferite, pe paliere diferite ale nivelurilor şi formelor de reprezentare a datelor unei probleme.

La fel voi admite că logica se manifestă la nivelul discursului oral viu, la nivelul discursului personal scris, la nivelul structurilor inferențiale obiectivate în limbile naturale, la nivelul întemeierii deciziilor şi planurilor noastre, la nivelul structurilor din limbajele teoriilor logice de ordinul întâi şi de ordine superioare sau că logica este uneori încapsulată în discursul ermetic al unei metateorii.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 2. **AXIOMATIZAREA LOGICII PROPOZIŢIILOR**

1. **Introducere**

Tratarea axiomatică a logicii a fost multă vreme o aspiraţie a filosofilor. Leibniz a fost, între filosofii din epoca modernă, unul care a ţinut treaz acest ideal.

Dar, cel care a realizat, pentru prima dată acest ideal a fost matematicianul german Gottlob Frege, în lucrarea sa *Begrifschrift (*1879). Scrierea simbolică creată de Frege a însemnat de fapt crearea limbajelor logicii propoziţiilor şi logicii predicatelor şi, totodată, crearea primului sistem axiomatic de logică matematică. Dar simbolismul lui Frege, destul de greoi, nu s-a impus. Este meritul lui Alfred Whitehead şi al lui Bertrand Russell, autorii lucrării *Principia Mathematica* (1910-1913) de a fi construit prima versiune unitară a logicii matematice şi de a fi evitat paradoxele ivite în versiunea iniţială creată de către Gottlob Frege. Totodată, ei au propus un simbolism mai lesnicios, care se menţine în caracteristicile sale de bază şi în literatura logico-matematică actuală.

Sistemul axiomatic din *Principia Mathematica* a fost ulterior perfecţionat de către David Hilbert, W. Ackermann şi Paul Bernays, care au arătat că sistemul axiomatic din *Principia* nu este independent, axioma asociativităţii disjuncţiei putând fi demonstrată cu mijloacele sistemului din celelalte axiome.

În cele ce urmează vom ilustra, mai întâi, axiomatizarea logicii propoziţiilor prin prezentarea sistemului Hilbert Ackermann. Totodată, vom cerceta proprietăţile metateoretice ale sistemelor axiomatice: noncontradicţia, completitudinea şi independenţa. Vom introduce apoi sistemul axiomatic P2 al lui Alonzo Church, arătând că acestea sunt deductiv echivalente. Vom încheia prin a enumera alte câteva versiuni ale axiomatizării logicii propoziţiilor.

O caracteristică a axiomatizărilor din logica propoziţiilor este caracterul lor formal. În fapt avem de a face cu o îmbinare specifică a două metode, a metodei axiomatice cu metoda formală. Este util însă să arătăm că metoda axiomatică poate fi utilizată şi în cadrul limba-

Universitatea Spiru Haret

jelor naturale sau „intuitive" ale diferitelor discipline ştiinţifice şi, invers, metoda formală poate fi dezvoltată distinct de metoda axiomatică. Gramaticile generative şi cele analitice sunt modalităţi clasice de construire şi analiză a limbajelor formale. Am cercetat anterior (1992) posibilitatea definirii limbajului formal al logicii predicatelor cu ajutorul unei gramatici generative [65, 221-231]

2. **Sistemul Hilbert Ackermann**

Principalele momente ale introducerii unui sistem formal axiomatic pentru o teorie logica sunt: l. definirea alfabetului sau a vocabularului limbajului; 2. prezentarea regulilor de formare a formulelor sau cuvintelor admise în limbaj; 3. introducerea definiţiilor sau a regulilor de prescurtare; 4. enunţarea axiomelor sau a formulelor admise iniţial; 5. prezentarea regulilor de inferenţă sau a regulilor de derivare a formulelor valide şi, în sfârşit, 6. demonstrarea teoremelor. Cercetarea ulterioară ne va conduce la cercetarea proprietăţilor metateoretice ale sistemelor axiomatice pentru logica propoziţiilor sau ale altor sisteme logice: noncontradicţia, completitudinea, independenţa etc.

2.1. *Vocabularul*

Vocabularul sau alfabetul limbajului formal al sistemului axiomatic Hilbert Ackermann este:

A = {p, q, r, …, p1, p2, …,-, ∨ , (,)}

unde p, q, …p1 …, sunt variabile propoziţionale, „-" este semnul negaţiei şi „∨" este semnul disjuncţiei. „-" desemnează o operaţie monadică iar „∨" desemnează o operaţie binară.

Semnele „(" şi „)" sunt semne de grupare.

Alfabetul conţine, aşadar, variabile propoziţionale, conective logice şi semne de grupare.

Singurele conective logice *primitive* sunt negaţia, - şi disjuncţia, ∨. Alte conective logice vor putea fi introduse prin definiţie.

2.2. *Regulile de formare*

Regulile de formare definesc inductiv conceptul de *formulă* sau de cuvânt bine format.

a. Dacă α este o variabilă propoziţională, atunci α este o formulă.

b. Dacă α este o formula, atunci -α este şi ea formulă.

c. Dacă α şi β sunt formule, atunci α ∨ β va fi o formulă.

Universitatea Spiru Haret

Regulile de formare sunt instrumente de *construire* a formulelor complexe din formulele elementare. Ele agregă elementele vocabularului în ansambluri semiotico-sintactice.

2.3. *Definiţii*

2.3.1. $p \wedge q := - (- p \vee - q)$
2.3.2. $p \supset q := - p \vee q$
2.3.3. $p \equiv q := (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

Prin „:=“ am notat „egalitatea prin definiţie” sau echivalenta de denotat. Strict sintactic „:=“ desemnează posibilitatea substituirii expresiei din stânga prin cea din dreapta şi invers.

2.3.l. – 2.3.3. introduc în calitate de concepte derivate conjuncţia, implicaţia materială şi echivalenţa.

2.4. *Axiome*

2.4.1. $(p \vee p) \supset p$
2.4.2. $p \supset (p \vee q)$
2.4.3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
2.4.4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

Axiomele caracterizează proprietăţile disjuncţiei. Prima este o lege de idempotenţă, şi a doua, o lege de extindere a disjuncţiei, a treia o lege de comutativitate, iar, ultima, o lege de expandare a implicaţiei.

2.5. *Reguli de inferenţă*

2.5.l. *Regula substituţiei* Dacă A este o teoremă din limbajul sistemului axiomatic în care apare variabila p şi B este o formulă bine formată în acest limbaj, atunci dacă substituim fiecare apariţie a lui p în A prin B obţinem o formulă A’, de asemenea teoremă. Cu alte cuvinte, substituţia uniformă conservă adevărul şi validitatea. Vom nota substituţia variabilei p prin B prin p/B.

2.5.2. *Modus ponens* Dacă $A \supset B$ este teoremă şi A este teoremă, atunci şi B este teoremă.

Prescurtat: $\vdash (A \supset B)$

$\vdash A$

$\vdash B$

2.5. 3. *Regula substituirii echivalentelor.* Dacă A este o axiomă în care apare subformula B şi $B \equiv C$ este o definiţie sau o teoremă anterior demonstrată, atunci este teoremă formula obţinută din A prin substituirea lui B prin echivalenta sa C.

Universitatea Spiru Haret

Vom numi *teoreme* formulele bine formate ce sunt axiome în sistem sau sunt obținute din axiome sau teoreme anterior demonstrate cu ajutorul regulilor de inferență.

Sistemele axiomatice sunt mecanisme generative care degajează din axiome consecințe directe sau mai îndepărtate cu ajutorul regulilor de inferență, care funcționează ca reguli de rescriere pentru formulele „selectate" sau teoreme.

2.6. *Teoreme*

T1 $(p \supset q) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset q))$

1) $(p \supset q) \supset ((- r \vee p) \supset (- r \vee q))$ (RS, 2.4.4., r/ - r)
2) $(p \supset q) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset p))$ (RE, 1), 2.3.2)

T2 $p \supset p$

1) $((p \vee p) \supset p) \supset ((p \supset (p \vee p)) \supset (p \supset p))$ (RS, T1, p/p ∨ p,q/p, r/p)
2) $(p \supset (p \vee p)) \supset (p \supset p)$ (MP, 1), 2.4.1)
3) $(p \supset (p \vee p)$ (RS, 2.4.2. q/p)
4) $p \supset p$ (MP, 2),3))

T3 $- p \vee p$ (RE, T2)

T4 $p \vee - p$

1) $(- p \vee p) \supset (p \vee - p)$ (RS, 2.4.3.,p/-p, q/p)
2) $p \vee - p$ (MP, 1), T3)

T5 $p \supset - - p$

1) $– p \vee - - p$ (RS, T4, p/ - p)
2) $p \supset - - p$ (RE, l), 2.3.2.)

T6 $- - p \supset p$

1) $– p \supset - - - p$ (RS, T5, p/- p)
2) $(- p \supset - - - p) \supset ((p \vee - p) \supset (p \vee - - - p))$ (RS, 2.4.4., p/- p, q/- - - p, r/ p)
3) $(p \vee - p) \supset (p \vee - - - p)$ (MP, 2), l))
4) $p \vee - - - p$ (MP, 3), T4))
5) $(p \vee - - - p) \supset (- - - p \vee p)$ (RS, 2.4.3., q/ - - - p)
6) $- - - p \vee p$ (MP, 5), 4))
7) $- - p \supset p$ (RE, 6), 2.3.2.)

Universitatea Spiru Haret

T7 $(p \supset q) \rightarrow (- q \supset - p)$

1) $q \supset - - q$	(RS, T5, p/ q)
2) $(q \supset - - q) \supset ((- p \vee q) \supset (- p \vee - - q))$	(RS, 2.4.4.)
3) $(- p \vee q) \supset (- p \vee - - q)$	(MP, 2), 1))
4) $(- p \vee - - q) \supset (- - q \vee - p)$	(RS, 2.4.3)
5) $(- p \vee q) \supset (- - q \vee - p)$	(T1, 3), 4))
6) $(p \supset q) \supset (- q \supset - p)$	(RE, 5), 2.3.2.)

T8 $(- p \supset p) \supset p$ (RE, 2.4.1., 2.3.2.)

T9 $p \supset (q \supset p)$

1) $p \supset (p \vee q)$	(2.4.2.)
2) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$	(2.4.3.)
3) $p \supset (q \vee p)$	(T1, 1), 2))
4) $p \supset (- q \vee p)$	(RS, 3))
5) $p \supset (q \supset p)$	(RE, 4), 2.3.2)

T10 $– (p \wedge q) \supset - p \vee - q$

1) $- - (- p \vee - q) \supset (- p \vee - q)$	(RS, T6)
2) $– (p \wedge q) \supset (- p \vee - q)$	(RE, 1), 2.3.1.))

T11 $(- p \vee - q) \supset - (p \wedge q)$

1) $(- p \vee - q) \supset - - (- p \vee - q)$	(RS, T5)
2) $(- p \vee - q) \supset - (p \,\&\, q)$	(RE, l), 2.3.1.))

Observaţii

Pentru fiecare teoremă se construieşte un text *demonstrativ*, i.e. o secvenţă de formule numerotate 1), 2)… n), care începe cu o axiomă sau cu o teoremă anterior demonstrată şi se termină cu teorema de demonstrat. Trecerea de la o formulă la succesoarea sa se face prin aplicarea unei reguli de inferenţă şi reprezintă un pas în demonstraţie. Numărul paşilor descrie *lungimea* textului demonstrativ. În partea dreaptă a fiecărui pas am specificat regulile de inferenţă aplicate şi formula la care se aplică. Pentru primele şase teoreme am specificat şi ce anume substituţii am efectuat. Ulterior, am consemnat numai legea logică sau teorema la care se aplică regula substituţiei, fără a mai preciza ce anume substituţie am efectuat.

Universitatea Spiru Haret

Prima teoremă este o formă a principiului tranzitivității. Teorema T2 este principiul identității. Teoremele T3 şi T4 sunt forme ale terţului exclus. Teoremele T5 şi T6 sunt legi ale dublei negații. Teorema T7 este legea contrapoziției. În demonstrarea ei s-a utilizat principiul tranzitivității (vezi 3) – 5)).

Strict formal ar fi trebuit să substituim în T1 p/ - p $\vee$ - - q, q/ - - q $\vee$ - p, r/ - p $\vee$ q şi apoi să aplicăm de două ori *Modus Ponens*, prima data cu 4) şi a doua oră cu 3) pentru a obține pe 5), de unde, prin regula extensionalității, să obținem T7.

T8 este un principiu al reducerii la absurd, iar T9 este legea după care „adevărul decurge din orice" (Verum sequitur ad quod libet). T10 şi T11 sunt două dintre legile lui De Morgan.

Până acum fiecare teoremă a fost demonstrată utilizând în exclusivitate doar cele trei reguli de inferență date inițial în sistem. Putem însă spori ritmul producerii teoremelor şi reduce numărul paşilor în demonstrații, prin demonstrarea în sistem a unor scheme de inferență derivate. Mai întâi, fiecărei dintre axiome îi corespunde o regulă de inferență .

De exemplu, regulile de inferență:

$$(\mathrm{I})\ \frac{\vdash A \vee A}{\vdash A} \qquad (\mathrm{I}\vee)\ \frac{\vdash A}{\vdash A \vee B} \qquad (\mathrm{C})\ \frac{\vdash A \vee B}{\vdash B \vee A} \qquad (\mathrm{ED})\ \frac{\vdash A \supset B}{\vdash (C \vee A) \supset (C \vee B)}$$

corespund axiomelor 2.4.1-2.4.4. Ele se obțin din acestea prin admiterea ipotetică a antecedentului şi prin *Modus Ponens*.

În mod asemănător, putem scrie, ca regulă de inferență, principiul tranzitivității (vezi T1):

1) $p \supset q$	ipoteză
2) $r \supset p$	ipoteză
3) $(r \supset p) \supset (r \supset q)$	(MP,T1, 1))
4) $r \supset q$	(MP, 3), 2))

De unde, prin inversarea ordinii celor două ipoteze, substituție şi scrierea cu majuscule doar a ipotezelor şi a concluziei, obținem schema:

$$\frac{\vdash A \supset B \qquad \vdash B \supset C}{\vdash A \supset C}$$

Universitatea Spiru Haret

Teorema T7 generează schema de inferenţă:

(CP) $\vdash \underline{A \supset B}$

$\vdash -B \supset - A$

prin simpla utilizare a regulilor MP şi RS.

Regula substituirii echivalentelor, RE, poate fi demonstrată şi ea. Formularea ei este „Dacă într-o formulă *F* apare o subformulă *A* i.e. *F(A)* şi $A \equiv B$, atunci $F(A) \equiv F(B)$. Cu alte cuvinte, substituind într-o formulă un termen al unei echivalenţe prin celălalt termen, formula nu-şi schimbă valoarea de adevăr.

Demonstraţie:

Considerăm, mai întâi, că în F apare o singură dată termenul *A* al unei echivalenţe. Sunt posibile trei cazuri:

I $F(A) = - A$

II $F(A) = A \vee C$

III $F(A) = C \vee A$.

Demonstrăm regula RE pentru fiecare dintre cazuri:

Caz I, $F(A) = - A$:

$\vdash - A$

$\vdash \underline{A \equiv B}$

$\vdash -B$

Demonstraţie:

1) –A	ip.
2) $A \equiv B$	ip.
3) $A \supset B$	(RE, 2.3.3)
4) $B \supset A$	(RE, 2.3.3)
5) $- B \supset - A$	(CP, 3))
6) $-A \supset -B$	(CP, 4))
7) $- A \equiv - B$	(RE, 2.3.3)
8) - B	(MP, 7), 1))

Cazul II, $F(A) = A \vee C$:

$\vdash A \vee C$

$\vdash \underline{A \equiv B}$

$\vdash B \vee C$

Demonstrație:

1) $A \vee C$	ip.
2) $A \equiv B$	ip.
3) $A \supset B$	(RE, 2))
4) $B \supset A$	(RE, 2))
5) $(A \vee C) \supset (C \vee A)$	(C)
6) $(C \vee A) \supset (C \vee B)$	(ED, 3)
7) $(C \vee B) \supset (B \vee C)$	(C)
8) $(A \vee C) \supset (B \vee C)$	(T,5),6),7))
9) $(C \vee B) \supset (C \vee A)$	(ED,4))
10) $(B \vee C) \supset (C \vee B)$	(C)
11) $(B \vee C) \supset (C \vee A)$	(T,10, 9))
12) $(C \vee A) \supset (A \vee C)$	(C)
13) $(B \vee C) \supset (A \vee C)$	(T,11),12))
14) $(A \vee C) \equiv (B \vee C)$	(RE,8), 13))
15) $B \vee C$	(MP, 14), 1))

Cazul III, $F(A) = C \vee A$:

$\vdash C \vee A$

$\vdash \underline{A \equiv B}$

$\vdash C \vee B$

Demonstrația cazului III se reduce la demonstrația cazului II. Într-adevăr, din $C \vee A$ şi axioma 2.4.3 obținem, prin regula substituției şi *Modus Ponens*, $A \vee C$.

1) $C \vee A$	ip.
2) $A \equiv B$	ip.
3) $(C \vee A) \supset (A \vee C)$	(RS, 2.4.3.p/C, q/A)
4) $A \vee C$	(MP, 3), 1))

Utilizând, în continuare, unele scheme de inferență derivate putem trece la demonstrarea unor teoreme mai complicate. Vom demonstra în continuare teorema asociativității disjuncției admisă în *Principia Mathematica* de A.N. Whitehead şi Bertrand Russell ca axiomă. Demonstrarea acestei teoreme de către P. Bernays a echivalat cu dovedirea neindependenței sistemului axiomatic al logicii propozițiilor din *Principia*.

Universitatea Spiru Haret

T12 $p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee q) \vee r)$

1) $p \supset (p \vee q)$	(2.4.2)
2) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$	(2.4.3)
3) $p \supset (q \vee p)$	(T, 1), 2))
4) $r \supset (p \vee r)$	(RS, 3))
5) $(q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$	(ED,4))
6) $p \vee (q \vee r) \supset p \vee (q \vee (p \vee r))$	(ED ,5)
7) $p \vee (q \vee (p \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r)) \vee p$	(C)
8) $p \supset (p \vee r)$	(RS ,1))
9) $(p \vee r) \supset (r \vee p)$	(RS, 2.4.3)
10) $p \supset (r \vee p)$	(T,8),9))
11) $(p \vee r) \supset (q \vee (p \vee r))$	(RS, 10)
12) $p \supset (q \vee (p \vee r))$	(T,8),11))
13) $(q \vee (p \vee r)) \vee p \supset (q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))$	(ED,12)
14) $(q \vee (p \vee r)) \vee p \supset (q \vee (p \vee r))$	(T,1,13)
15) $(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$	(T,6), 7),14))
16) $(q \vee r) \supset (r \vee q)$	(RS, 2.4.3)
17) $(p \vee (q \vee r)) \supset (p \vee (r \vee q))$	(E (D,16))
18) $(p \vee (r \vee q)) \supset (r \vee (p \vee q))$	(RS, 15)
19) $(r \vee (p \vee q)) \supset (p \vee q) \vee r)$	(RS, 2.4.3)
20) $(p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee q) \vee r)$	(T,17),18),19))

De fapt, P. Bernays a demonstrat formula scrisă la pasul 15) care apărea ca axiomă în *Principia*. Hilbert şi Ackermann au demonstrat teoremele care în ordinea noastră apar ca T12 şi T13.

T13 $((p \vee q) \vee r) \supset (p \vee (q \vee r))$

1) $(r \vee (q \vee p)) \supset ((r \vee q) \vee p)$	(RS, T12, p/r, r/p)
2) $(r \vee (q \vee p)) \equiv ((q \vee p) \vee r)$	ip.
3) $(r \vee q) \vee p) \equiv (p \vee (r \vee q))$	ip.
4) $((q \vee p) \vee r \supset (p \vee (r \vee q))$	(RE, 1),2,),3)
5) $(r \vee q) \equiv (q \vee r)$	ip.
6) $(q \vee p) \equiv (p \vee q)$	ip.
7) $((p \vee q) \vee r) \supset (p \vee (q \vee r))$	(RE, 4), 5),6)

T14 $p \supset (q \supset (p \wedge q))$

1) $(\sim p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \vee \sim q))$ (RS, T4, p/-p ∨ -q)
2) $(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim (\sim p \vee \sim q)) \rightarrow \sim p \vee (q \vee \sim (\sim p \vee \sim q))$
(RS, T13, p/ ~p, q/ ~q, r/ ~(~p ∨ ~q))
3) $\sim p \vee (\sim q \vee \sim (\sim p \vee \sim q))$
4) $p \supset (q \supset (p \ \& \ q))$ (RE, 3),2.3.2, 2.3.1)

T15 $p \equiv \sim\sim p$ (RS, T14),MP, T5,T6)

T16 $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (RS, T14, MP,T10, T11)

T17 $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (RS, T14, MP, T12, T13)

Pe baza lui T17 obținem regulile de inferență ale asociativității disjuncției:

(AD) $\dfrac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$, $\dfrac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$

T18 $\sim (p \vee q) \supset (\sim p \vee \sim q)$

1) $\sim p \supset \sim\sim\sim p$ (RS, T5, p/ ~p)
2) $\sim (p \vee q) \supset \sim\sim\sim (p \vee q)$ (RS, 1), p/p ∨ q)
3) $\sim (p \vee q) \supset \sim\sim\sim (\sim\sim p \vee \sim\sim q)$ (RE, 2), T15)
4) $\sim (p \vee q) \supset \sim\sim (\sim p \wedge q)$ (RE, 3), 2.3.1)
5) $\sim (p \vee q) \supset (\sim p \wedge \sim q)$ (RE, 4), T15))

T19 $(\sim p \wedge \sim q) \supset \sim (p \vee q)$

1) $\sim\sim\sim p \vee \sim q$ (RS,T6, p/ ~p)
2) $\sim\sim\sim (p \vee q) \supset \sim (p \vee q)$ (RS, 1), p/p ∨ q)
3) $\sim\sim\sim (\sim\sim p \vee \sim\sim q) \supset \sim (p \vee q)$ (RE, 2), T15))
4) $\sim\sim (\sim p \wedge \sim q) \supset \sim (p \vee q) \supset \sim (p \vee q)$ (RE, 3), 3.3.1)
5) $(\sim p \wedge \sim q) \supset \sim (p \vee q)$ (RE, 4), T15)

T20 $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ (RS, T14, MP, T17, T18)

T16 şi T20 sunt legile lui De Morgan. Demonstrarea lor se sprijină, între altele, pe T14.

Din T14 se poate introduce ca regula de inferență derivată, regula introducerii conjuncției.

(I∧) $\dfrac{\vdash A \quad \vdash B}{\vdash A \wedge B}$

T21 $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

1) $(\sim p \vee \sim q) \supset (\sim q \vee \sim p)$ (RS, 2.4.3)
2) $(\sim p \vee \sim q) \supset (\sim q \vee \sim p) \supset \sim (\sim q \vee \sim p) \supset \sim (\sim p \vee \sim q)$ (RS, T7)
3) $\sim (\sim q \vee \sim p) \supset \sim (\sim p \vee \sim q)$ (MP, 2), 1))
4) $(q \wedge p) \supset (p \wedge q)$ (RE, 3), 2.3.1)
5) $(p \wedge q) \supset (q \wedge p)$ (RS, 4), p/q, q/p))

Prin RS putem lesne obţine $(q \wedge p) \rightarrow (p \wedge q)$, iar de aici, prin utilizarea lui T14, obţinem:

T22 $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

Pe baza lui T22 se obţine regula de inferenţă:

(CC) $\vdash \underline{A \wedge B}$

$\vdash B \wedge A$

T23 $(p \wedge q) \supset p$

1) $\sim p \supset (\sim p \vee \sim q)$ (RS, 2.4.2)
2) $(\sim p \supset (\sim p \vee \sim q)) \supset (\sim (\sim p \vee \sim q) \supset \sim\sim p$ (RS, T7)
3) $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset \sim\sim p$ (MP, 2), 1))
4) $(p \wedge q) \supset p$ (RE, 3), 2.3.1, T15))

Utilizând T7, putem obţine regula derivată:

(TE) $\vdash \underline{A \equiv B}$

$\vdash \sim A \equiv \sim B$

Într-adevăr:

1) $p \equiv q$ ip.
2) $p \supset q$ (RE, 1), 2.3.3))
3) $q \supset p$ (idem)
4) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ (T7)
5) $(q \supset p) \supset (\sim p \supset \sim q)$ (RS, 4))
6) $\sim q \supset \sim p$ (MP, 4), 2))
7) $\sim p \supset \sim q$ (MP, 5), 3))
8) $(\sim p \supset \sim q)$ & $(\sim q \supset \sim p)$ (I & 6), 7))
9) $\sim p \equiv \sim q$ (RE, 6), 2.3.3))

Reguli de inferenţă vor fi asociate şi legilor lui De Morgan demonstrate anterior (vezi T16 şi T20):

(DM1) $\underline{\sim(A \wedge B)}$ $\sim A \vee \sim B$ (DM 2) $\underline{\sim(A \vee B)}$ $\sim A \wedge \sim B$

(DM 3) $\underline{\sim (\sim A \wedge \sim B)}$ $A \vee B$ (DM 4) $\underline{\sim(\sim A \vee \sim B)}$ $A \wedge B$

Pe baza regulii TE şi a legilor lui De Morgan putem demonstra:

T24 $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$

1) $(\sim p \vee (\sim q \vee \sim r)) \equiv ((\sim p \vee \sim q) \vee \sim r)$ (RS, T17)
2) $\sim(p \vee (\sim q \vee \sim r)) \equiv ((\sim q \vee \sim q) \vee \sim r)$ (TE, 1)
3) $(p \wedge \sim(\sim q \vee \sim r)) \equiv (\sim (\sim p \vee \sim q) \wedge r))$ (DM, 2)
4) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (DM ,3)

Putem uşor demonstra alte reguli de inferenţă derivate: comutativitatea antecedenţilor implicaţiei şi regulile importaţiei şi exportaţiei:

(CA) $\dfrac{A \supset (B \supset C)}{B \supset (A \supset C)}$ (IM) $\dfrac{A \supset (B \supset C)}{(A \wedge B) \supset C}$ (EX) $\dfrac{(A \wedge B) \supset C}{A \supset (B \supset C)}$

1) $p \supset (q \supset r)$	ip.
2) $\sim p \vee (\sim q \vee r)$	(RE, 2, 3.2.1)
3) $(\sim q \vee r) \vee \sim p$	(CD comut. disj. T12, T13)
4) $\sim q \vee (r \vee \sim p)$	(AD, 3)
5) $(\sim q \vee (\sim p \vee r))$	(RE, C)
6) $q \supset (p \supset r)$	(RE, Def.2.3.2, 5)

(IM)

1) $p \supset (q \supset r)$	ip.
2) $\sim p \vee (\sim q \vee r)$	(RE, 1)
3) $(\sim p \vee \sim q) \vee r$	(AD, 2)
4) $\sim(p \wedge q) \vee r$	(RE, 3)
5) $(p \wedge q) \supset r$	(RE, 4)

(EX)

1) $p \wedge q \supset r$	ip.
2) $\sim (p \wedge q) \vee r$	(RE, 1)
3) $(\sim p \vee \sim q) \vee r$	(DM, 2)
4) $(\sim p \vee (\sim q \vee r))$	(AD, 3)
5) $p \supset (q \supset r)$	(RE, 4)

Pe baza asociativităţii disjuncţiei pot fi obţinute regulile iterării antecedentului:

(IA) $\dfrac{A \supset (A \supset B)}{A \supset B}$ $\qquad$ $\dfrac{A \supset B}{A \supset (A \supset B)}$

1) $A \supset (A \supset B)$	ip.
2) $- A \vee (- A \vee B)$	(RE, 1)
3) $(- A \vee - A) \vee B$	(AD, 2)
4) $- A \vee B$	(I, 2)
5) $A \supset B$	(RE, 4)

Pentru demonstrarea celei de a doua reguli se parcurg paşii în sens invers. Demonstrăm, în continuare, o teoremă de distributivitate.

T25 $(p \vee (q \wedge r)) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

1) $(q \wedge r) \supset q$	(RS, T22,p/q, q/r)
2) $p \vee (q \wedge r) \supset (p \vee q)$	(ED, 1))
3) $(q \wedge r) \supset r$	(RS, T22, C)
4) $p \vee (q \wedge r) \supset (p \vee r)$	(ED, 3)
5) $p \vee q) \supset ((p \vee r) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$	(RS, T14)
6) $(p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee r) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$	(T, 2), 5))
7) $(p \vee r) \supset ((p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$	(CA, 6)
8) $(p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee (q \vee r) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	(T, 4), 7))
9) $(p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	(IA, 8))

Am obţinut întâi 2) şi 4 din 1) şi respectiv din 3) prin regula de derivare asociată axiomei 2.4.4. Pasul 5) este o utilizare a lui T14 pentru consecvenţii lui 2) şi 4). 6) este o aplicare a principiului tranzitivităţii la 2) şi 5). 7) este o aplicare a comutativităţii antecedenţilor la 6), iar 8), din nou, o aplicare a tranzitivităţii. 9) este o aplicare a regulii iterării antecedentului, IA.

Conversa lui T25 se întemeiază pe T14 şi axioma 2.4.4 şi presupune aplicarea, de două ori, a principiului tranzitivităţii T, a regulii asociativităţii disjuncţiei AD şi a principiilor idempotenţei disjuncţiei ID, comutativităţii antecedenţilor şi, în sfârşit, a legii importaţiei, IM.

T26 $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (p \vee (q \wedge r))$

1) $q \supset (r \supset (q \wedge r))$ (RS, T14, p/q, q/r)
2) $(r \supset (q \wedge r)) \supset ((p \vee r) \supset (p \vee (q \wedge r)))$ (RS, Ax 2.4.4)
3) $q \supset ((p \vee r) \supset (p \vee (q \wedge r)))$ (T, 1), 2))
4) $(p \vee r) \supset (q \vee (p \vee (q \wedge r))$ (CA, 3)
5) $(q \supset (p \vee (q \wedge r))) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee (p \vee (q \vee r))))$ (RS, 2.4.4, p/q, q/p ∨ (q & r, r/p)
6) $(p \vee r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee (p \vee (q \wedge r))))$ (T, 4), 5))
7) $(p \vee r) \supset ((p \vee q) \supset ((p \vee p) \vee (q \wedge r)))$ (AD, 6)
8) $(p \vee r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee (q \wedge r)))$ (ID, 7)
9) $(p \vee q) \supset ((p \vee r) \supset (p \vee (q \wedge r))$ (CA, 8)
10) $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \supset (p \vee (q \wedge r))$ (IM, 9)

Din T25 şi T26 rezultă prin T14 şi RE:

T27 $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Duala lui T27 i.e. legea distributivităţii conjuncţiei faţă de disjuncţie se obţine din T27 prin regula TE şi legile lui De Morgan:

T28 $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1) $(- p \vee (- q \wedge - r)) \equiv ((- p \vee - q) \wedge (- p \vee - r))$ (RS, T27)
2) $-(- p \vee (- q \wedge - r)) \equiv -((-p \vee - q) \wedge (- p \vee - r))$ (TE, 1)
3) $(p \wedge - (- q \wedge - r)) \equiv (- (- p \vee - q) \vee - (- p \vee - r))$ (DM, 2)
4) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (DM, 3), T15)

Ambele legi de distributivitate generează reguli de inferenţă corespunzătoare:

(D1) $\dfrac{A \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$ (D2) $\dfrac{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}{A \vee (B \wedge C)}$

(D3) $\dfrac{A \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$ (D4) $\dfrac{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{A \wedge (B \vee C)}$

Universitatea Spiru Haret

D1 şi D3 sunt legi de analiză sau expandare, iar D2 şi D4 sunt legi contracție sau sinteză.

T29 $q \supset (- p \vee p)$

1) $q \supset (p \supset p)$ (CA,T9)
2) $q \supset (- p \vee p)$ (RE, 1), 2.3.2))

T30 $(- p \vee p) \equiv (- p \vee p \vee r)$

1) $(-p \vee p) \supset ((-p \vee p) \vee r)$ (RS, 2.4.2)
2) $(-p \vee p) \supset (-p \vee p \vee r)$ (AD, 1)
3) $p \supset (p \vee r)$ (RS, 2.4.2)
4) $–p \vee (p \vee r)$ (RE, 3), 2.3.2))
5) $–p \vee p \vee r$ (AD, 4)
6) $p \supset (q \supset (p \supset q))$ (EX, T14)
7) $(-p \vee p \vee r) \supset ((-p \vee p)) \supset ((-p \vee p \vee r) \supset (-p \vee p)))$ (RS, 6)
8) $(-p \vee p) \supset (-p \vee p \vee r) \supset (-p \vee p))$ (MP, 7), 5))
9) $(-p \vee p \vee r) \supset (-p \vee p)$ (MP, 8), 9))
10) $(-p \vee p) \equiv (-p \vee p \vee r)$ (ER, 2), 9))

T31 $(q \wedge (-p \vee p)) \equiv q$

1) $q \vee -q$ (RS, T4)
2) $(q \vee -q) \supset ((q \vee -q) \vee -(-p \vee p))$ (RS, 2.4.2)
3) $(q \vee -q) \vee - (p \vee p)$ (MP, 2), 1))
4) $(-q \vee q) \vee - (-p \vee p)$ (C, 3)
5) $–q \vee (q \vee - (-p \vee p))$ (AD, 4)
6) $–q \vee (- (-p \vee p) \vee q$ (C, 5)
7) $(-q \vee - (-p \vee p)) \vee q$ (AD, 6)
8) $–(q \wedge (-p \vee p)) \vee q$ (DM, 7)
9) $(q \wedge (-p \vee p)) \supset q$ (RE, 8), 2.3.2))
10) $(-p \vee p) \supset ((-p \vee p) \vee -q)$ (RS, 2.4.2)
11) $(-p \vee p) \vee -q$ (MP, 10), T3))
12) $–q \vee (-p \vee p)$ (C, 11)
13) $–q \vee q$ (RS, T3)
14) $(–q \vee q) \supset ((-q \vee (-p \vee p)) \supset ((-q \vee q)$ & $(q \vee (-p \vee p))))$ (MP, T14, p/$-q \vee q$, q/$-q \vee (-p \vee p)$)
15) $(-q \vee (p \vee p)) \supset ((-q \vee q) \wedge (-q \vee (-p \vee p))$ (MP, 14), 13))
16) $(-q \vee q) \wedge (q \vee (-p \vee p))$ (MP, 15), 12))
17) $–q \vee (q \wedge (-p \vee p))$ (D2, 16)
18) $q \supset (q \wedge (-p \vee p))$ (RE, 17, 2.3.2)
19) $q \wedge (-p \vee p) \equiv q$ (RS, T14, MP,), 18))

T32 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

1) $-(-q \vee -p \vee r) \vee (-q \vee -p \vee r)$	(RS, T3, p/$-q \vee -p \vee r$)
2) $(q \wedge p \wedge -r) \vee ((-q \vee -p \vee r)$	(DM, 1)
3) $(p \wedge q \wedge r) \vee (-q \vee -p \vee r)$	(CC, 2)
4) $(-q \vee -p \vee r) \wedge (-p \vee p) \equiv -q \vee -p \vee r$	(RS, T31)
5) $(-q \vee -p \vee r) \wedge (-p \vee p \vee r) \equiv -q \vee -p \vee r$	(RE, 4), T39))
6) $(p \wedge q \wedge -r) \vee (-q \vee -p \vee r) \wedge (-p \vee p \vee r)$	(RE, 3), 5))
7) $(p \wedge q \wedge -r) \vee (-q \vee -p \vee r) \wedge (p \vee -p \vee r)$	(C, 6)
8) $(p \wedge q \wedge -r) \vee ((p \wedge -q) \vee (-p \vee r))$	(D2, 7)
9) $-(p \wedge q \wedge r) \supset (-(p \wedge q) \supset (p \supset r))$	(RE, 8), 2.3.2))
10) $(-p \vee -q \vee r) \supset ((-p \vee q) \supset (p \supset r))$	(DM, 9)
11) $(-p \vee (-q \vee r)) \supset ((-p \vee q) \supset (p \supset r))$	(AD, 10)
12) $p \supset (q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset q \supset r)$	(RE, 2.3.2, 11)

T33 $(-p \supset -q) \supset (q \supset p)$ (RS, T7)

T34 $p \supset (-p \supset q)$

T32 exprimă ideea că o contradicţie implică orice.

Observaţii

1. Principiile logicii clasice, principiul identităţii, terţului exclus, dublei negaţii apar în sistemul Hilbert Ackermann ca teoreme oarecare, nu ca axiome (vezi T2, T3, T4, T15). Principiul noncontradicţiei poate fi şi el obţinut din T3 prin aplicarea legilor lui De Morgan şi a legii dublei negaţii. Un sistem axiomatic ne apare ca un mod de organizare logic-deductivă dintre mai multe posibile. După cum vom vedea pentru logica propoziţiilor sunt posibile şi alte organizări logic-coerente, corecte şi cuprinzătoare.

2. Dezvoltarea sistemului axiomatic s-a făcut simultan prin producerea de teoreme sau teze şi prin producerea de reguli de inferenţă derivate. Practic, pentru orice teoremă putem construi o regulă de inferenţă asociată. Cu cât dispunem de mai multe şi variate reguli de inferenţă, cu atât putem demonstra teoreme mai complicate şi într-un număr mai mic de paşi. Utilizarea regulilor de inferenţă ne-a permis să demonstrăm teorema T12 în 20 de paşi în loc de 37 de paşi [35, p 61]

3. Demonstraţia în sistemele axiomatice este riguroasă, dar neintuitivă. Nu putem oferi cititorului, în limitele sistemului axiomatic, instrucţiuni sau sfaturi prin care să producă cu uşurinţă textul demonstrativ pentru o formulă demonstrabilă anterior dată. Pentru aceasta este nevoie să trecem la metateoria sistemului.

Universitatea Spiru Haret

3. **Noncontradicţia sistemului Hilbert – Ackermann**

Un sistem axiomatic este *contradictoriu,* dacă şi numai dacă, putem demonstra în cadrul lui două teze de forma A şi –A. Dimpotrivă, un sistem axiomatic este *necontradictoriu*, dacă şi numai dacă, prin nici o secvenţă de aplicaţii a regulilor de inferenţă nu se pot produce două teze de forma A şi – A.

Pentru a demonstra că sistemul Hilbert – Ackermann este necontradictoriu este suficient să arătăm că: 1) toate axiomele sale sunt formule identic adevărate sau valide şi 2) că această proprietate se conservă prin regulile de inferenţă admise.

Înainte de a demonstra necontradicţia sistemului să cercetăm ce consecinţe are asupra unui sistem deductiv prezenţa unei contradicţii. Sa admitem că am demonstrat într-un sistem:

1) A
2) –A

atunci, pe baza teoremei T34, obţinem:

3) $A \supset (-A \supset B)$

de unde prin aplicarea de două ori a regulii MP se obţine:

4) B.

Dar *B* poate fi substituit prin orice. Existenţa unei contradicţii face sistemul inapt să mai disocieze între adevăr şi fals, între enunţurile admisibile şi cele inadmisibile.

Teoremă. *Sistemul Hilbert – Ackermann este necontradictoriu*

Revenind la demonstraţia necontradicţiei vom arăta, mai întâi, că axiomele sistemului Hilbert – Ackermann sunt formule identic adevărate sau tautologii. Utilizăm pentru aceasta metoda rezoluţiei:

2.4.1. $p \vee p \supset p$		2.4.2. $p \supset (p \vee q)$	
1) $p \vee p$		1) p	
2) –p	neg. consecv.	2) $-(p \vee q)$	
3) p	(1), 2))	3) $-p \wedge -q$	
4) $\perp$	(3), 2))	4) –p	(E &, 3)
		5) –q	(E &, 3)
		6) $\perp$	(4), 1))

2.4.3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

1) $p \vee q$
2) $-(q \vee p)$
3) $-q \wedge - p$
4) $-q$ (E &, 3)
5) $-p$ (E &, 3)
6) q (1), 5))
7) $\perp$ (4), 6))

2.4.4 $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

1) $(- p \vee q)$
2) $(r \vee p)$
3) $-(r \vee q)$
4) $-r \wedge - q$
5) $-r$ (E &, 4)
6) $-q$ (E &, 4)
7) $-p$ (6), 1))
8) p (5), 2))
9) $\perp$ (7, 8)

Aşadar, axiomele 2.4.1.- 2.4.2 sunt formule valide.

Urmează să demonstrăm că prin nici o regulă de inferenţă admisă în sistemul Hilbert – Ackermann nu este posibil să obţinem dintr-o formulă identic adevărată o formulă infirmabilă i.e. falsă cel puţin intr-o interpretare .

Regulile de inferenţa admise iniţial sunt substituţia, RS şi *Modus Ponens*, MP.

Demonstrăm, mai întâi, că substituţia conservă validitatea axiomelor.

Convenim să notăm prin A (p), A (p, q) şi A (p, q, r) axiomele în care apar variabilele p, p şi q şi, în sfârşit, p, q, r. Se ştie că în logica propoziţiilor variabilelor li se atribuie valorile de adevăr 1 şi 0. Pentru n = 1, 2, 3 (n este numărul variabilelor care apar în axiome) vom avea, corespunzător, 2, 4 şi 8 atribuiri.

Pentru a arăta ca substituţia conservă validitatea construim un raţionament prin reducerea la absurd. Fie, de exemplu, n=2 (cazul axiomelor 2.4.2 şi 2.4.3). Admitem că A(p, q) este identic adevărată:

1) A(p, q) = tautologie ip.

respectiv că:

2) A (0, 0) = 1
3) A (0, 1) = 1
4) A (1, 0) = 1
5) A (1, 1) = 1

şi că prin substituţia, p/r, q/s, ea devine infirmabilă:

6) A (r, s) = 0 ip.

Dar pentru ca A (r,s) să fie infirmabilă trebuie să existe o atribuire de valori dată variabilelor r, s astfel formula A(r, s) să ia valoarea 0. Dar aceasta înseamnă că:

7) $A (0, 0) \vee A (0, 1) \vee A (1, 0) \vee A (1, 1) = 0$.

Dar 7 contravine lui 1) şi respectiv lui 2) – 5).

Cum însă axiomele au fost atestate ca formule valide trebuie să admitem că prin substituţie nu se deteriorează validitatea axiomelor.

Pentru axioma 2.4.1 vom avea două alternative în loc de patru. Dimpotrivă, pentru axioma 2.4.4 vom avea opt alternative. Structura demonstraţiei rămâne identică:

Dovedim acum ca *Modus Ponens* conservă validitatea.

Admitem, prin absurd, că A şi A $\supset$B sunt formule identic adevărate şi că B, dimpotrivă, este o formulă infirmabilă.

1) A = 1 ip.
2) A $\supset$ B = 1 ip.
3) B = 0 ip. dem. indirecte

Substituind în expresia 2) pe A şi pe B prin valorile lor de adevăr stipulate la 1) şi la 3) obţinem:

4) 1 $\supset$ 0 = 1,

ceea ce contravine definiţiei implicaţiei materiale. În consecinţă, 4) nu poate fi admisă şi deci nu putem admite că B = 0, când A =1 şi A $\supset$ B = 1. În mod necesar B = 1.

Regula substituirii echivalenţelor RE şi celelalte reguli derivate sunt obţinute pe baza regulilor de inferenţă primitive în sistem, RS, şi MP. În consecinţă şi ele conservă validitatea.

Întrucât axiomele sunt formule valide şi regulile de inferenţă conservă validitatea, în sistemul Hilbert – Ackermann nu pot apare formule contradictorii şi, în consecinţă toate teoremele sistemului Hilbert – Ackermann sunt formule valide.

4. **Completitudinea sistemului Hilbert – Ackermann**

Am demonstrat în § 2 un număr de formule valide: principiul tranzitivităţii, legea contrapoziţiei, legea dublei negaţii, teoremele lui De Morgan, teoremele asociativităţii disjuncţiei şi conjuncţiei, legile de distributivitate etc. Putem să ne punem întrebarea dacă în sistemul prezentat putem construi un text demonstrativ pentru *orice* formulă validă sau identic adevărată din logica propoziţiilor. Aceasta este problema completitudinii.

Teoremă. *Orice formula validă sau tautologică în logica propoziţiilor este teoremă în sistemul axiomatic Hilbert – Ackermann, altfel spus, sistemul este complet.*

Demonstraţie. Fie A o formulă validă sau o tautologie în logica propoziţiilor. Atunci A poate fi adusă printr-o serie de transformări echivalente la o formă normală conjunctivă A' = A1 ∧… ∧ An, unde un termen al conjuncţiei Ai, cu $1 \le i \le n$ conţine o pereche complementară de literali l ∨ - l, l fiind o variabila propoziţională. Un termen al conjuncţiei Ai are în mod necesar una dintre formule l ∨ -l, -l ∨ l, l ∨ -l∨k, l∨ -l ∨ k, k ∨ l ∨ -l, k ∨ -l ∨ l ∨ m. Este uşor de observat că l ∨ -l sau -l ∨ l sunt derivabile din T4 sau T3.

Pe de alta parte, l ∨ -l ∨ k poate fi obţinută ca teoremă din T4 şi axiomă 2.4.2 prin substituţie şi *Modus Ponens*. Forma k ∨ l ∨ -l poate fi obţinută din l ∨ -l ∨ k prin axioma 2.4.3.

Forma k ∨ -l ∨ l ∨ m poate fi adusă prin axioma 2.4.3 la –l ∨ l ∨ m ∨ k, iar aceasta poate fi obţinută printr-o substituţie în axioma 2.4.2 şi aplicarea regulii MP.

Pe această cale *orice* termen al formei normale conjunctive A' poate fi demonstrat ca teoremă în sistemul Hilbert – Ackermann. În sfârşit, prin substituţii în T14 sau prin regula derivată introducerea conjuncţiei, I&, putem obţine ca teoremă forma normală conjunctivă A'.

Întrucât A' este echivalentă cu expresia iniţială A, prin regula extensionalităţii sau a substituirii echivalentelor putem obţine direct pe A.

Exemplu. Se dă tautologia: ((p ∧ q) ⊃ r) ⊃ ((p ∧ - r) ⊃- q. Să se demonstreze aceasta ca teoremă în sistemul Hilbert – Ackermann.

A = ((p ∧ q) ⊃ r) ⊃ ((p ∧ -r) ⊃ -q))
(p ∧q ∧ - r) ∨ -p ∨ r ∨ -q (FND)
A' = (p ∨ -p ∨ r ∨ -q) ∧ (q ∨ -q ∨ -p ∨ r) ∧ (-r ∨ r ∨ -p ∨ -q) (FNC)

unde:

A1 = (p ∨ -p ∨ r ∨ -q)
A2 = q ∨ -q ∨ -p ∨ r,
A3 = -r ∨ r ∨ -p ∨ -q

sunt disjuncţii elementare tautologice demonstrabile ca teoreme:

Demonstrăm întâi pe A1.

1) (p ∨ -p) ⊃ p ∨ -p ∨ (r ∨ -q) (RS, 2.4.2, p/p ∨ -p, q/r ∨ -q)
2) p ∨ -p ∨ (r ∨ -q) (MP, 1), T4))
3) p ∨ -p ∨ r ∨ -q (RE, 2), T17))

În mod analog, se demonstrează A2 şi A3. După ce am obţinut toţi termenii lui A' obţinem utilizând T14 pe A'.

A1 ⊃ (A2 ⊃ (A1 & A2)) i.e.:

4) (p ∨ -p ∨ r ∨ -q) ⊃ (q ∨ -q ∨ -p ∨ r) ⊃ ((p ∨ -p ∨ r ∨ -q) ∧ ∧(q ∨ -q ∨ -p ∨ r))

Universitatea Spiru Haret

De unde prin MP cu A1) prima data şi cu A2 a doua oară obținem:
5) $(p \vee -p \vee r \vee -q) \wedge (q \vee -q \vee -p \vee r)$ (C)
Notăm conjuncția dintre A1 şi A2 i.e.5) cu C. Folosim din nou T14:
$C \supset (A3 \supset (C \wedge A3))$
respectiv:
6) $((p \vee -p \vee r \vee -q \wedge (q \vee -q \vee -p \vee r)) \supset ((-r \vee r \vee p \vee -q) \supset$
$((p \vee -p \vee r \vee -q) \wedge (q \vee -q \vee -p \vee r) \wedge (-r \vee r \vee -p \vee -q)))$
Din 6) prin MP cu 5) şi apoi cu A3, obținem A' ca teoremă.
Din A' prin RE se obține ca teoremă formula validă inițială A.
Obs. 1 Teorema T14 poate fi generalizată ca:
T14* $A1 \supset (A2 \supset \ldots \supset (An \supset (A1 \,\&\, A2 \,\&\, \ldots \,\&\, An)) \ldots)$
Obs. 2 Aducerea formulei A la FNC, A' serveşte ca o analiza a structurii formulei inițiale şi ca o faza pregătitoare pentru descoperirea textului ei demonstrativ. Textul demonstrativ se sprijină pe parcurgerea în sens invers a paşilor pe care i-am parcurs în aducerea formulei la FNC.

Completitudinea în sensul lui Post. În sensul lui Post un sistem axiomatic este complet dacă adăugând la el o formulă bine formată ce nu e teoremă obținem în mod necesar o contradicție. Completitudinea este în acest caz un fel de reacție de respingere a sistemului la formulele invalide.

Dacă, de exemplu, adăugam la sistemul Hilbert Ackermann formula invalidă $p \vee q$, atunci din aceasta putem obține cu mijloacele sistemului o contradicție:

l) $p \vee q$	ip.
2) $p \vee p$	(RS, 1))
3) p	(MP, 2.4.1., 2))
4) – p	(RS, 3))
5) □	(I &, 3), 4))

5. **Independenţa sistemului Hilbert-Ackermann**

O *axiomă* este *independentă* într-un sistem axiomatic, dacă nu poate fi derivată cu ajutorul regulilor de inferență în sistem din mulțimea celorlalte axiome.

Un *sistem axiomatic* este *independent,* dacă nici o axiomă a sa nu poate fi derivată cu ajutorul regulilor sistemului din mulțimea celorlalte axiome.

Cercetarea independenței unui sistem axiomatic se sprijină pe teoria semantică, în speță pe teoria modelelor. Să presupunem, de

exemplu, că o axiomă Ai dintr-un sistem axiomatic având axiomele A1,…An este dependentă în sistem. Atunci, ea poate fi dedusă din celelalte axiome.

Aceasta poate fi descrisă prin:

1. $A1 \wedge \ldots \wedge Ai\text{-}1 \wedge Ai + 1 \wedge \ldots \wedge An \models Ai$
2. $A1 \wedge \ldots \wedge Ai\text{-}1 \wedge Ai + 1 \wedge \ldots \wedge An \supset Ai = \text{Taut.}$
3. $A1 \wedge \ldots \wedge Ai - 1 \wedge Ai + 1 \wedge \ldots \wedge An \wedge \text{-} Ai = \text{Contr.}$

Dimpotrivă, dacă axioma Ai este *independentă,* atunci există cel puţin o interpretare sau model potrivit căreia:

4. $A1 \wedge \ldots \wedge Ai - 1 \wedge Ai + 1 \wedge \ldots \wedge An \wedge \text{-} Ai$

este *realizabilă,* cel puţin pentru o atribuire de valori acordată variabilelor formulelor ce alcătuiesc axiomele sistemului. Aceasta înseamnă că în acea interpretare *toate* celelalte axiome sunt adevărate iar axioma testată, Ai, este falsă. Aşa, de exemplu, pentru a testa independenţa axiomei 2.4.1 din sistemul Hilbert – Ackermann trebuie să găsim o interpretare pentru variabile şi conective logice în care *toate celelalte axiome* 2.4.2 – 2.4.4 *să fie adevărate* iar *axioma testată*, în cazul nostru 2.4.1, *să fie falsă.*

La modul general, pentru testarea independenţei unui sistem axiomatic *se construieşte pentru fiecare axiomă un model care să verifice toate celelalte axiome şi să infirme axioma în cauză.*

Demn de subliniat este faptul că se generalizează noţiunea de valoare de adevăr. De la adevăr şi fals ca singure valori de adevăr se trece la interpretări cu mai multe valori de adevăr exprimate prin cifre sau litere din alfabetul elen: { 0, 1, 2 }, { 0, 1, 2, 3 } sau { α, β, γ }, { α, β, δ } etc. Între acestea vom distinge o submulţime de valori denumite *valori privilegiate*, ce corespund, într-un anumit sens, conceptului clasic de adevăr.

Pentru testarea fiecărei axiome se redefinesc conectivele logice primitive în termenii noilor valori de adevăr extinse. Fie Ai axioma testată. Atunci, t*oate* axiomele, în afara de Ai, vor lua pentru *toate* atribuirile de valori acordate variabilelor propoziţionale numai valori privilegiate. În schimb, axioma testata, Ai, va lua, cel puţin pentru o atribuire de valori, o valoare neprivilegiată. Ea va avea, aşadar, un *contramodel*.

A demonstra independenta unei axiome înseamnă a arăta că axioma în cauză poate fi „falsă” (i.e. poate lua o valoare neprivilegiată) cel puţin pentru o interpretare în care *toate* celelalte axiome sunt „adevărate” (i.e. iau valori privilegiate).

Universitatea Spiru Haret

Testăm independența axiomei 2.4.1. Extindem valorile de adevăr de la 0 şi 1 la: { 0, 1 2} şi redefinim conectivele logice neprimitive sau „derivate”:

p	-p		p∨q		0	1	2
0	0			0	0	0	0
1	1		p	1 1	0	1	2
2	2			2	0	2	0

Tabel 1. *Definirea conectivelor logice negație şi disjuncție pentru testarea independenței axiomei 2.4.1*

p ⊃ q		q 0	1	2
	0	0	1	2
p	1	0	0	0
	2	0	2	0

Tabel 2. *Definirea conectivului implicație pentru testarea independenței axiomei 2.4.1*

Valoarea privilegiată va fi 0. Într-un fel, valoarea privilegiată, 0, va ține locul „adevărului”.

Pentru verificarea independenței axiomei 2.4.1, axiomele 2.4.2, 2.4.3, şi 2.4.4 vor lua în această interpretare numai valoarea privilegiată 0, iar axioma 2.4.1, cea pe care o testăm, va lua pentru o atribuire de valori o valoare neprivilegiată, i.e. 1 sau 2.

Într-o logică cu trei valori de adevăr { 0, 1 2} pentru două variabile propoziționale p şi q vom avea 2^3 =9 atribuiri de valori pentru fiecare dintre conectivele binare „sau” şi „dacă…, atunci…” simbolizate în tabelul nr. 1 prin „∨” şi „⊃”. Construim mai jos un tabel, tabelul nr. 3, în care vom calcula valorile ce revin axiomei 2.4.2 În primele două coloane vom avea atribuirile de valori acordate variabilelor, în coloana a treia valorile ce revin disjuncției, în coloana a patra valorile ce revin implicației, iar în ultima coloană, coloana a cincea, valorile ce revin axiomei 2.4.2 .Este uşor de observat că axioma a doua, 2.4.2, ia, în interpretarea dată, numai valori privilegiate, spre deosebire de axioma 2.4.1.

p	q	p∨q	p ⊃q	p ⊃ (p∨q)
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	2	0	2	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0
1	2	2	0	0
2	0	0	0	0
2	1	2	2	0
2	2	0	0	0

Tabel 3. *Verificarea validităţii axiomei 2.4.2*

Testarea axiomei 2.4.3 se poate face direct din verificarea indiferenţei operaţiei disjuncţiei, faţă de ordinea variabilelor. Verificarea valorilor ce revin axiomei a patra, axioma 2.4.4, pentru interpretarea dată este prea laborioasă pentru a fi reprodusă aici. Întrucât axioma are trei variabile, vom avea 3 la puterea 3 atribuiri de valori, respectiv o matrice cu 27 de linii.

Verificăm faptul că axioma 2.4.1 ia, pentru cel puţin o atribuire de valori, o valoare neprivilegiată. Vom construi pentru verificarea acestei axiome un tabel cu trei coloane şi patru rânduri pe care îl vom „umple" cu valori de adevăr ţinând seama de definiţiile introduse anterior în tabelul nr.1.

p	p∨ p	(p∨ p) ⊃ p
0	0	0
1	1	0
2	0	2

Tabel 4. *Verificarea axiomei 2.4.1.*

Într-adevăr, în coloana 3 din tabelul nr. 3, rândul patru, 0 implică 2 dă 2, conform definiţiei implicaţiei din tabelele 1 şi 2 . Dar aceasta reprezintă o anomalie, căci o valoare privilegiată, 0, implică o valoare neprivilegiată, 2. Axioma 2.4.1are, aşadar, un contraexemplu. Ea nu este verificată de modelul satisfăcut de toate celelalte trei şi este, deci, independentă de acestea.

În mod analog, pentru verificarea independenţei axiomei a doua va trebui să construim pentru axiomele 1, 3 şi 4, respectiv 2.4.1, 2.4.3

Universitatea Spiru Haret

şi 2.4.4 o interpretare pe care fiecare dintre acestea să o satisfacă iar axioma a doua, axioma 2.4.2 să nu o satisfacă.

Pentru verificarea independenței axiomei 2.4.2 se aleg valorile de adevăr {0,1,2,3}, iar ca valori privilegiate, valorile {0,2}. Dăm noi definiții, de data aceasta într-o logică tetravalentă, cu valorile {0,1,2,3} operațiilor logice negație, disjuncție şi implicație. Ca şi mai înainte, negația este o operație unară, iar disjuncția şi implicația sunt operații binare sau de două argumente. Construim pentru aceasta tabelul nr.5.

				q			
p	-p		p∨ q	0	1	2	3
0	1		0	0	1	1	1
1	0		p 1	0	0	0	0
2	3		2	0	1	2	3
3	2		3	0	1	2	2

Tabel 5. *Definirea operațiilor logice negație şi disjuncție pentru verificarea axiomei a doua, 2.4.2*

p⊃q	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0
2	0	1	2	3
3	0	1	2	2

Tabel 6. *Definirea implicației pentru verificarea axiomei a doua, 2.4.2*

Pentru a proba independența, axioma 2.4.2 va trebui să ia cel puțin pentru o atribuire de valori o valoare neprivilegiată, iar *toate* celelalte axiome, 2.4.1, 2.4.3. şi 2.4.4 vor trebui să ia pentru *toate* atribuirile de valori numai valori privilegiate.

Verificăm dacă axioma 2.4.2 ia, în aceasta interpretare, cel puțin pentru o atribuire de valori o valoare neprivilegiată. Fiind patru valori, vom avea pentru un conectiv binar $4^2 = 16$ atribuiri de valori.

Construim pentru aceasta tabelul nr.7 în care introducem pe ultimele două coloane axiomele 2.4.2 şi 2.4.3. Axioma 2.4.2 va trebui să aibă cel puțin pentru o atribuire o valoare neprivilegiată de 1 sau 3.

Nr.	p	q	$p \supset (p \vee q)$	$(p \vee q) \supset (q \vee p)$
1)	0	0	0	0
2)	0	1	0	0
3)	0	2	0	0
4)	0	3	0	0
5)	1	0	0	0
6)	1	1	0	0
7)	1	2	0	0
8)	1	3	0	0
9)	2	0	0	0
10)	2	1	1	0
11)	2	2	2	2
12)	2	3	2	2
13)	3	0	0	0
14)	3	1	1	0
15)	3	2	2	2
16)	3	3	2	2

Tabel 7. *Verificarea independenţei axiomei 2.4.2*

După cum se vede din tabelul nr. 7, axioma 2.4.2. (vezi coloana 5) ia, în interpretarea dată, pentru atribuirile l0) şi l4) două valori neprivilegiate de 1, în loc de 0 sau 2. Dimpotrivă, axioma 2.4.3. (vezi coloana 6) ia, pentru toate cele 16 atribuiri de valori, numai valori privilegiate de 0 şi 2.

Verificarea matriceala a axiomei 2.4.4. necesită 4^3 =64 de linii pentru combinaţiile de atribuiri de valori.

Pentru verificarea independenţei axiomei 2.4.3 se consideră patru valori de adevăr, $\{0, 1, 2, 3\}$. Se dau pentru operaţiile negaţie şi disjuncţie definiţiile din tabelul nr. 8.

				q			
p	-p		$p \vee q$	0	1	2	3
0	1		0	0	0	0	0
1	0		p 1	0	1	2	3
2	0		2	0	2	2	0
3	2		3	0	3	3	3

Tabel 8. *Definirea negaţiei şi disjuncţiei pentru verificarea independenţei axiomei 2.4.3*

În funcție de definițiile date negației şi disjuncției în această interpretare calculăm definiția implicației. Redăm definiția implicației în tabelul nr. 9.

$p \supset q$		q 0	1	2	3
p	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3
	2	0	0	0	0
	3	0	2	2	0

Tabel 9. *Definirea implicației pentru verificarea independenței axiomei 2.4.3*

În această interpretare, semnificația privilegiată este 0. Pentru verificarea independenței axiomei 2.4.3 aceasta va trebui să ia, cel puțin, o valoare neprivilegiată pentru o atribuire de valori acordată variabilelor, în timp ce *toate* celelalte axiome vor trebui să ia numai valori privilegiate pentru *toate* atribuirile de valori acordate variabilelor.

Axioma a treia, 2.4.3 este infirmată de atribuirea de valori p = 2 şi q = 3.

$(p \vee q) \supset (q \vee p)$ 2.4.3.

$(2 \vee 3) \supset (3 \vee 2)$

$0 \supset 3$

3

Valoarea 3 nu este una privilegiată în interpretarea propusă mai sus. Verificăm pentru p = 1 şi q = 3 axioma 2.4.2.

$p \supset (p \vee q)$

$1 \supset (1 \vee 3)$

$1 \supset 3$

0

Axioma 2.4.2. ia o valoare privilegiată pentru atribuirea pentru care axioma 2.4.3 ia o valoare neprivilegiată.

Testăm pentru aceiaşi interpretare a disjuncției şi implicației axioma 2.4.1. Redăm acest test în tabelul nr.10.

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \supset p$
0	0	0
1	1	0
2	2	0
3	3	0

Tabel 10. *Verificarea axiomei 2.4.1 pentru interpretarea propusă pentru verificarea independenței axiomei 2.4.3*

Şi axioma întâia, axioma 2.4.1, satisface interpretarea propusă operaţiilor disjuncţie şi implicaţie pentru verificarea axiomei 2.4.3, axioma a treia despre comutativitatea disjuncţiei.

Pentru verificarea independentei axiomei 2.4.4. se propune pentru operaţiile logice negaţie şi disjuncţie interpretarea descrisă în tabelul nr. 11. De reţinut că şi această interpretare face uz de patru valori de adevăr: { 0, 1, 2, 3 }. Valoarea privilegiată este tot 0.

				q			
p	-p		p∨q	0	1	2	3
0	1		0	0	0	0	0
1	0		p 1	0	1	2	3
2	3		2	0	2	2	0
3	0		3	0	3	0	3

Tabel 11. *Definirea interpretării pentru verificarea independenţei axiomei 2.4.4*

Axioma 2.4.4. va fi infirmată pentru atribuirea p = 3, q = 1, r = 2, când aceasta va lua valoarea 2 în loc de 0. Toate celelalte axiome şi teoreme derivate din ele vor lua pentru orice atribuire numai valoarea privilegiată 0.

Independenţa unui sistem axiomatic nu este o proprietate tot atât de importantă ca noncontradicţia şi completitudinea. Totuşi, independenţa permite o analiză modulară a sistemelor axiomatice. Într-un sistem axiomatic independent putem schimba o anumită axiomă cu negaţia sa, fără ca prin aceasta să se obţină contradicţii în sistem. Astfel în teoria clasică a geometriei plane postulatul paralelelor a putut fi înlocuit cu negaţia sa, fără ca prin aceasta să se obţină contradicţii în tratarea axiomatică.

Noncontradicţia, completitudinea şi independenţa sunt proprietăţi metateoretice ale teoriilor axiomatice. De aceea ele sunt exigenţe ale modului de construire a teoriilor ştiinţifice consistente şi eficace despre un anumit domeniu de obiecte.

Universitatea Spiru Haret

6. **Teorema deducţiei şi demonstraţiile în sistemele axiomatice**

Deducţia în sistemele axiomatice este adesea laborioasă şi neintuitivă. Pentru a scurta demersul deductiv şi pentru a face căutarea demonstraţiei mai intuitivă putem utiliza teorema deducţiei (J. Herbrand, 1930). Pentru înţelegerea ei este poate util să reamintim câteva concepte preliminare: formulă dedusă într-un sistem axiomatic, formulă dedusă într-un sistem axiomatic dintr-un set de ipoteze H, şi principiul inducţiei matematice.

D6.1 O formula Bn este *dedusă* într-un sistem axiomatic, dacă şi numai dacă, există o secvenţă de formule B1….Bn, astfel că oricare ar fi B*i* cu $1 \leq i \leq n$, B*i* este: 1) o axiomă; 2) este obţinută prin regula substituţiei, RS, dintr-o formula R*j* cu j < i ; 3) este obţinută prin *Modus Ponens*, MP, din alte două formule B*j* şi B*k* cu j, k < *i* şi Bk este de forma Bj → Bi; 4) este obţinută prin regula extensionalităţii, RE, din alte două formule B*m* şi B*l* cu m, l < *i* şi B*l* de forma Bs ≡ Bt, iar Bm conţine pe Bs sau Bt.

D6.2 Fiind dat un sistem axiomatic şi o mulţime de ipoteze Γ = {A1,… An}, unde A*i,* cu $1 \leq i \leq n$ este o formula bine formată, nu neaparat o teoremă, spunem că o formula Bn este dedusă în sistemul axiomatic dat din ipotezele Γ, dacă şi numai dacă, există o secvenţă de formule B1,…Bn, unde B*j*, cu $1 \leq j \leq n$ este: 1) o axiomă; 2) una dintre ipoteze; 3) B*j* este dedusă prin RS dintr-o formulă anterioara B*f* cu *f* < j; 4) B*j* este o consecinţă prin Modus Ponens MP din alte două formule Bs şi Bk cu Bk de forma Bs ⊃ Bj; 5) B*j* este obţinută prin regula extensionalităţii din alte două formule anterioare Bm şi B*l* cu m, *l* < *j* şi B*l* de forma Bs ≡ Bt iar Bm conţine pe Bs sau pe Bt.

Prin Γ ├ Bn vom nota deducerea formulei Bn din ipotezele Γ.

Secvenţa B1,…Bn se numeşte *text demonstrativ* al teoremei Bn.

Deducţia este un şir de operaţii de inferenţă aplicate asupra unui set de formule date iniţial şi asupra celor anterior derivate. Ea poate fi văzută ca un proces sau ca o construcţie finită, încheiată cu formula de demonstrat.

D 6.3 Principiul inducţiei matematice are mai multe formulări. Una dintre ele este: dacă o proprietate P este adevărată despre n =1 şi din faptul că este adevărată pentru toate numerele $l \leq j < i$ rezultă ca ea este adevărată pentru *i* , atunci ea este adevărată pentru orice număr natural n ∈ N. Redăm propoziţia de mai sus ca schemă de inferenţă:

Universitatea Spiru Haret

1. P(1)
2. P(j) $\rightarrow$ P(i), $\forall$ j (1$\leq$j < i)
3. P(n), $\forall$n (n $\geq$ 1).

Formula: Φ, A $\vdash$ C se citeşte: „Din mulţimea de formule Φ şi din formula A se deduce logic formula C" sau „C este o consecinţă logică din Φ şi A"

Teorema deducţiei. Fie Γ un set de ipoteze şi A o ipoteză distinctă de Γ. Dacă din Γ, A $\vdash$ B, atunci Γ $\vdash$ A $\supset$B. Pe scurt, putem scrie regula:

Γ, A $\vdash$ B

Γ $\vdash$ A $\supset$ B

Demonstraţia se face prin inducţie asupra lungimii n a textului demonstrativ prin care se obţine consecinţa B, B1, …Bn, (B = Bn).

Admitem că n = 1. În acest caz avem trei alternative asupra lui B, respectiv Bn:

a) B1 este o axiomă
b) B1 este o ipoteză;
c) B1 coincide cu ipoteza A

Pentru toate aceste cazuri putem demonstra că A $\supset$ B. Pentru cazurile a) şi b) obţinem A $\supset$ B prin aplicarea schemei *Modus Ponens* asupra lui T9.

1) p $\supset$ (q $\supset$p) T9
2) B1 $\supset$ (A $\supset$ B1)
3) B1 (B este axiomă sau ipoteză)
4) A $\supset$ B1 (MP, 2), 3))

Pentru cazul c), când B coincide cu A, obţinem A $\supset$ B prin RE în T2.

1) p $\supset$ p (T2)
2) A $\supset$ A (RS, 1)
3) A $\supset$ B1 (RE, B $\equiv$ A, 2)

Cu aceasta am epuizat cazurile pentru n = 1, i.e. când demonstraţia se face printr-un singur pas.

Cercetăm acum pasul inductiv.

Dacă A $\supset$ Bj este valabilă pentru orice 1 $\leq$ j < i, atunci are loc A $\supset$ Bi.

Pentru Bi avem patru posibilităţi:

a) Bi este o axiomă;
b) Bi este o ipoteză;
c) Bi este identic cu A;

Universitatea Spiru Haret

d) Bi este obţinut prin *Modus Ponens*, MP din Bj şi Bk, unde Bk este de forma Bj ⊃ Bi, cu j, k < i. Cazurile a), b) şi c), de mai sus, ca şi cazurile a), b) şi c) anterioare pentru n = 1, le rezolvăm prin folosirea lui T9 şi a lui T2.

Rămâne, deci, de rezolvat cazul d), i.e. de arătat că A ⊃ Bi.

Cazul d) se rezolvă prin utilizarea teoremei T32 sau a axiomei lui Frege:

1) (p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))	T32
2) A ⊃ Bj, j < i	ip.
3) A ⊃ Bk, k < i	ip.
4) Bk ≡ Bj ⊃ Bi	ip.
5) A ⊃ (Bj ⊃ Bi)	(RE, 3), 4))
6) (A ⊃ (Bj ⊃ Bi)) ⊃ ((A ⊃ Bj) ⊃ (A ⊃ Bi))	(RS, 1)
7) (A ⊃ Bj) ⊃ (A ⊃ Bi)	(MP, 6), 5))
8) A ⊃ Bi	(MP, 7), 2))

Întrucât sunt satisfăcute condiţia iniţializării sau cazul n = 1 şi condiţia pasului inductiv, dacă are loc P(j) pentru 1 ≤ j < i, are loc P(i) vom conchide că A ⊃ Bn pentru orice lungime *n* a textului demonstrativ. Cum însă Bn = B, avem A ⊃ B.

Care este semnificaţia teoremei deducţiei pentru sistemele axiomatice? Ea afirmă că, dacă dintr-un set de ipoteze sau o bază de cunoştinţe putem deduce consecventul unei implicaţii, atunci din acestea şi antecedent putem deduce implicaţia însăşi. Aceasta înseamnă că pentru a demonstra într-un sistem axiomatic o formulă implicativă oarecare este suficient să obţinem în sistem consecventul implicaţiei din setul de ipoteze şi antecedenţii sau supoziţiile implicaţiei pentru a obţine automat, prin teorema deducţiei, implicaţia însăşi.

Intre altele, teorema deducţiei permite construirea pentru orice schemă de inferenţă a teoremei asociate. Aşa, de exemplu, principiul tranzitivităţii.

A ⊃ B
B ⊃ C
A ⊃ C
devine:

1) {A ⊃ B, B ⊃ C} ├ A ⊃ C	
2) {A ⊃ B} ├ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C))	(TD, 1)
3) Ø ├ (A ⊃ B) ⊃ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C)	(TD, 2)

Similar pentru *Modus Ponens* obţinem:

1) {A, A ⊃B} ├ B

Universitatea Spiru Haret

2)$\{A\} \vdash ((A \supset B) \supset B)$ (TD, 1)
3) $\varnothing \vdash A \supset ((A \supset B) \supset B)$ (TD, 2))
4) $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$ (IM, 3))

Exerciţii

Să se demonstreze în sistemul Hilbert – Ackermann utilizând teorema deducţiei, teoremele:

a) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$

b) $((p \vee q) \vee r \supset (p \vee (q \vee r))$

Rezolvare

a) $\Gamma = \{(p \supset r), (q \supset r), (p \vee q)\}$

Cercetăm dacă din $\Gamma \vdash r$

1) $p \supset r$	*ip.*
2) $q \supset r$	*ip.*
3) $p \vee q$	*ip.*
4) p	(ip. supl. 3)
5) r	(MP, 1, 4)
6) q	(ip. supl. 3)
7) r	(MP, 2), 6))
8) $\{(p \supset r), (q \supset r), (p \vee q)\} \vdash r$	
9) $\{(p \supset r), (q \supset r)\} \vdash ((p \vee q) \supset r))$	(TD, 8)
10) $\{(p \supset r)\} \vdash (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$	(TD, 9)
11) $\varnothing \vdash (p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$	(TD, 10)

Paşii 9), 10) şi 11) se obţin din paşii precedenţi lor prin aplicarea teoremei deducţiei.

Aplicarea teoremei deducţiei face demersul demonstrativ şi mai intuitiv şi mai scurt.

b) Admitem ca unică ipoteză pentru b) pe 1)

1) $(p \vee q) \vee r$	ip.
2) $p \vee q$	ip. supl. 1a 1
3) r	ip. supl. la 1
4) $q \vee r$	(I$\vee$, 3)
5) $p \vee (q \vee r)$	(I$\vee$, 4)
6) p	ip. supl. la 2
7) $p \vee (q \vee r)$	(I$\vee$, 6)
8) q	ip. supl. 2
9) $q \vee r$	(I$\vee$, 8)
10) $p \vee (q \vee r)$	(I$\vee$, 9)
11) $\{(p \vee q) \vee r\} \vdash p \vee (q \vee r)$	(1) -10))
12) $((p \vee q) \vee r) \supset (p \vee (q \vee r)$	(TD, 11)

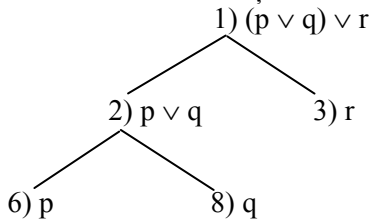
Universitatea Spiru Haret

Prin I$\vee$ am notat regula introducerii disjuncţiei întemeiată pe axioma 2.4.2 sau axioma a doua din sistemul Hilbert-Ackermann.

Demonstraţia constă, într-o primă etapă, în reducerea formulelor moleculare la formule atomare prin exploatarea cazurilor de adevăr ale disjuncţiei iniţiale. În cea de a doua etapă se utilizează regula introducerii disjuncţiei pentru a se obţine din fiecare formulă atomară formula de demonstrat.

În cea de a treia etapă, pentru trecerea de la 11) la 12) se aplică teorema deducţiei.

Faza analitică a demonstraţiei este:



Faza constructivă sau sintetică a demonstraţiei constă în obţinerea din fiecare formula atomară 3), 6) şi 8) a tezei de demonstrat.

3) r	ip. atomară
4) q ∨ r	(I∨, 3)
5) p ∨ (q ∨ r)	(I∨, 4)
6) p	ip. atomară
7) p ∨ (q ∨ r)	(I∨, 6) B/q ∨ r))
8) q	ip. atomară
9) q ∨ r	(I∨, 8)
10) p ∨ (q ∨ r)	(I∨, 9)

Pe baza faptului că fiecare alternativă a lui 1) duce la p ∨ (q ∨ r) vom conchide că:

11) {(p ∨ q) ∨ r} ├ (p ∨ (q ∨ r))

de unde prin teorema deducţiei TD obţinem 12).

12) ((p ∨ q) ∨ r) ⊃ (p∨ (q ∨ r) (TD, 11)

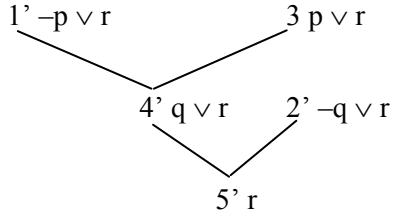
O ultimă remarcă. În cazul exerciţiului a) paşii 4) – 7) în care se derivă din ipotezele 1), 2) şi 3) , ultima consecinţă r, utilizându-se în exclusivitate MP şi definiţia disjuncţiei, demersul inferenţial întemeiat pe mai multe reguli poate fi înlocuit printr-o derivare rezolutivă care face uz de o singură regulă de inferenţă, de principiul rezoluţiei. Aceasta în conformitate cu teorema consecinţei rezolutive (vezi volumul I, Cap 6, § 4.).

Universitatea Spiru Haret

În loc de ipotezele implicative 1) şi 2) vom scrie forma lor clauzală:

1') $-p \vee r$ ip.
2') $-q \vee r$ ip.
3) $p \vee q$ ip.

de unde derivarea rezolutivă:



De aici se va conchide ca şi în cazul anterior că din 1), 2) şi 3) decurge logic r (vezi 7) din rezolvarea exerciţiului a).

Teorema deducţiei are virtutea de a scurta unele demersuri demonstrative. În plus, apropie demersul deductiv de gândirea naturală umană.

Teorema deducţiei este relevantă pentru utilizarea operaţiilor logice în teoriile ştiinţifice indiferent de domeniul lor de referinţă şi pentru alcătuirea bazelor relaţionale de cunoştinţe. Mulţimea Γ de ipoteze poate fi alcătuită din axiomele geometriei plane, din axiomele unei teorii mecanice, din principiile unei teorii fizice sau din datele factuale şi clauzele generale specifice ale unei probleme de rezolvat.

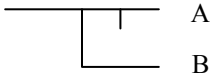
Logica nu are angajări ontice. Ea cercetează necesarul şi posibilul asertoric în orice sistem discursiv în care s-au postulat anumite axiome sau ipoteze. Enunţarea axiomelor sau a ipotezelor iniţiale sunt apanajul teoriilor din ştiinţele particulare.

Logicianul intervine în dezbaterea unei teorii numai după ce axiomele, postulatele şi regulile au fost alese. El se pronunţă doar asupra modului de prelucrare a informaţiei şi nu şi asupra întemeierii experimentale sau empirice a axiomelor şi postulatelor.

7. **Alte sisteme axiomatice**

7.1. Sistemul lui Gottlob Frege

Primul sistem axiomatic propus în 1879 are la bază implicaţia şi negaţia. Implicaţia este redată prin figura:



Universitatea Spiru Haret

şi se citeşte „Nu este cazul să fie împreună asertate negaţia lui A şi B”. Negaţia se exprimă printr-o bară verticală plasată sub linia propoziţiei negate. Cu alte cuvinte, dacă propoziţia B este adevărată, atunci A va fi şi ea adevărată. B implică A.

Transcrise în limbajul instituit de G.Peano, A.N.Whitehead şi B.Russell, axiomele propuse de Frege sunt:

A1 $p \supset (q \supset p)$
A2 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
A3 $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$
A4 $(p \supset q) \rightarrow (-q \supset -p)$
A5 $--p \supset p$
A6 $p \supset - -p$

7.2. *Sistemul lui Ian Lukasiewicz*

Lukasiewicz a simplificat sistemul lui G.Frege, arătând că sunt suficiente axiomele A1, A2 şi A4 transcrise ca lege a contrapoziţiei implicaţiei inverse şi numerotate ca:

A3 $(-p \supset -q) \supset (q \supset p)$

Axiomele sunt interpretate ca scheme de axiome. Singura regulă de inferenţă este *Modus Ponens*.

7.3. *Sistemul P2 al lui Alonzo Church*

Are aceleaşi axiome ca şi sistemul lui Lukasiewicz, admite *Modus Ponens* şi adaugă regula substituţiei.

RS. Dacă A este o teoremă şi B este o formulă bine formată, iar b este variabilă propoziţională în A, atunci substituţia peste tot a variabilei b prin B, în A, i.e., $S^b_B A$, va fi tot teoremă.

Pe scurt, dacă $\vdash A$, atunci $\vdash S^b_B A$.

Admitem în P2 şi definiţiile:

D1 $p \vee q = df -p \supset q$
D2 $p \,\&\, q = df -(p \vee -q)$
D3 $p \equiv q = df (p \supset q) \,\&\, (q \supset p)$

Regula extensionalităţii poate fi obţinută ca regulă derivată, ca şi în sistemul Hilbert - Ackermann.

Metateoremă. *Sistemul P2 al lui Alonzo Church, îmbogăţit cu Dl – D3 este deductiv echivalent cu sistemul Hilbert – Ackermann.*

Pentru a demonstra enunţul de mai sus va trebui să arătăm că:

I a) Axiomele lui P2 sunt derivabile ca teoreme în sistemul Hilbert-Ackermann.

Universitatea Spiru Haret

I b) Regulile de inferenţă ale lui P2 sunt şi ele derivabile în sistemul Hilbert-Ackermann.

II a) Axiomele sistemului Hilbert-Ackermann sunt teoreme în sistemul P2.

II b) Regulile de inferenţă ale sistemului Hilbert-Ackermann sunt şi ele derivabile în P2.

I a) Prima axiomă în sistemul P2 (şi în sistemul lui Lukasiewicz şi în sistemul lui Frege) a fost demonstrată în §2 consacrat axiomaticii hilbertiene ca T9. Axioma a doua în P2 (şi în sistemul lui Frege şi în sistemul lui Lukasiewicz) a fost demonstrată de noi în sistemul Hilbert-Ackermann ca T32. În sfârşit, axioma a treia în P2, legea contrapoziţiei inverse a fost demonstrată în §2 ca T33. Ea este o consecinţă imediată a lui T7, legea contrapoziţiei.

I b) Sistemul Hilbert-Ackermann conţine regulile de inferenţă admise în P2.

II a) Pentru a putea demonstra axiomele lui Hilbert şi Ackermann în P2 trebuie să demonstram, mai întâi, principiul identităţii.

T1 $p \supset p$

1) $(p \supset (q \supset p)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset p))$	(RS, A2)
2) $(p \supset q) \supset (p \supset p)$	(MP, 1), A1))
3) $p \supset (q \supset p) \supset (p \supset p)$	(RS, 2), q/q $\rightarrow$p))
4) $p \supset p$	(MP, 3), A1)

Teorema deducţiei este demonstrabilă în P2 pe baza axiomelor A1, A2 şi a teoremei T1 în maniera în care a fost demonstrată în § 6. În consecinţă, putem să o utilizăm pentru a demonstra ca teoreme în P2 axiomele sistemului Hilbert – Ackermann.

Demonstrăm mai întâi ca teoremă în P2:

T2 $(q \supset p) \supset ((r \supset p) \supset (q \vee r) \supset p))$

1) $q \supset p$	ip.
2) $r \supset p$	ip.
3) $q \vee r$	ip.
4) q	ip. supl. 3)
5) p	(MP, 1), 4))
6) r	ip. supl. 3)
7) p	
8) $\{q \supset p, r \supset p, q \vee r\} \vdash p$	
9) $\{q \supset p, r \supset p\} \vdash (q \vee r) \supset p$	(TD, 8)
10) $\{q \supset p\} \vdash (r \supset p) \supset ((q \vee r) \supset p)$	(TD, 9)
11) $\varnothing \vdash (q \supset p) \supset ((r \supset p) \supset (q \vee r) \supset p))$	(TD, 10)

Universitatea Spiru Haret

Acum putem demonstra axioma 2.4.1.

T3 $(p \vee p) \supset p$

1) $(p \supset p) \supset ((p \supset p) \supset (p \vee p) \supset p))$ (RS, T2, q/p, r/p)
2) $(p \supset p) \supset ((p \vee p) \supset p)$ (MP, 1), T1)
3) $(p \vee p) \supset p$ (MP, 2), T1)

Axiomele 2.4.2 şi 2.4.3 pot fi obţinute uşor utilizând teorema deducţiei:

$p \supset (p \vee q)$ 2.4.2
1) p ip.
2) $p \vee q$ (IV, 1)
3) $\{p\} \vdash p \vee q$
4) $\emptyset \vdash (p \supset (p \vee q))$ (TD, 3)

$(p \vee q) \supset (q \vee p)$
1) $(p \vee q)$ ip.
2) p ip. supl.
3) $q \vee p$ (I$\vee$, 2)
4) q ip. supl.
5) $q \vee p$ (I$\vee$, 4)
6) $\{p \vee q\} \vdash (q \vee p)$
7) $\emptyset \vdash ((p \vee q) \supset (q \vee p))$

Axioma 2.4.2 poate fi obţinută şi din A1 prin RS şi RE sprijinindu-se pe D1.

A mai rămas de demonstrat în P2 axioma 2.4.4. Utilizând din nou teorema deducţiei:

$(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q)$
1) $p \supset q$ ip.
2) $r \vee p$ ip.
3) r ip. supl.
4) $r \vee q$ I$\vee$ 3)
5) p ip. supl.
6) q (MP, 1), 5))
7) $r \vee q$ (I$\vee$, 6)
8) $\{p \supset q, r \vee p\} \vdash r \vee q$
9) $\{p \supset q\} \vdash ((r \vee p) \supset (r \vee q))$ (TD, 8)
10) $\emptyset \vdash (p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q)$ (TD, 9)
11) $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

Cu aceasta etapa II a) fost încheiată. II b) Sistemul P2 are aceleaşi reguli de inferenţă ca şi sistemul Hilbert – Ackermann, RS şi MP.

Axiomele unuia fiind teoreme în celălalt, iar regulile de inferenţă fiind identice, cele două sisteme sunt deductiv echivalente.

Universitatea Spiru Haret

7.4. *Sistemul lui H. Freudenthal*

Sistemul lui Freudenthal păstrează prima axiomă din sistemele lui Frege, Lukasiewicz şi P2 al lui A. Church, modifică axioma a 2-a din aceste sisteme pe baza comutativităţii antecedenţilor implicaţiei şi adaugă o lege a dublei negaţii. Şi Freudenthal, ca şi Church, foloseşte scheme de axiome. Singura schemă de inferenţă admisă este *Modus Ponens*, MP.

O particularitate a lui este admiterea între semnele primitive a unei constante cu înţelesul de fals sau absurd. Negaţia este obţinută ca un conectiv derivat:

D1 $\neg A = A \supset ©$ (© desemnează contradicţia)

Axiome

1) $C \supset (A \supset C)$
2) $(A \supset B) \supset \{[A \supset (B \supset C)] \supset (A \supset C)\}$
3) $(\neg(\neg A)) \supset A$

Teorema deducţiei se demonstrează în sistemul lui Freudenthal ca şi în sistemul P2 al lui A. Church.

7.5. *Sistemul lui D. Hilbert şi P. Bernays*

Se întemeiază pe o altă filosofie a axiomatizării. Utilizează un număr mare de axiome (câte trei pentru implicaţie, conjuncţie, disjuncţie, echivalenţă şi negaţie) pentru a obţine texte demonstrative mai scurte pentru teoreme.

Axiome

I 1) $A \supset (B \supset A)$
2) $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

II 1) $A \wedge B \supset A$
2) $A \wedge B \supset B$
3) $(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B \wedge C)$

III 1) $A \supset A \vee B$
2) $B \supset A \vee B$
3) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \rightarrow (A \vee B \supset C))$

IV 1) $(A \sim B) \supset (A \supset B)$
2) $(A \sim B) \supset (B \supset A)$
3) $(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$

V 1) $(A \supset B) \supset (- B \supset - A)$
2) $A \supset - - A$
3) $- - A \supset A$

Universitatea Spiru Haret

Regulile de inferență vor fi substituția, RS şi *Modus Ponens*, MP. Sistemul este necontradictoriu şi complet.[*]

O variantă a sistemului lui Hilbert şi Bernays este prezentată de P. S. Novicov în *Elemente de logica matematica*. În loc de axiomele I 2 şi I 3 se utilizează axioma A2 a lui Frege.

7.6. *Sistemul lui A. Grzegorczyk*

Axiomele pentru implicație şi echivalența sunt de inspirație Hilbert şi Bernays, iar axiomele pentru conjuncție şi disjuncție reiau axiomele 2.4.2 şi 2.4.3. din sistemul Hilbert–Ackermann la care adaugă altele (comutativitatea conjuncției etc.).

Pentru caracterizarea negației avem o axiomă a reducerii la absurd şi teza după care absurdul sau contradicția implică orice. În sfârşit, terțul exclus apare ca axiomă.

A. *Axiome pozitive pentru implicație*

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

B. *Axiome ce descriu echivalența în termenii implicației*

3. $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
4. $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$
5. $(p \supset q) \supset ((q \supset p) \supset (p \equiv q))$

C. *Axiome ce descriu conjuncția şi disjuncția*

6. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ comutativitate
7. $(p \wedge q) \supset (q \wedge p)$
8. $p \supset (p \vee q)$ absorbție
9. $p \wedge q \supset p$
10. $p \supset (q \supset (p \wedge q))$ introducerea conj.
11. $((p \supset r) \wedge (q \supset r)) \supset ((p \vee q) \supset r)$ introd. disj.

D. *Axiome descriind negația*

12. $(p \supset (q \wedge -q)) \supset - p$
13. $(p \wedge -p) \supset q$

E. *Legea terțului exclus*

14. $p \vee -p$

Axiomele 1 – 11 alcătuiesc sistemul logicii pozitive.

Axiomele 1 – 13 formează logica intuiționistă.

Axiomele 1-14 formează logica propozițiilor clasică.

Regulile de inferență sunt substituția RS şi *Modus Ponens* , MP.

[*] D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*. I, Springer Verlag, 1968, ch. 3, § 3.

Universitatea Spiru Haret

Teoreme

T1 p ⊃ p

1) (p ⊃ (q ⊃p)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ p)) (RS, A2)
2) (p ⊃q) ⊃ (p ⊃ p) (MP,1), A1))
3) (p ⊃ (q ⊃ p)) ⊃ (p ⊃ p) (RS, 2), q/q ⊃ p))
4) p ⊃ p (MP, 3), A1))

T2 (q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))

1) ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))) ⊃ ((q ⊃ r) ⊃
((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r)))
(RS, A1, p/A2, q/q⊃ r))
2) (q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))) (MP, 1), A2)
3) (q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))) ⊃
((q ⊃r)⊃ (p⊃(q⊃r)) ⊃ ((q⊃r)⊃((p⊃q)⊃(p⊃r)))
(RS, A2, p/q⊃ r, q/(p⊃ (q⊃ r)), r/((p⊃ q) ⊃ (p⊃ r))
4) ((q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃(q ⊃ r)) ⊃ ((q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r))
(MP, 3), 2))
5) (q ⊃ r) ⊃ (p ⊃ (q ⊃ r)) (RS, A1, p/q ⊃ r, q / p)
6) (q ⊃ r) ⊃ ((p ⊃ q) ⊃ (p ⊃ r)) (MP, 4), 5))

Demonstrăm acum schema de inferenţă derivată a comutativităţii antecedenţilor în implicaţiile regulate (vezi Hilbert şi Bernays).

A ⊃ (B ⊃ C)
B ⊃ (A ⊃ C) (CA)
1) A ⊃ (B ⊃ C) ip.
2) (A ⊃ (B ⊃ C)) ⊃ ((A ⊃ B) ⊃ (A ⊃ C)) (RS, A2)
3) ((A ⊃ B) ⊃ (A ⊃ C)) (MP, 2), 1))
4) ((A ⊃B) ⊃ (A ⊃ C)) ⊃ ((B ⊃ (A ⊃ B)) ⊃ (B ⊃ (A ⊃C))
(RS, T2, q/A ⊃ B r /A ⊃C, p/B)
5) (B ⊃ (A ⊃ B)) ⊃ (B ⊃ (A ⊃ C)) (MP, 4), 3))
6) B ⊃ (A ⊃ B) (RS, A1, p/B, q/A)
7) B ⊃ (A ⊃ C) (MP, 5), 6))

T3 (p ⊃q) ⊃ ((q ⊃r) ⊃ (p ⊃ r)) (CA, T2)

T4 (p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ (q ⊃ (p ⊃ r))

1) (p ⊃ q) ⊃ ((p ⊃ (q ⊃r)) ⊃ (p ⊃ r)) (CA, A2)
2) ((p ⊃ q) ⊃ ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ (p ⊃ r))) ⊃ ((q ⊃ (p ⊃ q)) ⊃
(q ⊃ ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ (p ⊃ r)))
(RS, T2, q/p⊃q, (r/(p⊃(q⊃r))⊃(p ⊃ r), p/q)
3) ((q ⊃ (p ⊃ q)) ⊃ (q ⊃ ((p ⊃ (q ⊃ r)) ⊃ (p ⊃ r))) (MP, 2), 1))
4) (q ⊃ (p ⊃ q)) (RS, A1, p/q, q/p)

Universitatea Spiru Haret

5) $q \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r))$ (MP, 3), 4))
6) $(q \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$ (CA, 5)

Demonstrarea teoremei deducţiei în sistemul lui A. Grzegorczyk se realizează simplu, în acelaşi mod în care se face aceasta în sistemul P2 al lui Church.

În consecinţă, demonstrarea teoremei T4 poate fi făcută similar demonstrării schemei de inferenţă CA prin textul demonstrativ 1) – 7) de mai sus şi apoi prin:

8) $\{A \supset (B \supset C)\} \vdash B \supset (A \supset C)$

de unde prin teorema deducţiei se obţine:

9) $ø \vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$

7.7 *Sistemul lui Elliott Mendelson*

Sistemul lui Mendelson, ca şi sistemele J. Lukasiewicz şi P2 al lui Alonzo Church, admite primele două axiome propuse de Gottlob Frege. Pe baza acestora este demonstrabilă în el teorema deducţiei şi, în consecinţă, demonstraţia teoremelor devine mai lesnicioasă. Şi în sistemul lui Mendelson, ca şi în sistemul lui Alonzo Church avem de a face cu scheme de axiome. Fiecare axiomă stă pentru o infinitate de axiome scrise în limbajul obiect. Fiecare variabilă propoziţională dintr-o astfel de axiomă trebuie să ne o închipuim ca fiind aptă de a fi ori de câte ori avem nevoie substituită uniform de orice formulă bine formată în limbajul logicii propoziţiilor.

Cea de a treia axiomă este o lege de reducere la absurd. Dacă dintr-o propoziţie se deduce deopotrivă o altă propoziţie şi negaţia ei, atunci propoziţia iniţială este falsă.

A1 $p \supset (q \supset p)$
A2 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
A3 $(-q \supset -p) \supset ((-q \supset p) \supset q)$

Din motive de comoditate am scris tot cu litere mici variabilele propoziţionale, dar acestea au un rol diferit de cele din sistemul Hilbert Ackermann. Aici fiecare variabilă stă pentru orice formulă bine formată. Axioma A3 de mai sus am tălmăcit-o în termenii teoriei deducerii. Strict vorbind, ea utilizează implicaţia sau propoziţia condiţională.

Operaţiile logice primitive sunt implicaţia şi negaţia. Conjuncţia, disjuncţia şi echivalenţa sunt introduse prin definiţii:

D1. $p \wedge q =_{df} -(p \supset -q)$
D2 $p \vee q =_{df} -p \supset q$
D3 $p \equiv q =_{df} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

Universitatea Spiru Haret

Singura schemă de inferenţă admisă în sistemul lui Mendelson este *Modus Ponens*, MP.

Teoreme

T1. $p \supset p$

T1 se demonstrează la fel ca în sistemul Pr al lui Alonzo Church (vezi pp 44-45)

T2 $(\neg p \supset p) \supset p$

1) $(-p \supset -p) \supset ((-p \supset p) \supset p)$ (A3)
2) $\neg p \supset -p$ (T1)
3) $((-p \supset p) \supset p)$ (MP, 1), 2))

T3 $(p \vee p) \supset p$

1) $((-p \supset p) \supset p)$ (T2)
2) $(p \vee p) \supset p$ (D2)

T3 este axioma 4.1 din sistemul Hilbert Ackermann.

Pe baza axiomelor A1 şi A2 şi a teoremei T1 de mai sus poate fi demonstrată în sistemul lui Mendelson teorema deducţiei, TD. (vezi demonstraţia teoremei deducţiei la pp 36-37)

Exerciţii

Să se demonstreze, în sistemul lui Mendelson, utilizându-se teorema deducţiei, teoremele:

a) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;
b) $((p \wedge q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$;
c) $(p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset (p \supset (r \supset (q \wedge s))))$.

8. **Concluzii**

1. Un sistem axiomatic formal este un limbaj formal dotat cu o submulţime de formule iniţiale denumite postulate sau axiome. Subformulele iniţiale nu sunt formule oarecare ci formule privilegiate, cărora într-o interpretare semantică oarecare le corespund enunţuri identic adevărate sau formule valide.

2. Regulile de inferenţă iniţiale, ca şi cele derivate, conservă validitatea formulelor iniţiale.

3. O teoremă este o formulă derivată din axiome prin utilizarea regulilor de inferenţă iniţiale sau a regulilor derivate.

4. Producerea unor reguli derivate reprezintă convertirea unor enunţuri „descriptive” în enunţuri „prescriptive”. Intervine o operaţionalizare a achiziţiilor teoretice.

Universitatea Spiru Haret

5. Utilizarea unor reguli derivate reduce numărul paşilor în textul demonstrativ al unei teoreme. Un text demonstrativ este o secvenţă de formule privilegiate în care fiecare element al secvenţei este sau o axiomă sau este derivat din formule anterioare cu ajutorul unei reguli de inferenţă dată iniţial sau derivată anterior.

6. Logica este deopotrivă *teorie* despre legile logice demonstrabile ca teoreme în expunerile axiomatice şi *metodă* de gândire, un ansamblu de reguli ce conservă validitatea sau adevărul de care oamenii fac uz, mai mult sau mai puţin, în toate domeniile de activitate.

7. Noncontradicţia sistemului axiomatic Hilbert-Ackermann am demonstrat-o testând mai întâi validitatea axiomelor şi arătând apoi că toate regulile de inferenţă folosite în sistem conservă validitatea.

8. Demonstraţia de completitudine a sistemului Hilbert-Ackermann se întemeiază pe teoria formelor normale conjunctive, pe teza că orice formulă validă adusă la forma normală conjunctivă este o conjuncţie de disjuncţii elementare, conţinând fiecare cel puţin o pereche de literali opuşi ($l \vee \text{-}l$ sau $p \vee \text{-}p$ sau $r \vee \text{-}r$ etc.).

9. Testarea independenţei unei axiome în cadrul unui sistem axiomatic presupune identificarea unui model care respinge axioma testată în timp ce verifică toate celelalte axiome.

Verificarea independenţei unei axiome presupune extinderea ariei valorilor de adevăr utilizate în logica clasică 1 şi 0 şi utilizarea unei liste de mai multe valori dintre care se alege una sau două valori privilegiate.

10. Teorema deducţiei afirmă că dacă o anumită consecinţă este derivată dintr-un set de premise iniţiale şi o premisă distinctă dată, atunci din setul iniţial de premise rezultă implicaţia dintre premisa distinctă dată şi consecinţa în cauză.

Dacă $\Gamma, A \models B$, atunci $\Gamma \models A \supset B$.

Utilizarea teoremei deducţiei în demonstraţiile dintr-un sistem axiomatic prezintă cel puţin două avantaje: scurtează lungimea textului demonstrativ şi face demonstraţiile mai intuitive. În prima parte a aplicării teoremei se identifică ipotezele teoremei. În momentul următor, se degajează din aceste ipoteze, prin scheme de inferenţe, consecinţele elementare derivate. În momentul al treilea se aplică reguli de agregare sau de introducerea conjuncţiei sau disjuncţiei, pentru ca, în ultimul stadiu, să se aplice de mai multe ori teorema deducţiei şi să se obţină formula de demonstrat din mulţimea vidă de ipoteze.

11. Teorema deducţiei poate fi aplicată în orice raţionament întemeiat pe un set de ipoteze şi în prelucrarea logică a unor baze de cunoştinţe, în analiza şi rezolvarea unor clase variate de probleme.

Universitatea Spiru Haret

12. Cu cât un sistem axiomatic are mai multe axiome şi mai multe reguli de inferenţă, cu atât demonstraţiile vor fi mai scurte. Dimpotrivă, dacă numărul axiomelor este mai mic, la limită o singură axiomă, atunci textul demonstrativ al teoremelor se lungeşte şi demonstraţiile sunt din ce mai puţin intuitive.

13. Sistemul axiomatic al logicii propoziţiilor stă la baza tratării axiomatice şi a logicii predicatelor, iar logica predicatelor stă la baza tratării axiomatice a unor capitole din matematică, mecanică, fizică, electrodinamică etc. Logica matematică relevă proprietăţi esenţiale ale deducţiei, demonstraţiei şi argumentării în *orice* domeniu de activitate teoretico-discursivă.

14. Într-un sistem axiomatic de logică noi aplicăm logica la logică. Cu ajutorul unor reguli logice producem din axiome, care sunt legi logice, teoreme, care sunt tot legi logice.

În cazul raţionamentelor din ipoteze sau în cazul prelucrării unei baze de cunoştinţe dintr-un domeniu oarecare, noi obţinem, prin scheme valide de inferenţă, noi adevăruri despre obiectele din domeniul de referinţă. Logicianul este un producător de adevăruri din alte adevăruri. El nu răspunde de veridicitatea datelor primare din domeniile de aplicaţie. Selectarea boabelor de grâu dintre boabele de neghină, a adevărului de neadevăr ţine de competenţa experţilor din domeniul respectiv. Logicianul lucrează cu materialul clientului.

În primul caz, cel al sistemelor axiomatice, se conservă validitatea. În cel de al doilea caz, cel al raţionamentelor din date şi clauze generice adevărate, se conservă verdicitatea.

Logica este o ştiinţă despre prelucrarea formală corectă a enunţurilor descriptive şi a celor valide. Ea descoperă legi, principii, reguli şi metode de prelucrare corectă a informaţiilor conţinute în textele descriptive sau în datele unor probleme. Gândirea logică este instrumentul principal de rezolvare a problemelor în orice domeniu de activitate. De aceea, profesiunea de logician este una de interes general şi ţine de educarea intelectuală a tinerei generaţii prin asimilarea de către acesta a legilor logice şi a schemelor de inferenţă. Pentru aceasta importantă nu este memorarea, ci utilizarea legilor logice, a datelor şi clauzelor generice pentru rezolvarea problemelor cu care ne confruntăm într-o profesie sau alta.

Avem, aşadar, aplicare a logicii la logică şi aplicare a logicii la alte domenii de cercetare la alte domenii de activitate.

Logica se aplică oricărui discurs. Nu există domeniu de vorbire la care să nu se aplice legile logicii. Valabilitatea legilor logice este univ-

Universitatea Spiru Haret

ersală ea se aplică în orice act de gândire raţională. A respinge logica este un act de autoexcludere a ta din mulţimea fiinţelor raţionale.

Câteva exerciţii de axiomatică logic-propoziţională

1. Ce semnificaţie au semnele T culcat cu o singură linie şi T culcat cu două linii ?. Utilizaţi aceste două semne pentru a formula teorema noncontradicţiei şi teorema completitudinii sistemului Hilbert Ackermann pentru logica predicatelor.
2. Prin ce se aseamănă şi prin ce se deosebesc teoremele de axiome ?
3. Ce este un text demonstrativ asociat unei teoreme ?
4. Ce sunt regulile de inferenţă derivate şi ce legătură au ele cu teoremele demonstrate anterior.
5. Demonstraţi teorema: $[(p \vee q) \wedge \text{-}q] \supset p$
6. Demonstraţi teorema: $[(p \supset r) \wedge (q \supset s) \wedge (p \vee q) \wedge \text{-}s] \supset (p \supset r)$
7. Demonstraţi teorema: $(p \wedge \text{-}q) \supset \text{-}(p \supset q)$
8. Care sunt etapele unei demonstraţii de noncontradicţie pentru un sistem axiomatic al logicii propoziţiilor.
9. Enunţaţi teorema deducţiei şi arătaţi cum simplifică teorema deducţiei demonstraţia în sistemele axiomatice. Aplicaţi teorema deducţiei la obţinerea demonstraţiilor din exerciţiile 5, 6 şi 7.
10. Ce sunt formele normale conjunctive şi ce legătură au ele cu demonstraţia de completitudine ?.
11. Demonstraţi echivalenţa dintre o formulă A şi forma sa normală prenexă.
12. Raţionamentele din ipoteză şi teorema deducţiei.
13. Teoria sistemelor axiomatice şi demonstraţiile din ipoteze.
14. Conceptele de interpretare şi model şi demonstraţia de independenţă a unei axiome şi a unui sistem axiomatic.
15. Regula substituţiei în sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann.
16. Demonstraţia din ipoteze şi demonstraţia prin reducere la absurd.

Universitatea Spiru Haret

Cap 3. **AXIOMATIZAREA LOGICII PREDICATELOR**

Gottlob Frege are meritul şi de a fi realizat prima versiune axiomatică şi pentru logica predicatelor. De fapt, axiomatica logicii predicatelor poate fi introdusă ca o supraetajare a sistemelor axiomatice propuse în capitolul anterior pentru logica propoziţiilor.

Pentru aceasta va trebui să redefinim noţiunea de limbaj formal la nivelul logicii predicatelor de ordinul întâi, să completăm lista definiţiilor cu o definiţie adecvată pentru cuantificatorul existenţial, să completăm lista axiomelor cu două axiome specifice logicii predicatelor şi să adăugăm, de asemenea, noi scheme de inferenţă.

De fapt, se cere să revizuim, în concordanţă cu cerinţele noii teorii, etapele construirii unui sistem formal axiomatic: definirea alfabetului, introducerea regulilor de bine formare a termenilor, a atomilor predicativi şi a formulelor bine formate în acest limbaj, alegerea formulelor primitive şi definirea formulelor derivate, alegerea axiomelor, fixarea regulilor de inferenţă în sistem şi, în sfârşit, demonstrarea teoremelor în sistem.

De data aceasta avem trei avantaje: 1 dispunem de o listă de teoreme demonstrate în logica propoziţiilor care-şi păstrează valabilitatea şi despre formulele bine formate în logica predicatelor; 2 ştim că fiecărei teoreme demonstrate putem să-i asociem o regulă de inferenţă adecvată; 3 putem utiliza teorema deducţiei în vederea demonstrării teoremelor în sistemul axiomatic.

Aceste avantaje vor fi, mai mult sau mai puţin, contrabalansate parţial de limbajul mai complex al logicii predicatelor, de complicarea regulilor de substituţie, de apariţia cuantificatorilor.

În cele ce urmează vom prezenta sistemul axiomatic Hilbert – Ackermann pentru logica predicatelor, urmând, în mare, etapele construirii unui sistem axiomatic reamintite mai sus. În partea finală a capitolului vom expune succint proprietăţile metateoretice ale acestui limbaj.

Universitatea Spiru Haret

1. **Limbajul sistemului axiomatic al logicii predicatelor**

Reamintim definiția limbajului formal al logicii predicatelor făcută în cap.1 din secțiunea a doua, din volumul I al cărții de față, apărută în anul 2000 în Editura Fundației *România de Mâine*.

Pentru a defini limbajul logicii predicatelor trebuie să definim mai întâi alfabetul acestui limbaj şi apoi regulile sale de bine formare.

1. Alfabetul logicii predicatelor cuprinde următoarele mulțimi de simboluri sau subalfabete:

$A_c = \{ a, b, c, a_1, b_{1...} \}$	constante individuale
$A_{vi} = \{ x, y, z, x_1, x_{2...} \}$	variabile individuale
$A_F = \{ f, g, h, f_1,... \}$	simboluri funcționale
$A_P = \{ P, Q, R, P_1,... \}$	simboluri predicative
$A_I = \{ = \}$	semnul identității
$A_Q = \{ \forall, \exists \}$	cuantificatori
$A_{CL} = \{ -, \&, v, \supset, \equiv \}$	conective logice
$A_G = \{ (,), [,] \}$	semne de grupare

Numim *alfabet* al logicii predicatelor mulțimea de simboluri elementare $A = A_{ci} \cup A_{vi} \cup A_F \cup A_P \cup A_i \cup A_Q \cup A_{CL} \cup A_G$.

Vom numi *expresie* o secvență de simboluri din alfabetul $A = A_{ci} \cup A_{vi} \cup A_F \cup A_P \cup A_i \cup A_Q \cup A_{CL} \cup A_G$.

În mulțimea expresiilor, după modul lor de alcătuire, în conformitate cu anumite reguli de bine formare, distingem: termeni, formule atomare, formule moleculare sau alte formule bine formate şi expresii ce nu sunt formule bine formate.

2. Dăm mai jos definiții constructive pentru conceptele de termen, formulă atomară şi formulă bine formată.

Definiția termenilor

T1. Dacă α aparține lui A_{ci} atunci α este un *termen*.

T2. Dacă α aparține lui A_{vi}, atunci α este un *termen*.

T3. Dacă f aparține lui A_F şi aritatea lui f, notată prin $\delta(f)$, este n şi $t_1,...,t_n$ sunt termeni, atunci f $(t_1,...,t_n)$ este un *termen*.

Potrivit lui T1 simbolurile a, b, c, a_1,... sunt termeni. Ele țin loc numelor proprii sau descripțiilor individuale. Aşa, de exemplu, putem avea a = Petru, b = Ion etc. Potrivit lui T2, x, y, z, x_1,... vor fi, la fel, termeni, dar termeni cu referință ambiguă, neprecizată. Ei țin loc particulelor din limba naturală, „cineva", „ceva", „cândva", „undeva".

Universitatea Spiru Haret

Regula T3 permite construirea termenilor compuşi. Dacă f şi g sunt simboluri funcționale monadice ce țin loc unor operații unare, cum ar fi, de exemplu, y este tatăl lui x, y = f (x) sau z este primul născut al lui x, z = g (x), atunci f (x) şi g (x) vor fi, de asemenea, termeni.

Dacă f_1 desemnează adunarea şi g_1 înmulțirea ca operații binare în **N** (se înțelege $\delta(f) = \delta(g_1) = 2$), atunci g_1 (f (x,y), z) va desemna tot un număr din **N** rezultat din înmulțirea sumei dintre x şi y cu numărul z.

Vom numi *termeni* expresiile scrise în subalfabetele A_{ci}, A_{vi}, A_F în conformitate cu regulile T1, T2, şi T3.

Termenii sunt, aşadar, constante individuale sau variabile individuale sau expresii alcătuite din acestea cu ajutorul unor semne funcționale prin care denumim obiecte dintr-un domeniu oarecare. Termenii țin locul numelor proprii şi descripțiilor individuale din limbile naturale.

Strict vorbind, termenii nu sunt formule logic-predicative, ci material de construcție pentru alcătuirea formulelor.

În formulele atomare termenii vor servi ca argumente pentru simbolurile predicative.

Admițând alfabetele A_{ci}, A_{vi}, A_F, atunci, conform cu regula T1 vor fi termeni a, b, c, a_1 şi b_1 şi conform cu regula T2 vor fi termeni x, y, z, x_1, x_2 şi dacă $f \in A_F$ şi $\delta(f) = 1$ şi $\delta(g) = 2$, atunci vor fi termeni compuşi: f(a), g(f(a), b), f(g(f(a), b)), g(f(g(f(a), b)), c) etc.

Se observă că un termen compus poate intra în continuare în structura altui termen compus.

Constantele individuale, de exemplu, a, b, c, a_1 pot fi privite drept simboluri funcționale degenerate sau de aritate 0. Când un semn funcțional f, are aritatea zero i.e. $\delta(f) = 0$, atunci f decade într–o constantă individuală. Un termen compus poate fi privit ca o formă funcțională. Aşa cum în algebră definim unele numere cu ajutorul unor operații algebrice, tot aşa în logica predicatelor definim unii termeni compuşi cu ajutorul simbolurilor funcționale. Un termen compus este o aplicare a unui simbol funcțional de aritate n la alți n termeni anterior definiți. Procedeul este iterativ.

Este util să menționăm că în scrierea termenilor din logica predicatelor putem utiliza trei moduri de scriere: prefixată, infixată şi postfixată.

În scrierea prefixată se scrie la începutul expresiei simbolul funcțional. În scrierea infixată simbolul funcțional se scrie la mijloc, ca + în aritmetică, 3 + 2; dimpotrivă, în scrierea postfixată se scriu întâi argumentele şi la urmă, în dreapta, simbolul funcțional.

Universitatea Spiru Haret

Definiția atomilor

Atomii sau formulele atomare sunt formule predicative elementare. Un atom este o aplicare a simbolului predicativ sau constantei predicative la un număr corespunzător de termeni.

P1. Dacă P este un simbol predicativ de aritate n, i.e. $\delta(P) = n$, şi $t_1,...,t_m$ sunt termeni atunci $P(t_1,...,t_m)$ este un *atom*. $\delta(P)$ indică numărul de argumente al unui predicat.

P2. Dacă t_1 şi t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este un *atom* sau o *formulă atomară.* Sub raport semantic egalitatea $t_1 = t_2$ vrea să spună că t1 şi t2 desemnează acelaşi obiect din domeniu.

Numim *atomi* sau *formule atomare* expresiile formate în conformitate cu regulile P1 şi P2.

Exemple

Q(a), P(x), R(y, z), S(f(a), g(y)) sunt formule atomare.

La fel, vor fi atomi predicativi expresiile: $y = 2x + 4$, $a = f(b)$.

Paradoxal ceea ce numim atom este, din punct de vedere sintactic, un agregat, un complex. Sub raport semantic atomii descriu proprietăți sau relații elementare cărora li se pot atribui valori de adevăr. Sunt cele mai simple formule din logica predicatelor despre care putem spune că sunt adevărate sau false. Termenii nu au valoare de adevăr, ci doar semnificație sau denotat. În structura atomilor nu apar niciodată conective logice, ci doar simboluri predicative, constante şi variabile individuale şi uneori semne funcționale.

Formule

P3. Atomii sunt formule bine formate în logica predicatelor.

P4. Dacă α este o formulă bine formată în logica predicatelor, atunci $\forall x\alpha(x)$ sau $\exists x\alpha(x)$ vor fi, de asemenea, formule bine formate.

P5. Dacă α şi β sunt formule bine formate în logica predicatelor, „-” este semnul negației şi * este un conectiv logic binar din A_{CL}, atunci $-\alpha$ şi $\alpha * \beta$ vor fi formule bine formate în logica predicatelor.

Formule

Numim *formule bine formate* în logica predicatelor formulele formate în conformitate cu regulile P1–P5.

Definiție. Numim *limbaj al logicii predicatelor* mulțimea tuturor formulelor bine formate, respectiv mulțimea tuturor formulelor obținute din alfabetul A definit mai sus prin aplicarea, de un număr finit de ori a regulilor P1–P5.

Exemple

Drept exemple de formule bine formate putem considera expresiile: P(a), R(a, b), R(x, b), Q(f(a), z), S(x, y, z), R2(x, g(x, z), h(a)) $\supset$ (P(x) & Q(g(x, z)) & T(h(a))), $\forall zQ(f(a), z)$, $\exists x\forall y\forall zS(x, y, z)$

Universitatea Spiru Haret

Numim *propoziție* o formulă logic-predicativă în care apar numai constante individuale sau în care toate variabilele sunt legate. Astfel în enumerarea de mai sus sunt propoziții: P(a), R(a, b), $\forall$zQ(f (a), z), $\exists$x$\forall$y$\forall$zS(x, y, z). Sunt formule predicative deschise sau *predicate* toate celelalte. In formula $\forall$zQ(f (a), z), z în $\forall$z este variabilă sub cuantificator, iar z în corpul formulei se numeşte *variabilă legată* de cuantificatorul universal $\forall$z. Expresia R2(x, g(x, z), h(a)) $\supset$ (P(x) & Q(g(x, z)) & T(h(a))) este un predicat de două variabile, x, z.

Un *predicat* este o formulă deschisă care are cel puțin o variabilă liberă.

Un termen t este *liber* pentru variabila x în formula α, dacă nici o apariție liberă a variabilei x în α nu apare în domeniul de acțiune al unui cuantificator $\forall$y sau $\exists$y, unde y este o variabilă ce apare în termenul t. Astfel termenul y este liber în raport cu variabila x din formula P(x), dar nu este liber în raport cu variabila x din formula $\forall$yP(x), căci, prin substituirea lui x cu y în $\forall$yP(x), un argument anterior liber ar deveni, după substituție, legat.

Prin substituirea unei variabile individuale dintr–o expresie printr-un termen ce conține şi el variabile, trebuie ca nici o variabilă din acesta să nu devină legată în formula obținută prin substituție, într-un context în care ea era liberă în formula inițială.

Observații

Obs 1. Este important de reținut că, în limbajul logicii predicatelor, atomii predicativi sunt, cumva, analogii variabilelor propoziționale; ei pot fi legați prin conective logice, tot aşa cum, în logica propozițiilor, variabilele propoziționale pot fi legate prin conective logice, generând astfel structuri propoziționale complexe. Prin legarea atomilor predicativi prin conective logice obținem structuri predicative complexe sau propoziții complexe.

Obs 2. Atomii predicativi sunt instrumente formale ce permit descrierea proprietăților şi relațiilor.

Obs 3. Atomii predicativi pot fi instanțiați sau neinstanțiați. Un atom instanțiat nu conține variabile libere; el are ca argumente pentru simbolul predicativ doar constante individuale şi va descrie, sub raport semantic, o propoziție, ce poate fi adevărată sau falsă. Un atom neinstanțiat nu este o propoziție, ci doar o structură aptă de a deveni propoziție, printr-o interpretare adecvată sau prin cuantificare. Trecerea de la atomii neinstanțiați la atomi instanțiați corespunde trecerii de la abstract la concret sau determinării şi aceasta se face prin aplicarea regulilor substituției în logica predicatelor de ordinul întâi.

Universitatea Spiru Haret

Obs 4. Atomii predicativi sunt „cărămizile" sau componentele elementare care intervin în procesul formalizării logice a cunoştinţelor dintr-un anumit domeniu de cunoaştere sau de activitate practică.

Prin consideraţiile de mai sus am parcurs primele două etape din cele şase etape ale construirii unui sistem formal axiomatic. Am definit alfabetul limbajului şi am introdus regulile de bine formare ale termenilor, ale atomilor şi formulelor în limbajul logicii predicatelor.

Am definit până acum limbajul formal al logicii predicatelor.

Spre deosebire de alfabetul logicii propoziţiilor în care interveneau numai trei subalfabete, unul pentru variabile, altul pentru conective logice şi un al treilea pentru semne de grupare, în logica predicatelor intervin opt subalfabete, fiecare dintre ele pentru o specie distinctă de semne, fiecare cu funcţii distincte: constante individuale, variabile individuale, semne funcţionale, simboluri predicative, semnul identităţii, cuantificatori, conective logice şi semne de grupare.

În plus, în logica predicatelor apar termenii ca o clasă de semne ce denumesc obiecte individuale. Aceştia intervin în alcătuirea atomilor predicativi şi a formulelor.

2. **Sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann al logicii predicatelor**

Trecem acum la prezentarea axiomatizării logicii predicatelor în versiunea Hilbert-Ackermann. Aceasta este de fapt o extindere sau supraetajare a axiomaticii logicii propoziţiilor prezentată în capitolul precedent.

Continuăm prezentarea celorlalte etape (3-6) ale construirii axiomaticii logicii predicatelor. În a treia etapă introducem definiţiile:

3. *Definiţii*

D1. $p \wedge q := - (- p \vee - q)$

D2. $p \supset q := - p \vee q$

D3. $p \equiv q := (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

D4. $\exists x P(x) = -\forall -P(x)$

Primele trei definiţii sunt reproduse din capitolul anterior despre axiomatizarea logicii propoziţiilor.

Definiţia D4 introduce cuantificatorul existenţial $\exists$ pe baza acceptării ca primitiv a cuantificatorului universal $\forall$.

În a patra etapă, introducem axiomele:

Universitatea Spiru Haret

4. Axiome

Ax1. $(p \vee p) \supset p$

Ax2. $p \supset (p \vee q)$

Ax3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

Ax4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

Ax5. $\forall xP(x) \supset P(t)$

Ax6. $P(t) \supset \exists xP(x)$

Primele patru axiome sunt axiomele sistemului Hilbert-Ackermann pentru logica propozițiilor. Ultimele două axiome sunt axiome specifice logicii predicatelor.

Axioma a cincea spune că dacă toate obiectele dintr-un domeniu au o proprietate P, atunci un obiect oarecare din acel domeniu specificat printr-un termen t va avea şi el proprietatea P. Ax5 descrie, într-un fel, relația de subalternare dintre judecățile universal afirmative şi cele particular afirmative. Ea ne aminteşte vag de pătratul logic.

Axioma Ax6 afirmă că dacă un obiect oarecare dintr-un domeniu specificat printr-un termen t are proprietatea P, atunci este adevărat că, în acel domeniu, există un obiect care are proprietatea P.

În cea de a cincea etapă introducem regulile de inferență:

5. *Reguli de inferență*

a. *Reguli ale substituției*

a1. Regula substituirii variabilelor propoziționale. Dacă α este o formulă de logica predicatelor în care apare o variabilă propozițională, i.e. un simbol predicativ P fără argumente astfel că $\delta(P) = 0$ şi β este o formulă bine formată, atunci noi putem substitui variabila P prin formula β în toate aparițiile variabilei P în α, dacă în α şi în β nu există nici o variabilă individuală comună.

a2. Regula substituirii variabilelor individuale. Dacă α este o formulă de logica predicatelor în care apare o variabilă individuală liberă x, atunci variabila individuală x poate fi substituită de orice termen t, dacă aceasta este făcută în toate aparițiile lui x în α şi dacă în termenul t nu apare nici o variabilă ce apare legată în α.

a3. Regula substituirii variabilelor predicative. Dacă α este o formulă de logica predicatelor în care apare o variabilă predicativă F astfel că $\delta(F) = n$, atunci noi putem substitui simbolul predicativ F printr-o formulă bine formată β cu cel puțin n variabile libere, având grijă să respectăm următoarele cerințe: Dacă variabilele libere din formula substituitoare β sunt $y_1,\ldots,y_{n+r}$, cu $r \geq 0$ şi dintre acestea au fost selectate un şir $y_1,\ldots,y_n$ şi dacă $F(v_1,\ldots, v_n)$ este o apariție

oarecare a lui F în α, atunci noi vom substitui apariția $F(v_1,\ldots, v_n)$ prin $\beta(v_1,\ldots, v_n, y_{n+1}.. ., y_{n+r})$. Substituția trebuie efectuată în toate aparițiile lui F din α şi numai dacă β şi α nu au nici o variabilă în comun.

b. *Reguli ale cuantificatorilor*

b1. $A \supset B(x) \models A \supset \forall yB(y)$, dacă x este liber în B şi nu apare în A, indiferent de faptul dacă y = x sau y ≠ x şi y nu apare liber în A şi nu apare deloc în B(Regula cuantificării universale a consecventului, de fapt a unei variabile libere care apare ca argument într-un predicat din consecvent). Vom nota această regulă prin ∀C sau QC.

Regula b1 poate fi scrisă şi ca regulă a introducerii cuantificatorului universal sub forma:

$A(x) \vdash \forall yA(y)$

Dacă A este adevărat despre un obiect *oarecare* din D, atunci A este adevărat despre *orice* obiect din D. Numim această regulă *regula introducerii cuantificatorului universal* şi o notăm prescurtat prin I∀;

b2. $B(x) \supset A \vdash \exists yB(y) \supset A$, dacă x este liber în B şi nu apare în A, indiferent de faptul dacă y = x sau y ≠ x şi y nu apare liber în A şi nu apare deloc în B (Regula cuantificării existențiale a antecedentului).

Vom nota această regulă prin ∃A sau QA.

b3. $Q1xP(x)\otimes Q2xR(x) \vdash Q1xP(x)\otimes Q2yR(y)$, unde Q1 şi Q2 sunt metavariabile pentru cuantificatori distincți iar ⊗ este o metavariabilă pentru ∧ sau ∨. (Regula redenumirii unei variabile care apare legată de doi cuantificatori diferiți) O vom prescurta prin RV.

c) *Modus Ponens*, MP, Daca $A \supset B$ este teoremă şi A este teoremă, atunci şi B este teoremă.

Prescurtat: $\vdash (A \supset B), \vdash A$

$\vdash B$

d. *Regula substituirii echivalentelor*. Dacă A este o axiomă în care apare subformula B şi $B \equiv C$ este o definiție sau o teoremă anterior demonstrată, atunci este teoremă formula obținută din A prin substituirea lui B prin echivalenta sa C.

Regulile de inferență din axiomatica logicii predicatelor sunt mai numeroase şi mai complicate decât cele din axiomatica logicii propozițiilor. Logica predicatelor este şi ea, într-un anumit sens o logică a propozițiilor: o logică a propozițiilor în care apar cuantificatori.

6. Teoreme

T1. $\forall x(P(x) \vee -P(x))$

1. $p \vee - p$ (vezi T4 în capitolul precedent)
2. $P(x) \vee -P(x)$ (RS, 1), p/ P(x))

3. $(p \vee - p) \vdash (P(x) \vee -P(x))$ (1, 2)
4. $(p \vee - p) \supset (P(x) \vee -P(x))$ (TD, 3)
5. $(p \vee - p) \supset \forall x(P(x) \vee -P(x))$ (QC, 4)
6. $\forall x(P(x) \vee -P(x))$ (MP, 5, 1)

T2 $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$

1. $\forall xP(x) \supset P(t)$ (Ax5)
2. $P(t) \supset \exists xP(x)$ (Ax6)
3. $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$ (Tranz, 1, 2)

T3. $\forall x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \forall xP(x))$ (x nu apare în A)

1. $\forall x(A \vee P(x)) \supset(A \vee P(t))$ (RS a3, P/ A$\vee$ P(x), Ax5)
2. $\forall x(--A \vee P(x)) \supset(--A \vee P(t))$ (RS, A/--A, 1)
3. $\forall x(-A \supset P(x)) \supset(-A \supset P(t))$ (RE, D2, 2)
4. $\forall x(((-A \supset P(x)) \wedge -A) \supset P(t))$ (Legea importației, 3)
5. $\forall x(((-A \supset P(x)) \wedge -A) \supset \forall tP(t))$ (QC, 4)
6. $\forall x(((-A \supset P(x)) \wedge -A) \supset \forall x P(x))$ (RR, 5)
7. $\forall x(((-A \supset P(x)) \supset (-A \supset \forall x P(x))$ (Legea exportației, 6)
8. $\forall x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \forall xP(x))$ (RE, 7, D2)

Teorema T3 este o parte dintr-o echivalență logică pe care noi am numit-o regula extinderii fictive a domeniului unui cuantificator (vezi vol. 1, p299 formula 13) care se folosește la aducerea unei formule la o formă normală prenexă, în care toți cuantificatorii apar în față ca un prefix.

În loc de a utiliza axioma Ax5 cu substituțiile menționate mai sus putem pleca de la principiul identității demonstrat în sistemul axiomatic de logica propozițiilor ca teorema T2 şi în acesta să facem apoi substituțiile corespunzătoare:

1. $p \supset p$
2. $(A \vee P(x)) \supset(A \vee P(x))$

Aplicăm apoi la 2. Regula introducerii cuantificatorului universal, I$\forall$:

3. $\forall x((A \vee P(x)) \supset(A \vee P(x)))$

Substituim în 3 A/--A şi continuăm prin aplicarea regulilor din varianta expusă mai sus, bazate pe legile de importație şi exportație, substituirea echivalentelor, etc.

Demonstrația lui T3, în oricare dintre cele două variante, este corectă, dar prea puțin intuitivă. Putem obține o demonstrație mai intuitivă a aceleiaşi teoreme, făcând uz de calculul natural şi de teorema deducției. Admitem ca ipoteză antecedentul şi deducem prin scheme de inferență consecventul. Aplicăm după aceea teorema deducției.

Universitatea Spiru Haret

1. $\forall x(A \vee P(x))$	ip.
2. $A \vee P(a1)$	(E$\forall$)
3. $A \vee P(a2)$	(E$\forall$)
----------	
4. $A \vee P(an)$	(E$\forall$)
5. $A \vee P(a1) \wedge A \vee P(a2) \wedge \ldots \wedge A \vee P(an)$	(I $\wedge$, 2, 3, 4)
6. $A \vee (P(a1) \wedge P(a2) \wedge \ldots \wedge P(an))$	(legea distributivității, 5)
7. $A \vee \forall xP(x))$	(I$\forall$, 6)
8. $\forall x(A \vee P(x)) \vdash A \vee \forall xP(x))$	(1-7)
9. $\theta \vdash \forall x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \forall xP(x))$	(TD, 8)

Obs 1. Demonstrația alternativă propusă nu este mai scurtă decât prima, dar este una stereotipă şi de regularitate. În plus, ea este mai apropiată de raționamentul natural. Formulele 2,3 şi 4 sunt obținute prin regula eliminării cuantificatorului universal care spune că dacă se afirmă o proprietate despre *toate* obiectele dintr-un domeniu, se afirmă acea proprietate despre fiecare obiect aparte. Cuantificarea universală este tot una cu un şir finit sau infinit de conjuncții după care obiectul a1 din D are proprietatea P sau de a fi A sau P, obiectul a2 are proprietatea P sau de a fi A sau P. Formula 5 a rezultat din aplicarea regulii introducerii conjuncției la 2, 3 şi 4. Formula 6 rezultă din 5 printr-o lege de distributivitate. Formula 7 rezultă din 6 prin regula introducerii cuantificatorului universal. Dacă a1 şi a2 şi … an au fiecare o proprietate P, atunci oricare ar fi un obiect din domeniul D, acesta va avea proprietatea P. Legea introducerii cuantificatorului s-a aplicat numai la termenul al doilea al disjuncției 6. Formula 8 spune că din ipoteza 1 am dedus propoziția 7. Simbolul $\models$ redă consecința logică semantică. Trecerea de la 8 la 9 se face prin teorema deducției (vezi cap 1 pp 41-48) care spune că dacă dintr-un set de formule Γ se deduce o anumită consecință B, atunci se deduce din mulțimea vidă că acel set de formule implică acea consecință, i.e. $\theta \models \Gamma \supset B$.

Obținerea unei formule din mulțimea vidă de ipoteze (vezi 9) înseamnă că aceasta este adevărată necondiționat.

Înainte de a face amplu uz de teorema deducției este util să zăbovim un moment asupra teoremei deducției în logica predicatelor şi să facem câteva reflecții asupra valorii metodologice a teoremei deducției pentru prelucrarea datelor unei probleme sau a datelor dintr-un sistem expert.

Universitatea Spiru Haret

3.**Teorema deducţiei în logica predicatelor**

Demonstraţia teoremei deducţiei în logica predicatelor este, în mare, similară cu demonstraţia teoremei cu acelaşi nume din logica propoziţiilor. Ea presupune doar asimilarea unor restricţii izvorâte din specificul limbajului logicii predicatelor şi a demonstraţiilor în acesta.

Teorema deducţiei din logica propoziţiilor nu se poate aplica nemodificată şi neajustată, fără riscuri la logica predicatelor. Aşa de exemplu, dacă din A se deduce $\forall xA(x)$ nu putem conchide că întotdeauna va fi adevărat în logica predicatelor $A \supset \forall xA(x)$.

Să ne imaginăm un domeniu de interpretare D ce conţine cel puţin două obiecte c şi d, i.e. $|D| = 2$, atunci dacă metavariabila A poate fi instanţiată la P(x) şi numai obiectul c din D satisface predicatul P, adică este adevărat P(c), atunci P(x) va fi realizabilă pentru orice secvenţă de atribuiri s = (b1, b2,…,) în care b1 = c, dar instanţierea consecventului $\forall xP(x)$ nu va fi adevărată căci nu va fi adevărat P(d).

Revenim la prezentarea teoremei deducţiei în logica predicatelor.

Facem, mai întâi, câteva precizări şi introducem câteva definiţii preliminare.

Ipotezele într-o demonstraţie nu sunt legi logice, ci formule realizabile. La nivel ontic, ipotezele descriu raporturi de dependenţă cauzală sau nomologică, reguli empirice, norme etc.

Este interesant de observat că, sub raport epistemologic, toate axiomele unei teorii fizice sau tehnico-aplicative pot fi introduse într-un sistem axiomatic formal ca ipoteze suplimentare la axiomele logice ale acestuia. Desigur, putem axiomatiza o teorie fizică postulând ca axiome doar „ipotezele" ei, respectiv enunţurile ce descriu raporturi de dependenţe dintre clase de obiecte, stări şi evenimente, schemele de inferenţă intervenind, oarecum din afara teoriei, la nivel metateoretic, ca tehnică de dezvoltare a teoriei.

Într-un sistem axiomatic derivarea unei teoreme conservă validitatea. O demonstraţie a unei propoziţii dintr-un set de ipoteze sau dintr-o bază de cunoştinţe conservă doar realizabilitatea. O consecinţă logică va fi adevărată în toate cazurile sau situaţiile în care sunt adevărate ipotezele sau baza de cunoştinţe. (elementele mulţimii Γ). Datele unei probleme de matematică sau de fizică sau informatică sunt mereu pe post de set de ipoteze, iar soluţia acesteia va fi întotdeauna o consecinţă obţinută pe cale logică sau prin aplicarea unui algoritm.

Universitatea Spiru Haret

Ceea ce se conservă în rezolvarea unei probleme este veridicitatea, interpretarea sau modelele. Din acest punct de vedere rezolvarea unei probleme este o extindere a modelului parţial oferit de datele problemei. Datele unei probleme descriu o situaţie epistemică iniţială, iar soluţia problemei descrie mai complet, prin adăugirea de noi descripţii aceiaşi situaţie ontică, dar nu aceiaşi situaţie pragmatic-cognitivă.

Dar să revenim la scopul tehnic al acestui paragraf, teorema deducţiei în logica predicatelor.

Spunem că demonstrarea unei teoreme sau a unei aserţiuni este dependentă de o anumită ipoteză dacă acea ipoteză apare în textul ei demonstrativ. Dimpotrivă, spunem că demonstrarea unei teoreme sau a unei aserţiuni este independentă de o ipoteză sau presupunere, dacă aceasta nu intervine, în mod necesar, în demonstrarea ei.

Elliott Mendelson dă în cartea sa *Introduction to Mathematical Logic* trei formulări teoremei deducţiei în logica predicatelor. Prima formulare, F1, este mai tare şi le implică pe următoarele două; cea de a doua F2 este implicată de prima şi o implică pe a treia şi ultima mai restrânsă si derivă din prima. Reproducem mai jos formularea mai generală.

Teorema deducţiei în logica predicatelor

Formularea F1. Dacă din *Γ, A se deduce B, i.e. Γ, A* $\vdash$ *B astfel că B se deduce numai din Γ sau dacă deducerea lui B depinde şi de A şi regula introducerii cuantificatorului universal, I∀, nu se aplică asupra formulelor derivate din A.* Atunci: $\Gamma \vdash A \supset B$

Demonstraţie. Fie B1, B2,…, Bn = B textul demonstrativ al derivării lui B din Γ, A. Demonstrăm prin inducţie asupra lungimii textului demonstrativ că pentru orice Bi, cu $1 \leq i \leq n$, din $\Gamma \vdash A \supset B$.

Arătăm, mai întâi, că aceasta este adevărat pentru cazul n = 1, respectiv pentru cazurile când B este o axiomă sau o ipoteză. Pentru fiecare din aceste două cazuri $\Gamma \vdash A \supset B$ se obţine dintr-o teoremă demonstrată în sistemul axiomatic al logicii propoziţiilor şi anume din teorema T9 $p \supset (q \supset p)$ sau prima axiomă a lui G.Frege. Într-adevăr, dacă vom substitui în T9 pe p prin B şi pe q prin A obţinem $B \supset (A \supset B)$ şi cum B este o axiomă sau o ipoteză pe care trebuie să le admitem, obţinem din T9 şi B, prin *Modus Ponens,* $A \supset B$. Dacă chiar ipoteza A apare în textul demonstrativ, atunci din teorema T2 $p \supset p$ obţinem, prin substituţie, $A \supset A$ şi cum A din consecventul formulei precedente este un pas Bi din textul demonstrativ obţinem $\Gamma \vdash A \supset B$

Cu aceasta am epuizat cazurile posibile pentru iniţializarea inducţiei, respectiv n = 1.

Universitatea Spiru Haret

Considerăm acum cazul în care Bi este obținut prin *Modus Ponens* din două formule anterior derivate Bj şi Bk, cu Bk de forma Bk = Bj ⊃ Bi şi evident j şi k < i. In acest caz formula A ⊃ B este obținută din formulele anterioare A ⊃ Bj şi A ⊃ Bk şi din teorema T32 (p ⊃ (q ⊃r)) ⊃ ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r)) din sistemul axiomatic Hilbert Ackermann al logicii propozițiilor. Această teoremă este axiomă în sistemul creat de G. Frege. Într-adevăr, dacă admitem că:

1. A ⊃ Bj ip.
2. A ⊃ Bk ip.
3. Bk ≡ Bj ⊃ Bi ip.
4. (p ⊃ (q ⊃r)) ⊃ ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r)) (T32)

atunci din 2 şi 3 rezultă prin regula substituirii echivalentelor:

5. A ⊃ (Bj ⊃ Bi)

Dacă efectuăm acum în 4 substituția lui p prin A , a lui q prin Bj şi al lui r prin Bi, atunci obținem:

6. (A ⊃ (Bj ⊃Bi)) ⊃ ((A ⊃Bj) ⊃ (A ⊃Bi))

Mai departe, din 6 şi 5 obținem prin *Modus Ponens*:

7. (A ⊃Bj) ⊃ (A ⊃Bi)

iar din 7 şi 1 obținem, tot prin *Modus Ponens*:

8. (A ⊃Bi)

ceea ce era de demonstrat pentru situația în care o formulă din textul demonstrativ se obține din alte două formule anterioare.

Trecem acum la demonstrarea cazurilor proprii logicii predicatelor. Să presupunem, în sfârşit, că o formulă Bj din textul demonstrativ B1,B2,…Bj,…, Bn = B este o formulă de forma $\forall x_k Bj$. Presupunând că Γ, A⊢A ⊃Bj şi că Bj nu depinde de A, atunci Γ ⊢A ⊃Bj. Mai departe, întrucât Bj nu depinde de A, putem aplica regula b1 despre introducerea cuantificatorului universal în consecvent b1 A ⊃B(x) ⊢ A ⊃∀yB(y) şi să obținem:

9. Γ ⊢ $\forall x_k Bj(x_k)$

Din 9 pe baza teoremei T9 p ⊃ (q ⊃ p) printr-o substituție adecvată şi *Modus Ponens* obținem:

10. ⊢ $\forall x_k Bj(x_k) \supset (A \supset \forall x_k Bj(x_k))$

de unde prin *Modus Ponens* aplicat la 10 şi 9 obținem:

11. A ⊃ $\forall x_k Bj(x_k)$

Dacă x_k nu este o variabilă liberă în formula A, atunci potrivit schemei de axiome A5 va avea loc:

12. $\forall x_k(A \supset Bj) \supset (A \supset \forall x_k Bj(x_k))$

Universitatea Spiru Haret

Cum însă avem deja $A \supset Bj$, obţinem prin regula introducerii cuantificatorului universal formula:

13. $\forall x_k(A \supset Bj)$

Mai departe din 12 şi 13 rezultă prin *Modus Ponens*:

14. $A \supset \forall x_k Bj(x_k)$

Prin aceasta am încheiat demersul inductiv şi teza de demonstrat o obţinem prin i= n.

Formularea F2. *Dacă din Γ, A se deduce B , i.e. Γ, A ├ B şi putem construi un text demonstrativ fără să aplicăm regula introducerii cuantificatorului universal la variabile libere din formula A, atunci din Γ ├A ⊃ B*

În cazul formulării 2 se exclude posibilitatea folosirii regulii introducerii cuantificatorului universal la formulele derivate din ipoteza A pentru derivarea lui B, dar nu sunt excluse derivări obţinute din A prin alte reguli de inferenţă.

Formularea 3. *Dacă formula A este închisă şi din Γ, A ├ B, atunci din Γ ├ A ⊃ B*

Dacă formula A este închisă, adică are toate variabilele legate, atunci A este o propoziţie şi evident i se aplică teorema deducţiei ca în logica propoziţiilor.

În cele ce urmează vom face o apropiere dintre teorema deducţiei şi legea exportaţiei din logica propoziţiilor şi din logica predicatelor.

4. **Teorema deducţiei şi legea exportaţiei**

Înainte de a trece la demonstrarea într-o manieră nouă a teoremei deducţiei reamintim cititorului nostru două chestiuni. Mai întâi, trei legi logice: legile exportaţiei, importaţiei şi legea comutativităţii antecedenţilor într-o implicaţie regulată. Apoi relaţia de echivalenţă între trei propoziţii despre consecinţa logică, legile logice şi contradicţii, demonstrată în primul volum al scrierii de faţă (vezi: cap. 2 paragr. 6).

Legea exportaţiei constă în convertirea membrilor unui antecedent conjunctiv ce implică un consecvent oarecare într-un şir de antecedenţi distincţi pentru acelaşi consecvent.

$$((p \wedge q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r)) \qquad (1)$$

Cu ajutorul acestei legi trecem de la o implicaţie având antecedentul alcătuit dintr-o conjuncţie a două propoziţii, p şi q, la o formulă cu două ipoteze introduse una după alta care condiţionează adevărul aceluiaşi consecvent.

Universitatea Spiru Haret

Legea importației este conversa legii descrise mai sus:

$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \wedge q) \supset r)$ (2)

Evident, din admiterea acestor două formule rezultă din regula introducerii echivalenței şi aplicarea de două ori a schemei *Modus Ponens* echivalența:

$((p \wedge q) \supset r) \equiv (p \supset (q \supset r))$ (3)

Putem concepe o generalizare a legii exportației sub forma

$(p1 \wedge p2 \wedge \ldots \wedge pn) \supset r) \equiv (p1 \supset (p2 \supset \ldots \supset (pn \supset r)))\ldots)$ (4)

$(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$ (5)

Ca şi (4) de deasupra, formula (5) poate fi scrisă generalizat şi ca o echivalență. Lăsăm pe seama cititorului nostru această activitate de rutină.

Cele trei propoziții logice la care ne-am referit la început sunt:

1. $H_1,\ldots,H_n \vdash B$ (6)
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \supset B$ este lege logică. (7)
3. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge -B$ este contradicție. (8)

Enunțurile de la punctele 1,2 şi 3 sunt *logic echivalente*, sunt adevărate şi false în acelaşi timp. Cititorul găseşte demonstrația acestor echivalențe la paginile pp 68-70 din volumul întâi al lucrării de față.

Dar să ne întoarcem la teorema deducției. Admitem antecedentul teoremei deducției şi restricțiile stipulate de Elliot Mendelson pentru acesta:

1. $\Gamma, A \vdash B$ ip
2. $\Gamma \vdash B$ ip. supl 1
3. A este o formulă închisă ip. supl 2
3. $\Gamma = \{ H1,H2,\ldots Hn \}$. Ip. supl 3

Ținând seama de 1 şi 3 de mai sus putem scrie:

4. $\{ H1,H2,\ldots Hn, A \} \vdash B$

Propoziția 4 de mai sus poate fi rescrisă pe baza echivalenței demonstrate în volumul 1 la pp 68-70 ca:

5. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge A) \supset B = T$

Din 5 rezultă imediat prin regula substituirii echivalențelor pe baza lui (4) de mai sus formula:

6. $H_1 \supset (H_2 \supset \ldots \supset (H_n \supset (A \supset B))\ldots)$

Obs. 1. Variabilele propoziționale din 6 vor putea fi substituite prin atomi predicativi în conformitate cu regula a1, căci 6 nu conține nici o variabilă individuală şi nu există pericolul suprapunerii domeniilor variabilelor individuale legate.

Obs. 2. Dacă prin substituția operată asupra lui 6 prin atomi predicativi cu variabile libere, putem aplica asupra lui 6 regula introducerii

Universitatea Spiru Haret

cuantificatorului universal în consecvent, în B, înaintea parantezei din fața lui Hn, din fața lui Hn-1, … din fața lui H2 etc.

Obs. 3. Pe baza comutativității implicanților din implicațiile regulate putem schimba *ad libitum* ipotezele, tot așa cum în rezolvarea unei probleme avem posibilitatea să facem uz de datele problemei indiferent de ordinea în care sunt introduse de autor în textul problemei .

Obs. 4. În cazul când derivarea lui B se produce fără utilizarea lui A, atunci mulțimea ipotezelor folosite este mulțimea Γ și derivarea este independentă de A.

Obs. 5. Dacă în derivare facem uz de ipoteza A, atunci nu avem voie să aplicăm asupra ei regula introducerii cuantificatorului universal.

Obs. 6. Dacă A este o formulă închisă, atunci A va fi o propoziție și va putea fi introdusă ca ipoteză prin legea exportației, cum se întâmplă în logica propozițiilor. În acest caz se dă satisfacție formulării a treia din cele trei formulări date de Mendelson.

Vom încheia cu observația metodologică după care teorema deducției este intim legată de raționamentul din ipoteze. Ipotezele sunt un pachet de informații adăugate din lumea empirică la legile logice.

În sistemele axiomatice legile logice se aplică asupra legilor logice ca atare. În teoriile științifice empirice legile logice se aplică unor postulate și axiome cu semnificație referențială sau denotativă, cu valoare descriptivă despre lumea reală sau despre datele unei probleme.

Nu putem gândi fără să folosim legi și scheme logice. Discursul biblic, din Vechiul testament sau din Noul Testament, face uz de scheme logice, de argumente și contraargumente, analizele psihologice ale unui prozator se fac tot în perimetrul unui discurs rațional logic. Dar scriitorul face mai mult decât omul de știință uz de funcția expresivă, doxastică și apreciativă a limbajului comparativ cu cea direct descriptivă, decât omul de știință. La fel, discursul jurnalistului este deopotrivă descriptiv, analitic și valorizator la jurnaliști înzestrați cu personalitate și criterii proprii de evaluare. Ceilalți sunt ieniceri ideologici și colportori de știri banale. Un ziarist inteligent nu-și subapreciază niciodată cititorul și scrie accesibil și pătrunzător încercând să înalțe pe cititorul său la nivelul său de competență intelectuală și de exigențe civice morale. În aceste cazuri, el face o argumentare convingătoare și validă. Dacă are, pe lângă o documentare adecvată și o cultură intelectuală, inclusiv logică, aptă de a-l feri de paralogisme și sofisme, atunci argumentează convingător și valid. Dacă este subliminar intelectual, ne îneacă în arguții și metafore de școlar silitor.

Universitatea Spiru Haret

5. **Utilizarea teoremei deducţiei şi demonstraţia din ipoteze**

Facem uz, în continuare de demonstraţia din ipoteze, de schemele de inferenţe ale calculului natural şi de teorema deducţiei demonstrată în două versiuni în capitolul anterior. Un raţionament din ipoteze este un raţionament iniţiat de un agent cognitiv sau rezolvitor de problemă care face uz de datele explicite ale unei probleme la care adaugă reguli, clauze şi algoritmi cunoscuţi de el anterior pentru a afla pe cale logic-inferenţială răspunsuri la o serie de întrebări specificate de autorul problemei sau descoperite de el singur. Oamenii dotaţi sunt apţi de a răspunde articulat la întrebările puse de alţii. Oamenii inteligenţi şi cu spirit inventiv descoperă şi rezolvă probleme noi şi-i pot învăţa şi pe alţii să procedeze eficient ca ei.

Orice set de date factuale, de legi sau principii valabile într-un domeniu al naturii sau într-o activitate umană ne plasează într-o lume posibilă sau într-o *situaţie cognitivă* descrisă printr-o bază de cunoştinţe specifică. Dacă la această bază de cunoştinţe mai adăugăm o lista de întrebări descrisă printr-un set de predicate derivate, reductibile la lista de atomi utilizaţi în descrierea bazei de cunoştinţe, atunci obţinem o *problemă rezolvabilă* cu metode inferenţial computaţionale din baza de cunoştinţe date. Nu trebuie în acest caz să uităm că ecuaţiile algebrice în care apar diferite operaţii unare sau binare sunt o specie de atomi predicativi de forma t1 = t2 şi că un astfel de atom descrie un obiect unic prin doi termeni echireferenţiali.

O mulţime de ipoteze poate descrie şi aserţiunile acceptate de un participant la o dispută argumentativă. Prelucrarea logică adecvată şi corectă a mulţimii de ipoteze şi aserţiuni necondiţionate ce descriu opinia unui agent ca şi a mulţimii de formule ce descrie opinia interlocutorului său este o operaţie preliminară pentru a putea descrie o dispută argumentativă.

Toate uneltele logicii, scheme de inferenţă, metode de decizie, algoritmi, definiţii, clasificări pot fi puse în lucru pentru a prelucra o bază de cunoştinţe.

Logicianul este astăzi arhitect al edificării unor baze de cunoştinţe din sistemele expert şi din cele de inteligenţă artificială.

Dar să revenim la demonstrarea de teoreme în logica predicatelor.

Putem demonstra, utilizând teorema deducţiei conversa teoremei T3, care este regula extinderii fictive a domeniului unui cuantificator:

Universitatea Spiru Haret

T4. $(A \vee \forall x P(x)) \supset \forall x(A \vee P(x))$

1. $(A \vee \forall x P(x))$ ip.
2. $A \vee P(a1)$
3. $A \vee P(a2)$

   …….
4. $A \vee P(an)$
5. $A \vee P(a1) \wedge A \vee P(a2) \wedge \ldots \wedge A \vee P(an)$ (I $\wedge$, 2, 3, 4)
6. $A \vee (P(a1) \wedge P(a2) \wedge \ldots \wedge P(an))$ (legea distributivităţii, 5)
7. $\forall x\,(A \vee P(x)$ (I $\forall$, 6)
8. $(A \vee \forall x P(x)) \vdash \forall x\,(A \vee P(x)$ (1 –7)
9. $\theta \vdash (A \vee \forall x P(x)) \supset \forall x(A \vee P(x))$ (TD, 8.)

Teorema T4 ne permite să trecem de la o formulă de forma: $(A \vee \forall x P(x))$ la o formulă de forma: $\forall x(A \vee P(x))$, să trecem cuantificatorul $\forall x$ în faţa, peste formula A, care, se presupune, nu conţine variabila x. Dacă A nu conţine variabila x, atunci cuantificatorul $\forall x$ leagă aceleaşi variabile libere, indiferent de faptul că apare imediat în faţa lui P(x) sau mai departe de acesta.

Din cele două teoreme rezultă echivalenţa:

T5. $(A \vee \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \vee P(x))$

1. $(p \supset q) \supset ((\, q \supset p) \supset (p \equiv q))$ (L Prop.)
2. $(\forall x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \forall x P(x))) \supset (((A \vee \forall x P(x)) \supset$
   $\forall x(A \vee P(x)) \supset ((\forall x(A \vee P(x)) \equiv (A \vee \forall x P(x)))$
   (RS, 1, p/ $\forall x(A \vee P(x))$, q/ $(A \vee \forall x P(x))$
3. $(A \vee \forall x P(x)) \supset \forall x(A \vee P(x)) \supset$
   $(\forall x(A \vee P(x)) \equiv (A \vee \forall x P(x)))$
   (MP, 2, T3)
4. $(\forall x(A \vee P(x)) \equiv (A \vee \forall x P(x)))$ (MP, 3,T4)

Şi în axiomatica logicii predicatelor se pot demonstra reguli de inferenţă derivate. Demonstrăm regula de inferenţă derivată:

RD1. $A \supset (B \supset C(x)) \vdash A \supset (B \supset \forall x C(x))$

Demonstraţie

1. $A \supset (B \supset C(x))$ ip.
2. $(A \wedge B) \supset C(x)$ (legea importaţiei, 1)
3. $(A \wedge B) \supset \forall x C(x)$ (I$\forall$C, introd. cuantific. universal în consecvent)
4. $A \supset (B \supset \forall x C(x))$ (legea exportaţiei, 3)
5. $A \supset (B \supset C(x)) \vdash A \supset (B \supset \forall x C(x))$

T6. $p \supset \forall x(p \vee Q(x))$

1. $p \supset (p \vee q)$ (Ax 2)
2. $p \supset (p \vee Q(x))$ (RS, 1, q/Q(x))
3. $p \supset \forall x\,(p \vee Q(x))$ (I$\forall$C, introd. cuantific. universal în consecvent)

Din T5 putem dezvolta uşor o teoremă condiţională de forma:

T7. $(A \supset \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \supset P(x))$

1. $(A \vee \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \vee P(x))$ (T5)
2. $(-A \vee \forall x P(x)) \equiv \forall x(-A \vee P(x))$ (RS, 1)
3. $(A \supset \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \supset P(x))$ (RE, 2, D2)

T8. $(A \wedge \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \wedge P(x))$

1. $A \wedge \forall x P(x)$
2. A ($E\wedge$. 1)
3. $\forall x P(x)$ ($E\wedge$. 1)
4. $P(a1)$ ($E\forall$, 3)
5. $P(a2)$ ($E\forall$, 3)
6. -------
7. $P(an)$ ($E\forall$, 3)
8. $A \wedge P(a1)$ ($I\wedge$, 2,4)
9. $A \wedge P(a2)$ ($I\wedge$, 2,5)
10. $A \wedge P(a3)$ ($I\wedge$, 2,7)
11. $\forall x (A \wedge P(x))$ ($I\forall$, 8, 9, 10)
12. $A \wedge \forall x P(x) \vdash \forall x (A \wedge P(x))$ (1-11)
13. $\theta \vdash (A \wedge \forall x P(x)) \supset \forall x(A \wedge P(x))$ (TD, 12)
14. $\forall x(A \wedge P(x))$ ip.
15. $A \wedge P(a1)$ ($E\forall$, 14)
16. $A \wedge P(a2)$ ($E\forall$, 14)

---

17. $A \wedge P(an)$ ($E\forall$, 14)
18. $A \wedge (P(a1) \wedge P(a2) \wedge \ldots \wedge P(an))$ (asociativ, 15,16,17)
19. $A \wedge \forall x P(x)$ ($I\forall$, 18)
20. $\forall x(A \wedge P(x)) \vdash A \wedge \forall x P(x)$ (15-19)
21. $\theta \vdash \forall x(A \wedge P(x)) \supset A \wedge \forall x P(x)$ (TD, 20)
22. $(A \wedge \forall x P(x)) \equiv \forall x(A \wedge P(x))$ (Lprop,RE,13, 21)

Teoremele T7 şi T8 la un loc descriu regula extinderii fictive a domeniului unui cuantificator universal peste o formulă A în care nu apare variabila de sub cuantificator şi în care A şi formula cuantificată este legată prin $\vee$ sau prin $\wedge$.

Două teoreme similare pot fi demonstrate şi pentru cuantificatorul existenţial.

E1. $(A \vee \exists x P(x)) \equiv \exists x(A \vee P(x))$

E2. $(A \wedge \exists x P(x)) \equiv \exists x(A \wedge P(x))$

Pentru obţinerea lor putem folosi principiul dualităţii sau putem utiliza scheme clasice de calcul natural. De data aceasta vom folosi

regulile excluderii cuantificatorului existenţial. Pentru revederea principiului dualităţii cititorul poate reciti unele pagini din vol. 1 cap. 2, paragraful 3 şi din cap. 6 paragraful 9.9 p. 190-191.

Fiind o echivalenţă, E1 presupune demonstrarea mai întâi a implicaţiei de la stânga la dreapta care descrie ceea ce noi am numit o „extindere fictivă" a domeniului unui cuantificator existenţial şi apoi a implicaţiei de la dreapta la stânga care descrie o „restrângere fictivă" a domeniului unui cuantificator. Este extindere fictivă pentru că mărim domeniul prin includerea formulei A, care nu conţine variabila x de sub cuantificator. La fel, vom avea o restrângere fictivă pentru că excludem din domeniu o formulă ce nu conţine variabila de sub cuantificator.

T9. $(A \vee \exists x P(x)) \supset \exists x(A \vee P(x))$

1. $A \vee \exists x P(x)$	ip.
2. A	ip. supl1
3. $\exists x P(x)$	ip. supl 2
4. P(a1)	(E∃, 3)
5. $A \vee P(a1)$	(I∨, 2, 4)
6. $\exists x(A \vee P(x))$	(I∃, 5)
7. $A \vee \exists x P(x) \vdash \exists x(A \vee P(x))$	(1-6)
8. $\theta \vdash (A \vee \exists x P(x)) \supset \exists x(A \vee P(x))$	(TD, 7)
9. $(A \vee \exists x P(x)) \supset \exists x(A \vee P(x))$	

T10. $\exists x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \exists x P(x))$

1. $\exists x(A \vee P(x))$	ip.
2. $A \vee P(a1)$	(E∃, 1)
3. A	ip. supl1, 2
4. $A \vee \exists x P(x))$	(I∨, 2, 3)
5. P(a1)	ip. supl2, 2
6. $\exists x P(x)$	(I∃, 5)
7. $A \vee \exists x P(x))$	(I∨, 6, 3)
8. $\exists x(A \vee P(x)) \vdash A \vee \exists x P(x))$	(1-7)
9. $\theta \vdash \exists x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \exists x P(x))$	(TD,8)
10. $\exists x(A \vee P(x)) \supset (A \vee \exists x P(x))$	

T11. $(A \wedge \exists x P(x)) \supset \exists x(A \wedge P(x))$

1. $(A \wedge \exists x P(x))$	ip.
2. A	(E∧, 1)
3. $\exists x P(x))$	(E∧, 1)
4. P(a1)	(E(E∧, 1)
5. ,3)	

Universitatea Spiru Haret

6. $A \wedge P(a1)$ ($I\wedge$, 2, 4)
7. $\exists x(A \wedge P(x))$ ($I\exists$, 5)
8. $(A \wedge \exists xP(x)) \vdash \exists x(A \wedge P(x))$ (1-6)
9. $\theta \vdash (A \wedge \exists xP(x)) \supset \exists x(A \wedge P(x))$ (TD, 7)
10. $(A \wedge \exists xP(x)) \supset \exists x(A \wedge P(x))$

T12. $\exists x(A \wedge P(x)) \supset (A \wedge \exists xP(x))$

1. $\exists x(A \wedge P(x))$ ip.
2. $A \wedge P(a1)$ ($E\exists$, 1)
3. A ($E\wedge$, 1)
4. $P(a1)$ ($E\wedge$, 1)
5. $\exists xP(x)$ ($I\exists$, 4)
6. $A \wedge \exists xP(x)$ ($I\wedge$, 3, 5)
7. $\exists x(A \wedge P(x)) \vdash (A \wedge \exists xP(x))$ (1-6)
8. $\theta \vdash \exists x(A \wedge P(x)) \supset (A \wedge \exists xP(x))$ (TD, 7)
9. $\exists x(A \wedge P(x)) \supset (A \wedge \exists xP(x))$

Teoremele T8-T12 sunt variante ale legilor despre extinderea sau restricția fictivă a domeniului cuantorilor universal şi existențial față de formulele în care apar numai conective booleene.

Toate aceste teoreme le putem formula sintetic prin schema metateoretică:

SM $(A^* Q(x)P(x)) \equiv Qx(A^*P(x))$

unde '*' stă pentru operațiile booleene conjuncție şi disjuncție şi 'Q' stă pentru cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$.

Dar aici voiam să afirm că în limbile naturale există infinit de multe propoziții cu cuantificatori existențiali sau universali şi că născocirea logicii predicatelor a fost o creație genială a spiritului uman care dă seama de demersul gândirii umane în toate domeniile de activitate.

T13. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall xP(x) \supset \forall xQ(x))$

1. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ ip.
2. $\forall xP(x)$ ip.
3. $P(y) \supset Q(y)$ ($E\forall$, 1)
4. $P(y)$ ($E\forall$, 2)
5. $Q(y)$ (MP, 3, 4)
6. $\forall y\, Q(y)$ ($I\forall$, 5)
7. $\forall x\, Q(x)$ (RV, 6)
8. $\{\forall x(P(x) \supset Q(x)), \forall xP(x)\} \vdash \forall x\, Q(x)$ (1-6)
9. $\{\forall x(P(x) \supset Q(x))\} \vdash (\forall xP(x) \supset \forall x\, Q(x))$ (TD, 8)
10. $\vdash (\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall xP(x) \supset \forall x\, Q(x))$ (TD, 9)
11. $(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall xP(x) \supset \forall x\, Q(x))$

Universitatea Spiru Haret

Trecerea de la 1 la 3 şi de la 2 la 4 s-a făcut prin regula eliminării cuantificatorului existenţial. Am scris, de data aceasta, formula tot cu variabile, generic, dar cu o variabilă individuală diferită de cea din formula iniţială.

Trecerea de la 6 la 7 s-a făcut prin regula redenumirii variabilelor legate, RV. Trecerea de la 8 la 9 şi de la 9 la 10 s-a făcut prin teorema deducţiei. Dacă din Γ, A $\vdash$ B, atunci din $\Gamma \vdash$ A $\supset$ B. Ceea ce se deduce din mulţimea vidă de ipoteze este o propoziţie necondiţionată şi deci o teoremă logică.

Ipotezele sunt formule netautologice şi ele pot descrie, între altele, enunţuri empirice, legi fizice, dependenţe cauzale, reguli empirice etc.

Observaţie semantică. Teorema T13 descrie de fapt schema Modus Ponens cu aplicaţie la logica predicatelor. Ea ne spune că dacă implicaţia dintre P şi Q ţine în toate cazurile, atunci oridecâteori se va produce P se va produce şi Q. Putem să o interpretăm şi ca un raport de dependenţă şi să spunem că evenimentul sau starea Q depinde în toate cazurile de evenimentul sau starea P, atunci orice caz de producere a lui P este urmat de producerea lui Q.

Putem demonstra şi o formă mai slabă a cuantificării universale a unei implicaţii scriind:

T14. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x))$

1. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$	ip.
2. $\exists xP(x)$	ip.
3. P(a)	(E$\exists$, 2)
4. $P(a) \supset Q(a)$	(E$\forall$, 1)
5. Q(a)	(MP, 4, 3)
6. $\exists xQ(x)$	(I$\exists$, 5)
7. $\{\forall x(P(x) \supset Q(x)), \exists xP(x)\} \vdash \exists xQ(x)$	(1,2- 6)
8. $\{\forall x(P(x) \supset Q(x))\} \vdash (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x)$	(TD, 7)
9. $\theta \vdash \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x))$	(TD, 8)
10. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x))$	

T15. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x(P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	ip.
2. $P(y) \wedge Q(y)$	(E$\forall$, 1)
3. P(y)	(E$\wedge$, 2)
4. Q(y)	(E$\wedge$, 2)
5. $\forall y\, P(y)$	(I$\forall$, 3)
6. $\forall y\, Q(y)$	(I$\forall$, 4)
7. $\forall x\, P(x)$	(RV,5)

Universitatea Spiru Haret

8. $\forall x\ Q(x)$ (RV,6)
9. $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ (I$\wedge$, 7, 8)
10. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ (1-9)
11. $\theta \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ (TD, 10)
12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$

T16 $\forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x)) \supset . \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

1. $\forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ ip.
2. $\forall x(P(x)$ (E$\wedge$, 1)
3. $\forall x\ Q(x)$ (E$\wedge$, 1)
4. $P(y)$ (E$\forall$, 2)
5. $Q(y)$ (E$\forall$, 3)
6. $P(y) \wedge Q(y)$ (I$\wedge$, 4, 5)
7. $\forall y(P(y) \wedge Q(y))$ (I$\forall$, 6)
8. $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ (RV, 7)
9. $\forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ (1-8)
10. $\theta \vdash \forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x)) \supset . \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ (TD, 9)
11. $\forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x)) \supset . \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

T17. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ (RE,T14, T15)

T18 $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$

1. $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$ ip.
2. $\forall xP(x)$ ip. supl1.
3. $P(y)$ (E$\forall$, 2)
4. $P(y) \vee Q(y)$ (I$\vee$, 3)
5. $\forall y(P(y) \vee Q(y))$ (I$\forall$, 4)
6. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ (RV, 5)
7. $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$ (1-6)
8. $\theta \vdash \forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$ (TD,7)
9. $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$

Luăm ca ipoteză suplimentară pe $\forall xQ(x)$ şi derivăm din aceasta formula 9, după un demers similar. Abia acum putem scrie că din formula 1, care este o disjuncție, derivă formula 6, respectiv că este adevărat 7, la care vom aplica din nou teorema deducției şi obținem formula 8, din care rezultă 9.

Conversa teoremei 18,formula:

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$ (Cnv T18)

nu este teoremă. Fie mulțimea de referință D mulțimea persoanelor din sala de curs şi interpretarea P(x) = „x este bărbat „ şi Q(x) = „ x este femeie”, atunci din faptul că fiecare dintre persoanele din sală este

bărbat sau femeie nu rezultă nicidecum că în sală sunt toți bărbați sau că în sală sunt toate femei. Este posibil ca în sală să fie 16 bărbați şi 20 de femei caz în care este satisfăcut antecedentul lui Cnv T18, dar nu este satisfăcut consecventul lui CnvT18, căci în sală nu sunt numai bărbați sau numai femei, nu sunt toți bărbați sau toți femei.

Un contraexemplu din aritmetică pentru CnvT18 este următorul: $\forall x(x = 0 \vee x \neq 0) \supset (\forall x(x = 0) \vee \forall x(x < 0))$. Este uşor de observat că antecedentul este adevărat , dar consecventul nu, căci un număr poate fi şi mai mare decât 0.

Demonstrăm duala lui T18.

Dar, înainte de aceasta reamintim câteva reguli ale principiului dualității.

6. **Principiul dualităţii**

Fie A o metavariabilă, ce ține locul unor expresii dintr-un limbaj logic. Vom nota prin A* duala lui A. Definim acum inductiv duala unei formule în limbajul logicii predicatelor:

R1. Dacă A este un literal (i.e. o variabilă propozițională sau un atom predicativ oricare dintre ele cu sau fără semnul negației), atunci A* = A

R2. Dacă A = 1, atunci A* = 0;

R3. Dacă A = 0, atunci A* = 1:

R4. Dacă A = Taut, atunci A* = Contr.;

R5. Dacă A = Contr., atunci A* = Taut;

R6. Dacă A = B şi B este un atom, atunci A* = B;

R7. Dacă A = -B şi B este un atom, atunci A* = -B

R8. Dacă $A = B \wedge C$, atunci $A^* = B \vee C$;

R9. Dacă $A = B \vee C$, atunci $A^* = B \wedge C$;

R10. Dacă $A = B \supset C$, atunci $A^* = C \wedge$ -B i.e. (-(C⊃B))

R11 Dacă $A = B \subset C$, atunci $A^* = B \wedge$ -C

R12. Dacă $A = B \equiv C$, atunci A* = B BC , unde prin B am notat disjuncția exclusivă;

R13. Dacă $A = B \downarrow C$, atunci A* = B / C, unde prin ↓ am notat operația „nici" sau negația disjuncției, iar prin / am notat incompatibilitatea sau negația conjuncției;

R14. Dacă $A = \forall xP(x)$, atunci $A^* = \exists xP(x)$;

R15. Dacă $A = \exists xP(x)$, atunci $A^* = \forall xP(x)$;

R16. Dacă A = -QF, atunci A* = Q*-F, unde Q este un şir de ∀ sau ∃. În plus, are loc echivalența: -QF ≡ Q*-F

Universitatea Spiru Haret

R17. Dacă A este o teoremă, atunci –(A*) este teoremă;

R18. Dacă A = B ⊃ C este teoremă în logica predicatelor, atunci B* ⊃ A* este teoremă în logica predicatelor;

R19. Dacă A = B ≡ C este teoremă, atunci B*≡ C* este teoremă.

Câteva observaţii vor fi, probabil utile.

Dualitatea nu schimbă literalii sau constituenţii de bază. Prin dualizare aceştia rămân neschimbaţi.

Duala unei valori de adevăr într-o logică bivalentă este opusa sa, cealaltă valoare.

Dualizarea schimbă valoarea de adevăr a unei formule cu opusa sa şi la fel schimbă între ele validitatea şi irealizabilitatea (contradicţia).

Prin dualizare conjuncţia şi disjuncţia se schimbă între ele şi la fel se schimbă între ei cuantificatorii.

Duala unei implicaţii este negaţia conversiei implicaţiei date. Duala inversă pleacă de la consecvent spre antecedent şi spune că acesta, consecventul este adevărat, dacă antecedentul este adevărat.

Duala lui nici este incompatibilitatea şi invers.

Negaţia din faţa unui cuantificator duce la înlocuirea acelui cuantificator prin dualul său şi la plasarea negaţiei imediat după acesta. De exemplu, dacă A = -∃x∀yR(x, y), atunci:

A* = ∀x∃y-R(x, y). Dacă convenim să interpretăm predicatul binar R (x, y) = „ x bate pe y la şah” şi domeniul de referinţă este dat de elevii unei clase, atunci echivalenţa: -QF ≡ Q*-F se instanţiază la echivalenţa dintre propoziţiile: Dacă nu există nimeni care să-i bată pe toţi membri clasei la şah, atunci pentru orice elev din clasă există cineva pe care acesta nu-l bate.

Dacă este teoremă o formulă implicativă, atunci va fi teoremă implicaţia dintre duala consecventului şi duala antecedentului(vezi R12.) La fel, dacă este teoremă o echivalenţă, atunci va fi teoremă echivalenţa dintre dualele termenilor echivalenţei iniţiale (vezi R13). Evident, putem extinde principiul dualităţii la logicile modale şi temporale, la cele epistemice şi la cele doxastice, la sistemele de logică deontică sau la cele de teleologică.

Principiul dualităţii joacă un rol metateoretic în teoriile logice. Putem da, la nivel metateoretic, pe baza regulii R11, un „algoritm” de construire a dualei unei formule implicative deja demonstrate:

1.*Calculăm duala consecventului teoremei demonstrate, B*;*

2.*Calculăm duala antecedentului teoremei demonstrate, A*;*

3. *Scriem implicaţia după care dualul consecventului implică duala antecedentului, B* ⊃ A*.*

Universitatea Spiru Haret

Exemplul 1. Consecventul lui T18 este formula: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$. Duala acesteia este $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$. Trecem acum la calcularea dualei formulei pe post de antecedent în T18. Antecedentul lui T18 este formula $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$. Duala acesteia este $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$. Aplicăm regula R2 şi scriem $B^* \supset A^*$, duala consecventului implică duala antecedentului, respectiv teorema:

T19. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)). \supset \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$.

În mod analog, putem da, la nivel metateoretic, pe baza regulii R12, un „algoritm" pentru construirea unor teoreme duale pentru toate echivalențele anterior demonstrate. Acesta este:

1. *Calculăm duala antecedentului teoremei demonstrate, A*;.*
2. *Calculăm duala consecventului teoremei demonstrate, B*;*
3. *Scriem formula după care duala antecedentului este echivalentă cu duala consecventului:* $A^* \equiv B^*$;

Exemplul 2.Construim duala teoremei T17

1. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$ (T16)
2. $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ (A^*, duala antecedentului)
3. $\exists x(P(x) \vee \exists x\, Q(x))$ (B^*, duala consecventului)
4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee \exists x\, Q(x))$

T20. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee \exists x\, Q(x))$

Propunem cititorului să demonstreze teorema T19 utilizând demonstrația prin ipoteză şi teorema deducției

7. **Alte teoreme în logica predicatelor de ordinul întâi**

T21 - $\forall xP(x) \equiv \exists x\text{-}P(x)$

1. $-\forall xP(x)$	ip.
2. $-\exists x\text{-}P(x)$	ip. dem. ind.
3. $P(t) \supset \exists xP(x)$	(Ax6)
4. $-P(y) \supset \exists y\text{-}P(y)$	(RS, a2, a3, 3)
5. $-P(x) \supset \exists x\text{-}P(y)$	(RV, 4)
6. $P(x)$	(*Modus Tollens*, 5, 2, RE, dubla neg.)
7. $\forall xP(x)$	(I$\forall$, 6)
8. Contr,	(7, 1)

Demonstrația de mai sus este una prin reducere la absurd sau apagogică.

La punctele 1, 2 am presupus că s-ar putea întâmpla ca primul termen al unei echivalențe să fie adevărat, iar al doilea să fie fals. La punctul 3 am invocat axioma Ax6, iar la punctul 5 am substituit simbolul predicativ P prin negația acestuia şi variabila x prin y. La punctul 6 am folosit o schemă de

Universitatea Spiru Haret

inferență derivată, *Modus Tollens*, fără a o fi demonstrat înainte de aceasta. Dar schema este demonstrabilă din legea contrapoziției și alte legi logice.

O demonstrație apagogică se încheie prin identificarea unei contradicții.

Este posibilă și o demonstrație „pozitivă", din ipoteze, pentru teorema de mai sus. De la ipoteza 1, putem trece direct la un contaexemplu de forma –P(b) și de aici direct la ∃x-P(x). Cu aceasta am demonstrat implicația de la stânga la dreapta. Pentru conversa acesteia admitem ca ipoteză pe ∃x-P(x). Prin regula eliminării cuantificatorului existențial identificăm un caz –P(c). Din faptul că există în domeniu D un obiect c care nu satisface predicatul P va trebui să admitem că este fals că toți x sunt P și deci putem scrie -∀xP(x). Fiind demonstrate ambele implicații, de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga este demonstrată din ipoteză echivalența.

Această teoremă ne aduce aminte de relația de contradicție din pătratul logic dintre judecățile de tip A sau universal-afirmative și cele de tip O sau particular-negative. E destul o particular negativă pentru a infirma o universal afirmativă. E ca și cum am zice „E destul o măciucă la un car de oale".

Dacă acceptăm principiul dualității sub forma regulii R13 ca o schemă de inferență: B ≡ C ├ B*≡ C*, atunci ajungem să scriem:

-∀xP(x) ≡ ∃x-P(x) ├ -∃x-P(x) ≡ ∀x- -P(x)

Dar aceasta înseamnă că T20 are drept consecință imediată

-∃x-P(x) ≡ ∀x- -P(x), respectiv ∀xP(x) ≡-∃x-P(x). Această formulă poate fi derivată din teorema 20 prin regula B ≡ C ├ -B ≡ -C, după care dacă am demonstrat anterior o echivalență, putem imediat conchide că este adevărată și echivalența dintre negațiile termenilor echivalenței anterioare.

T 22. ∀xP(x) ≡ -∃x-P(x) (T20, B ≡ C ├ -B ≡ -C)

T22 este o definire a cuantificatorului universal în funcție de cuantificatorul existențial. A spune că un enunț este adevărat despre toți membrii unei clase este tot una cu a contesta că există cineva despre care n-ar fi adevărat acel enunț.

T23. ∃x∃yR(x,y) ≡ ∃y∃xR(x,y)

a) ∃x∃yR(x,y) ⊃∃y∃xR(x,y)

1. ∃x∃yR(x,y)	ip.
2. ∃yR(a,y)	(E∃, 1)
3. R(a, b)	(E∃, 2)
4. ∃xR(a, x)	(I∃, 3)

Universitatea Spiru Haret

5. $\exists y\exists xR(x,y)$ (I∃, 4)
6. $\{\ \exists x\exists yR(x,y)\} \vdash \exists y\exists xR(x,y)$ (1 – 5)
7. $\theta \vdash \exists x\exists yR(x,y) \supset \exists y\exists xR(x,y)$ (TD, 6)
7. $\exists x\exists yR(x,y) \supset \exists y\exists xR(x,y)$

În mod analog se demonstrează şi conversa lui a), teza b):

a) $\exists y\exists xR(x,y) \supset \exists x\exists yR(x,y)$

Din T23 putem obţinem, pe baza principiului dualităţii, teorema:

T24 $\forall x\, \forall yR(x,y) \equiv \forall y\, \forall xR(x,y)$

Teoremele T23 şi T24 arată cum putem inversa într-o formulă cuantificatorii de acelaşi fel, respectiv dacă în formulă apar numai cuantificatori universali sau numai cuantificatori existenţiali atunci ordinea acestora este indiferentă.

T25. $\exists x\, \forall yR(x, y) \supset \forall y\, \exists xR(x, y)$

1. $\exists x\forall yR(x, y)$ ip.
2. $\forall yR(a, y)$ (E∃, 1)
3. $R(a, z)$ (E∀, 2)
4. $\exists uR(u, z)$ (I∃, 3)
5. $\forall z\exists uR(u, z)$ (I∀, 4)
6. $\{\ \exists x\forall yR(x, y)\} \vdash \forall z\exists uR(u, z)$ (1-5)
7. $\theta \vdash \exists x\forall yR(x, y) \supset \forall z\exists uR(u, z)$ (TD, 6)
8. $\exists x\forall yR(x, y) \supset \forall z\exists uR(u, z)$ (7)
9. $\exists x\forall yR(x, y) \supset \forall y\exists xR(x,y)$ (RV, 8)

T26. $\exists x\, \forall yA(x,y) \supset \forall y\, \exists xA(x,y)$

1. $\exists x\forall yA(x,y)$ ip.
2. $\forall yA(a,y)$ (E∃, 1)
3. $A(a, y)$ (E∀, 2)
4. $\exists xA(x, y)$ (I∃, 3)
5. $\forall y\exists xA(x, y)$ (I∀,4)
6. $\{\exists x\forall yA(x,y)\} \vdash \forall y\exists xA(x, y)$ (1-5)
7. $\phi \vdash \exists x\forall yA(x,y) \supset \forall y\exists xA(x, y)$ (TD, 6)
8. $\exists x\forall yA(x,y) \supset \forall y\exists xA(x, y)$

O ilustrare a teoremei T26 este propoziţia: Dacă într-o clasă de elevi există cineva care-i bate pe toţi la şah, atunci pentru fiecare dintre elevi există cineva care-l bate la şah.

Aplicând principiul dualităţii la T26 obţinem:

T27. $\exists y\, \forall x\text{-}A(x,y) \supset \forall x\, \exists y\text{-}A(x,y)$

Revenind la exemplul dat pentru teorema precedentă, T27 afirmă că dacă există cineva neînfrânt la şah, atunci fiecare are pe cineva pe care nu-l bate.

Universitatea Spiru Haret

8. **Necontradicţia sistemului axiomatic al logicii predicatelor**

Două întrebări majore se pot pune în legătură cu un sistem axiomatic pentru o teorie logică. Prima este întrebarea dacă în sistem se obţin prin regulile de inferenţă date iniţial sau derivate ulterior numai legi logice. Altfel spus, ne întrebăm dacă orice teoremă demonstrată este o formulă identic adevărată sau o formulă validă, care este adevărată în orice interpretare şi pentru orice atribuire de valori acordată variabilelor propoziţionale. Dacă orice teoremă derivată este o formulă validă înseamnă că sistemul conservă validitatea de la axiome la teoreme şi deci, în cadrul lui, nu poate apare, ca teoremă, vreo formulă infirmabilă şi, în consecinţă, sistemul este necontradictoriu. Demonstraţia de noncontradicţie stabileşte o corespondenţă strictă între idea de formulă derivabilă într-un sistem axiomatic şi ideile de validitate şi consecinţă logică semantică. Prima se redă prin simbolul consecinţei logice sintactice $\vdash$; cea de a doua se redă prin simbolul consecinţei logice semantice $\models$. Enunţul de noncontradicţie al unui sistem axiomatic poate fi redat simbolic astfel: Dacă $\vdash A$, atunci $\models A$, care se citeşte: „Dacă A este derivată ca teoremă într-un sistem axiomatic, atunci A este o formulă validă.”. Această teoremă face o legătură între limbajul formal axiomatic şi producerea prin aplicarea unor reguli formale a unor teoreme şi teoria modelelor, ca o teorie despre semnificaţia formulelor în diferite domenii în care pot fi acestea interpretate.

Cea de a doua întrebare priveşte relaţia inversă. Ne întrebăm dacă orice formulă validă, pe care am atestat-o ca validă printr-un procedeu semantic de decizie, cum ar fi metoda arborilor de decizie, metoda rezoluţiei sau altă metodă, poate fi obţinută ca teoremă într-un sistem axiomatic. Pe scurt, ne întrebăm dacă o formulă A este validă, simbolic $\models A$, conduce în mod necesar şi la concluzia că ea este şi teoremă într-un sistem axiomatic cu acelaşi limbaj, simbolic $\vdash A$.

Aceasta este problema demonstraţiei de completitudine. De data aceasta ne întrebăm dacă sistemul axiomatic este complet, dacă putem capta prin mecanismul lui de derivare *toate* formulele valide.

Trecem la demonstraţia de noncontradicţie.

Formularea metateoremei *Sistemul axiomatic Hilbert-Ackermann al logicii predicatelor de ordinul întâi este necontradictoriu.*

Pentru demonstrarea noncontradicţiei sistemului axiomatic al logicii predicatelor facem mai întâi un experiment mental de ordin

Universitatea Spiru Haret

semantic. Ne imaginăm că domeniul de interpretatare al formulelor din logica predicatelor are un singur obiect, i.e. D = $\{a\}$. Putem exprima acesta şi scriind |D| = 1.

Ce se întâmplă în acest caz cu formula deschisă P(x) şi cu formulele cuantificate universal sau existenţial, respectiv cu $\forall xP(x)$ şi $\exists xP(x)$?. În domeniul D de cardinal 1, ele ajung să semnifice acelaşi lucru: Obiectul a are proprietatea A. In acest caz este adevărat că un obiect oarecare din D are proprietatea P, (P(x), că toate obiectele din D au proprietatea P şi este la fel adevărat că există un obiect în D care are proprietatea P.

Constatarea de mai sus ne arată că, într-un domeniu cu un singur obiect, noţiunea de variabilă individuală nu mai are sens.

La fel, nu mai au sens cuantificările universală sau existenţială.

Putem rezuma această constatare prin formula de interes semantic:

$$card(D) = 1 \supset (P(x) \equiv \forall xP(x)) \wedge (\forall xP(x)) \equiv \exists xP(x)) \quad (1)$$

Admiţând ipoteza card (D) = 1, obţinem imediat din (1), pe baza tranzitivităţii echivalenţei şi *Modus Ponens*, formula:

$$(P(x) \equiv \exists xP(x)) \quad (2)$$

Acest fapt ne arată că pe un domeniu de cardinal 1, pe un spaţiu de mişcare atât de restrâns, dispar variabilele individuale, devine fără sens cuantificarea şi simbolurilor predicative rămân fără argumente. Simbolurile predicative decad la statutul de variabile propoziţionale. Predicatul ca schemă propoziţională dispare şi el.

Predicatele de aritate zero sau „văduve" de argumente devin simple variabile propoziţionale.

Pe această cale, limbajul logicii predicatelor degenerează sau decade în limbajul logicii propoziţiilor.

Această circumstanţă de ordin semantic intuitiv a fost folosită de mintea ingenioasă a unor logicieni pentru a pune la punct o metodă de demonstrare a noncontradicţiei logicii predicatelor.

Mai întâi vom face observaţia că demonstraţia de noncontradicţie este o demonstraţie a imposibilităţii ca din formulele valide de logica predicatelor, luate ca axiome, să se obţină, prin regulile de inferenţă admise, altceva decât tot formule valide. Regulile de inferenţă într-un sistem axiomatic de logică păstrează sau conservă *validitatea* de la axiome la teoreme, spre deosebire de demonstraţiile dintr-un set de ipoteze, dintr-o bază de cunoştinţe sau din datele unei probleme, care conservă doar *veridicitatea.*

Universitatea Spiru Haret

Primul moment în demonstrarea noncontradicției constă în construirea pentru orice formulă bine formată din logica predicatelor a unui model al ei în logica propozițiilor. Pentru aceasta se defineşte pe limbajul logicii predicatelor o funcție de interpretare a formulelor acestei teorii în limbajul logicii propozițiilor. Dar, după cum am văzut, din exemplele date mai sus unor formule distincte din logica predicatelor putem să-i punem în corespondență aceiaşi formulă bine formată din logica propozițiilor. Fiecăreia dintre subformulele P(x), $\forall$xP(x) şi $\exists$xP(x) îi vom pune în corespondență formula P din logica propozițiilor. Funcția de interpretare nu va fi injectivă. Unei perechi de formule distincte din logica predicatelor nu-i vom pune în corespondență două formule distincte din limbajul logicii propozițiilor. Putem să le punem membrilor unei perechi şi aceiaşi formulă din limbajul logicii propozițiilor. Mai departe, pentru fiecare dintre conectivele logic propoziționale utilizate în logica predicatelor $\wedge$, $\vee$, $\supset$ ca forme de agregare a formulelor simple în formule complexe vom construi în limbajul logicii propozițiilor, prin inducție, agregările corespunzătoare.

Pe această cale, fiecărei formule valide din logica predicatelor îi vom pune în corespondență o formulă validă din logica propozițiilor.

În sfârşit, vom arăta că regulile de inferență utilizate în logica predicatelor conservă această corespondență.

Să revenim acum, puțin mai precis, la firul demonstrației. Mai întâi definim funcția de „degenerare" sau de scufundare a logicii predicatelor în logica propozițiilor.

Fie h:Lpred$\rightarrow$Lprop

1. h(A(x)) = A
2. h($\forall$x A(x)) = A
3. h($\exists$xA(x)) = A
4. h($\forall$x$\forall$yB(x, y)) = B
5. h(-A(x,…,xn)) = -h(A)
6. h(A $\supset$ B)= (h(A) $\supset$ h(B))

Reamintim că axiomele logicii predicatelor sunt de fapt scheme de axiome. Prin corespondența definită mai sus, fiecărei axiome sau formule valide din logica predicatelor i se va pune în corespondență o formulă validă, respectiv o tautologie din logica propozițiilor.

Oricărei instanțieri a axiomei a cincea, $\forall$xP(x) $\supset$ P(t), i se va pune în corespondență o formulă „degenerată" de forma P $\supset$ P.

Oricărei instanțieri a schemei $\forall$x(A $\supset$ B) $\supset$ (A $\supset\forall$xB(x)), în care x nu apare în A, i se va pune în corespondență în logica propozițiilor o tautologie de forma: (D $\supset$ E) $\supset$ (D $\supset$ E).

Universitatea Spiru Haret

În sfârşit, dacă h(A) şi h(A $\supset$ B) sunt tautologii, atunci va fi tautologie h(B). Ultima propoziţie spune un lucru banal, potrivit căruia regula *Modus Ponens* se aplică formulelor „degenerate", reduse la logica propoziţiilor.

Întrucât tuturor teoremelor din logica predicatelor prin funcţia de interpretare h li se pun în corespondenţă formule tautologice din logica propoziţiilor şi sistemul axiomatic al logicii propoziţiilor este complet, respectiv oricărei tautologii din logica propoziţiilor îi putem asocia în axiomatizarea acestei teorii o teoremă şi am demonstrat în capitolul anterior că sistemul axiomatic al logicii propoziţiilor este necontradictoriu, sistemul logicii predicatelor, redus prin corespondenţa h la tautologii din logica propoziţiilor, este şi el necontradictoriu.

9. **Teorema formelor normale prenexe**

Introducem acum câteva teoreme pregătitoare pentru demonstraţia teoremei lui K. Gödel despre completitudinea calculului predicatelor.

Prima dintre acestea este teorema formelor normale prenexe.

Fie A o formulă bine formată din logica predicatelor în care apar cuantificatori şi în „matricea" formulei, nu doar la începutul formulei şi A_{Prn} forma sa normală prenexă, în care toţi cuantificatorii apar la începutul formulei sub forma unui prefix. Atunci A şi A_{Prn} sunt echivalente.

Pe scurt: $\vdash A \equiv A_{Prn}$

Teorema afirmă că prin aducerea unei formule la forma sa prenexă nu se schimbă cazurile ei de adevăr. Cu alte cuvinte, transformarea sintactică conservă veridicitatea.

Demonstraţia teoremei se face arătând că forma normală prenexă A_{Prn} se obţine din A aplicând în mod exclusiv regula substituirii echivalentelor, făcând uz pentru aceasta de echivalenţe din logica propoziţiilor (vezi vol. 1, pag 117, 298-300) şi de echivalenţe din logica predicatelor.

Pentru aducerea formulei iniţiale A la forma sa prenexă vor fi folosite echivalenţe din logica propoziţiilor care privesc reducerea implicaţiilor şi echivalenţelor la expresii echivalente care să conţină în exclusivitate doar atomi şi conective logice booleene: -, $\wedge$, $\vee$.

Dintre echivalenţele din logica propoziţiilor vor fi folosite:

$p \supset q \equiv -p \vee q$ (1)

$p \equiv q \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p)$ (2)

$-(-p)) \equiv p$ (3)

$-(p \wedge q) \equiv -p \vee -q$ (4)

Universitatea Spiru Haret

$-(p \vee q) \equiv -p \wedge -q$ (5)

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (6)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (7)

Dintre echivalențele din logica predicatelor vor fi folosite regulile de dualitate a cuantificatorilor (vezi Principiul dualității R16). Dacă Q este o metavariabilă pentru cuantificatori şi A* stă pentru duala lui A, atunci formula:

$-QF \equiv Q^*-F$ (R 16)

descrie abstract teoremele:

$-\forall xF(x) \equiv \exists x-F(x)$ (R16 a)

$-\exists xF(x) \equiv \forall x-F(x)$ (R16 b)

Pentru evitarea situațiilor când aceiaşi variabilă individuală ar putea apare în aceeaşi formulă legată şi existențial şi universal se utilizează regulile sau legile redenumirii:

$\exists xP(x) \wedge \forall xQ(x) \equiv \exists xP(x) \wedge \forall yQ(y)$ (Rreden)

Regula R16 afirmă că un cuantificator negat poate fi înlocuit cu dualul său urmat de negația formulei care urmează.

În plus, în demonstrație se face uz de cele două echivalențe despre extinderea „fictivă" a domeniului unui cuantificator demonstrate anterior ca teoreme în logica predicatelor (vezi T5 şi duala sa T8).

$(A \vee \forall xP(x)) \equiv \forall x(A \vee P(x))$ (T5)

$(A \wedge \forall xP(x)) \equiv \forall x(A\ P(x))$ (T8)

Cauzei „mutării" cuantificatorilor în față slujesc şi cele două echivalențe despre distributivitatea cuantificatorului universal față de conjuncție şi a cuantificatorului existențial față de disjuncție (vezi T16 şi T19).

$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$ (T16)

$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee \exists x\ Q(x))$ (T19)

Principalii paşi în aducerea unei formule la forma sa normală conjunctivă sunt:

1. Eliminarea din formula inițială A a simbolurilor implicației prin înlocuirea expresiilor implicative pe baza echivalenței (1) care intervine şi ca definiție în sistem (vezi D2) şi pe baza regulii substituirii echivalentelor (vezi regula de deducere d). În mod similar se elimină şi semnul echivalenței ≡ care descrie o implicație bilaterală.
2. Utilizarea iterată a legii dublei negații, a legilor lui De Morgan şi a legilor excluderii negației din fața unui cuantificator (vezi (3), (4), (5) pentru logica propozițiilor şi a legilor (R16 a) şi (R16 b) pentru logica predicatelor pentru a „coborî negația pe literali".
3. Utilizarea regulii redenumirii, dacă aceiaşi variabilă apare legată şi existențial şi universal.

Universitatea Spiru Haret

4. Folosirea regulii (6) pentru a obține conjuncții de disjuncții elementare sau dualei ei pentru a obține disjuncții de conjuncții elementare.
5. Folosirea legilor de distributivitate astfel încât să ajungem la conjuncții de disjuncții elementare.
6. Folosirea legilor extinderii fictive a domeniilor unor cuantificatori pentru a ajunge la formule în care apar cuantificatori numai în față.

Întrucât peste tot am utilizat numai regula substituirii echivalentelor, regulă ce *conservă veridicitatea* şi am făcut uz numai de legi logic, formula la care am ajuns A_{Prn} este echivalentă cu A.

Conservând în trecerea de la o formulă oarecare, având cuantificatori şi la mijlocul şi la coada formulei la o formulă având cuantificatorii numai în față, teorema conservă şi validitatea, căci validitatea este o veridicitate în *orice* interpretare. După cum am văzut în primul volum, o interpretare este redobândire de semnificații pentru o formulă sau pentru un limbaj logic formal. Ne reîntoarcem de la abstracții cu picioarele din nou pe pământ sau plonjăm în alte situații imaginate de către noi.

Aducerea la forme normale prenexe este o prelucrare la nivel sintatic, în lumea formelor şi structurilor sintactice şi nu incumbă nici o schimbare la nivelul regulilor de semnificare. Nu se schimbă nici referenții termenilor, nici semnificația semnelor funcționale care au întotdeauna numai sensuri operaționale descriind proceduri de a afla obiecte denotate şi nici semnificația atomilor predicativi care descriu proprietăți sau relații despre obiectele din domeniul de referință. Facem o instrucție de front cu formulele, fără să le schimbăm modul lor de racordare cu lumea semnificațiilor. Dar aceste schimbări pur formale ne permit adesea să punem în evidență noi proprietăți de ordin semantic.

10. **Formele normale Skolem**

Descriem, mai întâi, cum arată o formulă adusă la o formă normală Skolem, cum se aduce o formulă la forma sa Skolem pentru ca în cele din urmă să demonstrăm teorema lui Skolem.

Definiția DS. *Formele normale Skolem sunt o specie de forme normale prenexe în care nu apar variabile individuale libere, au cel puțin un cuantificator existențial şi toți cuantificatorii existențiali sunt situați înaintea cuantificatorilor universali.*

Aceştia pot chiar să lipsească.

Structura tipică a unor astfel de formule este:

$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_m \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n M$

unde $m \geq 1$ şi $n \geq 0$.

Universitatea Spiru Haret

Prin M am notat „matricea" formulei, respectiv acea parte a formulei în care apar atomii formulei legați între ei prin conective logice. Atomii conțin variabile individuale legate şi eventual constante individuale şi simboluri funcționale ce intervin în termenii complecşi. Trebuie să reținem că $m \geq 1$ ne indică faptul că o formă normală Skolem conține cel puțin un cuantificator existențial şi că $n \geq 0$ ne arată că pot exista forme normale Skolem fără cuantificatori universali. Astfel $\exists xP(x)$, $\exists x\exists yR(x, y)$ vor fi formule în formă normală Skolem fără cuantificatori universali, iar unele formule ca: $\forall u\forall t((Q(u,t))\wedge S(u,t))$, $\exists x\exists y\forall u\forall t((Q(x)\wedge S(y)) \supset (R(x,u,t) \vee T(y,u,t)))$ şi $\exists x\forall u\forall tR(x, u, t)$ vor fi formule în formă Skolem în care apar numai cuantificatori universali sau formule în care toți cuantificatorii existențiali sunt plasați la început iar cei universali, dacă există, sunt situați după cei existențiali.

De ce transformăm o clasă de formule într-o altă clasă de formule ?. De ce facem gimnastică de înviorare cu formulele ?

Este util să observăm, chiar de la început, că formulele Skolem neavând variabile individuale libere descriu în plan semantic existența într-un domeniu oarecare a unor obiecte cu anumite proprietăți. Orice formulă în formă Skolem descrie propoziții de existență şi deci propoziții cu valoare descriptivă despre un domeniu oarecare.

Mai mult, forma Skolem ne prezintă toate propozițiile elementare care descriu date factuale din domeniul de interpretare şi toate relațiile de dependență din acel domeniu descrise prin clauze generice sau propopoziții cu variabile individuale legate prin cuantificatori universali, care nu se mai scriu în mod explicit. Dar prin astfel de formule pot fi descrise legile din fizică, diferite relații de dependență din biologie, medicină, din sociologie, drept, etc.

Şi în plus, elementele formei normale Skolem care descriu datele relevante dintr-un domeniu sau datele relevante ale unei probleme oarecare pot fi transpuse în instrucțiuni Prolog şi problema în cauză poate fi rezolvată cu ajutorul unui calculator ce dispune de un limbaj de programare logică.

Iată suficiente motive pentru a învăța să aducem o formulă sau o mulțime de formule la forma sa normală Skolem.

Cum aducem o formulă oarecare în formă normală Skolem ?

Dăm mai jos după Alonzo Church procedura de construcție a formei Skolem standard.

Pentru a aduce o formulă oarecare A la forma sa normală Skolem standard, prescurtat A_S, procedăm astfel:

Universitatea Spiru Haret

(i). Aducem mai întâi formula A la forma sa prenexă, A_{Prn}.

(ii). Dacă A_{Prn} conține variabile libere stabilim o ordine în alfabetul acestor variabile, le cuantificăm universal şi le scriem în ordine inversă în fața formulei A_{Prn}. Dacă $v_1, v_2,\ldots, v_u$ este alfabetul variabilelor libere din A_{Prn}, atunci rezultatul obținut va fi:

$$\forall v_u \forall v_{u-1} \ldots \forall v_1 A_{Prn} \qquad (S1)$$

unde $v_1, v_2,\ldots, v_u$ vor fi variabile individuale libere din forma normală prenexă A_{Prn}. Numărul acestor variabile u poate fi şi 0, u = 0, adică forma normală prenexă să nu aibă nici o variabilă liberă.

Obs.1. Ordinea cuantificatorilor de la u_n la u_1 provine din faptul că scriem cuantificatorii de la dreapta la stânga. Primul introdus este cel aflat imediat în fața matricei.

Dacă în matrice avem variabile libere, le cuantificăm întâi universal pe acestea făcând uz de regula introducerii cuantificatorului universal.

(iii). Dacă S1 satisface definiția DS, dată mai sus, atunci S1 este A_S.

(iv). Dacă S1 are prefixul vid, atunci S1 este o formulă de logica propozițiilor şi este în formă Skolem. O formulă de forma $\exists x(F(x) \supset F(x))$ este de fapt propoziție şi este în formă Skolem.

(v) Dacă nu au loc cazurile (iii) şi (iv), atunci S1 trebuie să fie de forma:

$$\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_k \forall v_{k+1} N_1$$

$k \geq 0$ şi unde N_1 este în formă prenexă şi are ca variabile individuale libere pe numai pe $v_1, v_2,\ldots,v_{k+1}$. Fie P_1 primul simbol predicativ de k+1 argumente în alfabetul simbolurilor predicative de această aritate care nu apare în S1. Şi fie S2 o formă normală prenexă cu structura:

$$\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_k \forall v_{k+1} [N_1 \supset P_1(v_1, v_2,\ldots,v_{k+1})] \supset$$
$$\forall v_{k+1} P_1(v_1, v_2,\ldots,v_{k+1}) \qquad (S2)$$

Atunci, dacă S2 este în formă normală Skolem, atunci A_S coincide cu S2. În caz contrar se repetă schema de reducere şi S2 va avea forma:

$$\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_k \forall v_{k+1} N_2,$$

$k' > k$ şi N2 va fi tot o formă normală prenexă şi va avea propriile sale variabile libere $v_1, v_2,\ldots,v_{k'+1}$. Considerăm atunci un simbol predicativ P_2 primul în alfabetul simbolurilor predicative de aritate $k'+1$ şi care nu apare în S2.Scriem o nouă formă normală prenexă S3 de forma:

$$\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_{k'} \forall v_{k'+1} [N_2 \supset P_2(v_1, v_2, \ldots, v_{k'+1})] \supset$$
$$\supset \forall v_{k'+1} P_2(v_1, v_2, \ldots, v_{k'+1}) \qquad (S3)$$

Dacă S3 este în formă Skolem, atunci Se este A_S. În caz contrar continuă procesul de reducere, reducem pe S3 la S4 până când obținem forma normală Skolem. Aceasta va fi obținută în funcție de

Universitatea Spiru Haret

numărul *l* al cuantificatorilor universali astfel că $A_S = S_{n-l+1}$. Numărul actelor de reducere coincide cu numărul cuantificatorilor universali din forma normală prenexă.

A. Church a demonstrat că orice formulă bine formată A din logica predicatelor poate fi redusă cu ajutorul etapelor (i)-(v) la forma sa Skolem, A_S.

Noi am prezentat în volumul I un procedeu de skolemizare utilizat frecvent în scrierile specialiştilor în inteligenţa artificială(vezi 299-303).

11. **Echivalenţă şi echivalenţă deductivă**

Facem mai întâi o distincţie preliminară utilă între două forme de relaţii de echivalenţă în logica predicatelor. Se operează cu o relaţie de echivalenţă tare, numită relaţie de *convertibilitate* şi cu relaţia de *echivalenţă deductivă*. Relaţia de echivalenţă tare presupune logic derivabilitatea, care este o proprietate sintactică, dar mai presupune şi echivalenţa semantică a celor două expresii în orice domeniu de interpretare. Din relaţia de echivalenţă tare se deduce relaţia de echivalenţă deductivă, dar din aceasta nu poate fi dedusă relaţia de convertibilitate sau de echivalenţă tare.

Formulele F(y) şi $\forall$xF(x) sunt deductiv echivalente, dar nu convertibile sau semantic echivalente în toate domeniile de interpretare. Să arătăm că acestea sunt deductiv echivalente:

a) 1. F(y) ip.
2. $\forall$yF(y) (I.$\forall$, 1)
3. $\forall$xF(x) (RR, 2) (RR=regula redenumirii variabilelor legate)

b) 1. $\forall$xF(x) ip.
2. $\forall$xF(x)$\supset$F(y) (Ax5)
3. F(y) (MP, 2, 1)

Două formule A şi B sunt *deductiv echivalente* într-un sistem H, dacă şi numai dacă: H, A $\vdash$ B şi din H, B $\vdash$ A

Să arătăm acum că formulele F(y) şi $\forall$xF(x) nu sunt semantic echivalente.

După cum am văzut anterior în demonstraţia de noncontradicţie, formulele F(y) şi $\forall$xF(x) sunt semantic echivalente într-un domeniu de interpretare D de cardinal 1, i.e. $|D| = 1$. Dar dacă $|D| \geq 2$, atunci

Putem lesne construi contraexemple.Dacă D = {a, b} şi F(a) = 1 şi F(b) = 0, atunci F(y) = 1 şi $\forall$xF(x) = 0, ceea ce face falsă implicaţia F(y) $\supset\forall$xF(x).

Universitatea Spiru Haret

Convertibilitatea permite aplicarea regulii substituirii echivalentelor.

Teorema lui Skolem arată că orice formulă din logica predicatelor este *convertibilă* într-o formă normală Skolem şi că aceasta este deductiv echivalentă cu formula inițială, respectiv ori de câte ori este una derivabilă într-un sistem axiomatic şi cealaltă este derivabilă în acelaşi sistem.

12. **Teorema lui T. Skolem**

Enunțul teoremei *Pentru orice formulă din logica predicatelor există o formulă deductiv echivalentă cu ea, forma sa normală Skolem.*

Am introdus, puțin mai sus, definiția formei normale Skolem. Aceasta este, după cum am văzut, o formă normală prenexă asupra căreia s-au impus anumite restricții asupra ordinii cuantificatorilor şi asupra statutului variabilelor din matrice. Acestea trebuie să fie toate legate, iar cuantificatorii existențiali trebuie să preceadă cuantificatorii existențiali.

Urmând exemplul lui P.S. Novikov [29, 244-253], pregătim demonstrarea teoremei prin trei leme.

12.1. *Lema 1*

Formula $\exists x1 \ldots \exists xn \forall yA$, unde A este în formă normală prenexă, este deductiv echivalentă cu formula $\exists x1 \ldots \exists xn[\forall y(A(x1,.. . ,xn) \supset P(y)) \supset \forall yP(y)]$, unde A este o metavariabilă pentru o formulă oarecare din logica predicatelor şi P este o variabilă predicativă.

Demonstrație

Două formule A şi B sunt *deductiv echivalente* într-un sistem H, dacă şi numai dacă: H, A $\vdash$ B şi din H, B $\vdash$ A. Considerăm pe A=$\exists$x1… $\exists$xn$\forall$yA şi pe B = $\exists$x1…$\exists$xn[$\forall$y(A(x1,.. .,xn) $\supset$ P(y)) $\supset$ $\forall$yP(y)]. H va fi sistemul axiomatic al lui Hilbert şi Ackermann pentru logica predicatelor.

Demonstrăm mai întâi H, A $\vdash$ B sau implicația de la stânga la dreapta a lemei 1. Apoi ne vom întoarce la implicația inversă., respectiv la H, B $\vdash$ A.

1. $\exists$x1…$\exists$xn$\forall$y(A(x1,...,xn, y) ip.

Până să facem uz de această ipoteză aven nevoie de producerea altor paşi în textul nostru demonstrativ.

2. p$\supset$((p$\supset$q) $\supset$ q) (LP, variantă de *Modus Ponens*)
3. A(x1,.. . ,xn, y) $\supset$ ((A(x1,...,xn, y) $\supset$ P(t)) $\supset$P(t)) (s1, 2)
4. $\forall$xP(x) $\supset$ P(t) (A5)
5. $\forall$y A(x1,.. . ,xn, y) $\supset$ A(x1,.. . ,xn, y) (s3, A5)

Universitatea Spiru Haret

6. $\forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset((A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset P(y)) \supset P(y))$ (Tranz.,5,3)
7. $\forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset \forall y\ ((A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset P(y)) \supset P(y))$ (I$\forall$C,6)
8. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists xP(x) \supset \exists xQ(x))$ (T14)

Teorema 14 spune că dacă P implică pe Q în toate cazurile, atunci dacă se realizează uneori P, atunci se realizează uneori şi Q.

Aplicăm regula asociată teoremei T14 la consecventul lui 7 şi principiul tranzitivităţii cu substituţiile de rigoare şi obţinem:

9. $\forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset(\ \forall y\ (A(x1,..\ .\ ,xn, y) \supset P(y)) \supset \forall y\ P(y))$
(RT13, 7, Tranz)

În formula 9 intervin variabilele libere x1,.. .,xn. Ştim din definiţia formelor normale Skolem că în acestea nu trebuie să intervină variabile libere. Legăm pe rând, în ordine inversă, variabile libere făcând uz de regula derivată a introducerii cuantificatorului universal.

10. $\forall xn[\forall y\ A(x1,...,xn, y) \supset(\ \forall y\ (A(x1,...,xn, y) \supset P(y)) \supset \forall y\ P(y))\ ]$

Aplicăm la formula 10 teorema T14 (vezi mai sus 8) şi substituim pe P(x) prin $\forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn-1, x, y)$ şi pe Q(x) prin $\forall y\ (A(x1,..\ .\ ,xn, x,y) \supset P(y)) \supset \forall y\ P(y))$ A se observa aplicarea aici a regulii s3 explicată la începutul capitolului când am prezentat regulile de inferenţă în logica predicatelor. Expresia substituitoare aici $\forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn-1, x, y)$ pentru P(x) şi $\forall y\ (A(x1,..\ .\ ,xn, x,y) \supset P(y)) \supset \forall y\ P(y))$ trebuie să aibe cel puţin tot atâtea variabile libere câte are simbolul predicativ substituit, să nu conţină iniţial variabilele simbolului predicativ substituit. Obţinem astfel:

11. $\forall xn[(\forall yA(x1,..\ .\ ,xn-1, xn, y) \supset \forall y(A(x1,..\ .\ ,xn, xn,y) \supset P(y)) \supset$
$\forall yP(y))] \supset (\exists xn\ \forall x\ \forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn-1, xn, y) \supset$
$\exists n\ \forall y\ (A(x1,..\ .\ ,xn, x,y) \supset P(y)) \supset \forall y\ P(y)))]$

Antecedentul lui 11este formula 9 derivată puţin mai înainte. Putem, deci, aplica la 11 şi la 9 Modus Ponens şi obţine consecventul lui 11.

12. $(\exists xn\ \forall y\ A(x1,..\ .\ ,xn-1, xn, y) \supset \exists n\ \forall y\ (A(x1,..\ .\ ,xn, x,y) \supset P(y)) \supset$
$\forall y\ P(y)))]$

Demersul făcut la punctele 10,11 şi 12 pentru xn poate fi repetat pentru xn-1, xn-2,.. .. ,x1. La fiecare dintre acestea putem introduce cuantificatorul universal, aplica schema de inferenţă asociată teoremei 14 şi aplica *Modus Ponens*.

Pe această cale obţinem formula B ce trebuia demonstrată:

13. $\exists x1\ldots\exists xn[\forall y(A(x1,x2,..\ .\ ,xn) \supset P(y)) \supset \forall yP(y)]$.

Trecem acum la implicaţia inversă, respectiv la H, B $\vdash$ A şi acceptăm pe B ca ipoteză alături de axiomele şi teoremele sistemului Hilbert - Ackermann, notat, pentru concizie, cu H:

Universitatea Spiru Haret

14. $\exists x1 \ldots \exists xn[\forall y(A(x1,x2,\ldots,xn) \supset P(y)) \supset \forall y P(y)]$ ip.

Prin substituția lui P(y) prin A(x1,x2,.. . ,xn, y) obținem:

15. $\exists x1 \ldots \exists xn[\forall y(A(x1,x2,\ldots,xn) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)]$ (s3, 14)

16. $B \supset \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)$ (s1, LP)

Formula 16 provine prin substituție într-o tautologie banală de forma: $q \supset (p \supset p)$. Mai departe, este derivabilă o instanțiere a principiului identității:

17. $\forall y\, (A(x1,x2,\ldots,xn, y) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y))$ (s1, LP)

Din 17 obținem printr-o lege din logica propozițiilor formula:

18. $\forall y((\, A(x1,x2,\ldots,xn, y) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset (\forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y))$

Mai departe, legând universal în 18 variabila xn, cum se cere în definiția unei forme normale, dar nu pentru aceasta, ci în temeiul regulii introducerii cuantificatorului universal, obținem:

19. $\forall xn\, [\, \forall y((\, A(x1,x2,\ldots,xn, y) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset (\forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y))]$

20. Făcând, din nou uz de regulile introducerii cuantificatorului universal, de inferență asociată teoremei T14, care introduce cuantificatorul existențial în consecvent şi de *Modus Ponens* obținem:

21. $\forall xn\, [\, \forall y((\, A(x1,x2,\ldots,xn, y) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset (\forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset \exists xn \forall y\, A(x1,x2,\ldots,xn, y))]$

Dacă repetăm de n-1 ori această rutină obținem:

22. $\exists x1 \ldots \exists xn[\forall y(A(x1,x2,\ldots,xn, y) \supset A(x1,x2,\ldots,xn, y)) \supset .$
$\exists x1 \ldots \exists xn \forall y(A(x1,\ldots,xn, y).$

Antecedentul lui 22 este o lege logică. Prin urmare şi consecventul lui 22 va fi derivabil ca lege logică. Dar acesta coincide cu A. Am derivat aşadar din H şi A pe B şi din H şi B pe A. Cu aceasta demonstrarea Lemei 1 este încheiată. Dar nu şi demonstrarea teoremei lui Skolem.

12.2. *Lema 2*

Fie A=QM o formă normală prenexă unde Q este o metavariabilă pentru un prefix de cuantificatori alcătuit din $\forall$ sau $\exists$ şi variabilele de sub cuantificatori iar M pentru o formă normală (A este o metavariabilă iar P un predicat). Atunci are loc echivalența:

1. $(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall z P(z) \equiv (Qz\, \forall z M(z, x, y) \supset P(y)) \supset P(z)$

Aparițiile lui z şi x în formula 1 stau pentru câte un şir de variabile: z stă pentru z1,.. . , zm, iar x stă pentru x1,. .. ,xn.

Universitatea Spiru Haret

2. $(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z)$ ip

Introducem explicit în 2 cuantificatorii. Potrivit convenției de prescurtare a unei forme normale prenexe introduse mai sus, A = QM

3. $(Q1z1Q2z2\ldots Qmzm\ M \supset P(y)) \supset \forall zP(z)$

Aplicând la 2 o bine cunoscută echivalență de eliminare a implicației $p \supset q \equiv \text{-}p \vee q$ și alta de negare a implicației $\text{-}(p \supset q \equiv p \wedge \text{-}q$, acesta devine:

4. $(Q1z1Q2z2\ldots Qmzm(\ M \wedge \text{-}P(y)) \vee \forall zP(z))$

Mai departe, aplicând la 4 o lege a extinderii fictive a domeniului unui cuantificator, demonstrată anterior ca teorema T8, formula 3 poate fi rescrisă ca:

5. $(Q1z1Q2z2\ldots Qmzm \forall z\ M \wedge \text{-}P(y)) \vee P(z)$

6. Dar noua matrice din formula 5, formula $(M \wedge \text{-}P(y)) \vee P(z)$ este echivalentă cu $(M \supset P(y)) \supset P(z)$, după cum cititorul poate verifica singur făcând un simplu exercițiu de logica propozițiilor. Aplicând regula substituirii echivalentelor la 5 obținem:

7. $(Q1z1Q2z2\ldots Qmzm \forall z(M \supset P(y)) \supset P(z)$

Dacă convenim să specificăm în 6 principalele liste de variabile individuale care apar în matricea M, potrivit convenției de la început, atunci 6 se modifică după cum se vede mai jos:

8. $Qz \forall z(M(z, x, y) \supset P(y)) \supset P(z)$

Dar 8 este cel de al doilea termen al echivalenței 1. Deci H, 2 $\vdash$ 8.

Cum însă în trecerea de la H,2 la 8 am folosit numai regula substituirii echivalentelor demersul inferențial poate fi parcurs şi de jos în sus, de la H şi 8 la 2.Conchidem, deci că demonstrarea lemei 2 este încheiată.

Trecem la demonstrarea lemei 3.

12.3. *Lema 3*

Are loc o *echivalență* între următoarele două formule:

1. $\exists x1\ldots \exists xn(\forall y(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z))$

2. $\exists x1\ldots \exists xn \exists yQ1z1\ldots\ Qmzm \forall z[M(z1,\ldots\ zn,y) \supset P(y)) \supset P(z)]$

Înainte de demonstrația formală să ne acomodăm puțin cu inamicul. Să înțelegem puțin structura celor două formule a căror echivalență trebuie să o demonstrăm.

În formula 1 de mai sus A(x, y) este o matrice în care apar variabilele x1,. .. , xn cuantificate existențial prescurtate prin x şi variabila y cuantificată universal. Ca şi în lema 2, în subformula A(x, y), x stă pentru un şir de variabile x1,…, xn, iar y este o variabilă simplă cuantificată universal. Formula 1 afirmă că o propoziție universală

Universitatea Spiru Haret

derivată dintr-o matrice şi exprimată prin ∀yP(y) poate fi redată prin orice altă variabilă cuantificată universal.

Veridicitatea formulei 1 poate fi uşor demonstrată prin ipoteză şi teorema deducţiei prin aplicarea regulilor eliminării cuantificatorului existenţial, a teoremei T13 despre cuantificarea universală a unei implicaţii, *Modus Ponens* şi regula redenumirii. Dar nu acesta este obiectivul nostru în această lemă.

Formula 2 se referă şi ea la consecinţe derivate dintr-o matrice în care apar variabile legate oricum, existenţial, dar în care ultimul cuantificator de la stânga spre dreapta (de fapt primul în ordinea introducerii cuantificatorilor) este un cuantificator universal.

Trecem acum la demonstrarea echivalenţei dintre formulele 1 şi 2.

Pe baza implicaţiei de la stânga la dreapta din Lema 2 putem scrie:

1. $(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall uP(u)) \supset ((Qz\forall uM(z, u, x, y) \supset P(y)) \supset P(u))$

(Am păstrat convenţiile de notare prescurtată a şirurilor de variabile. În loc de x1,.. . ,xn scriem x şi în loc de z1,. .. zn scriem z. Întrucât y este variabilă liberă în 1, aplicăm la 1 regula introducerii cuantificatorului universal şi scriem:

2. $\forall y[(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z) \supset (Qz\forall zM(z, x, y) \supset P(y)) \supset P(u)]$ $(I\forall,1)$

3. $\exists y[(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z) \supset \exists y\ (Qz\forall zM(z, x, y) \supset P(y)) \supset P(z)]$

Formula 3 poate fi derivată din 2 pe baza schemei de inferenţă asociată teoremei 14: $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \exists xAx \supset \exists xBx$. Din faptul că o implicaţie este universal adevărată rezultă că dacă se realizează antecedentul ei se realizează şi consecventul ei.

Pe baza implicaţiei de la dreapta spre stânga din Lema 2 formula 3 poate fi rescrisă ca 4, inversând antecedentul cu consecventul:

4. $\exists y\ (Qz\forall uM(z, u, x, y) \supset P(y)) \supset P(u)) \supset \exists y((A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall uP(u))$

Din 3 şi 4 putem infera prin regula introducerii echivalenţei, $\{A \supset B, B \supset A\} \vdash A \equiv B$ asupra echivalenţei:

5. $\exists y[(A(x,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z) \equiv \exists\ y(Qz\forall zM(z, x, y) \supset P(y)) \supset P(z)]$

Întrucât x din A(x, y) este o prescurtare a noastră pentru variabilele x1, x2,.. . , xn putem repeta pentru fiecare din ele rutina de trecere de la 1 la 2 prin regula introducerii cuantificatorului universal I∀, de la 2 la 3 prin schema de inferenţă asociată teoremei T14 reprodusă mai sus Tranziţia de la 3 la 4 poate fi, la fel, făcută pentru x1 la xn pe baza implicaţiei de la dreapta spre stânga din Lema 2, care este o echivalenţă şi în sfârşit putem trece de la 4 la 5 prin schema introducerii echivalenţei.

Universitatea Spiru Haret

Aplicând de n ori această rutină demonstrăm formula:

6. $\exists x1. .. \exists xn \exists y[(A(x1,.. . xn,y) \supset P(y)) \supset \forall zP(z) \equiv \exists x1. .. \exists xn \exists y(Qz \forall zM(z1.. . ,zm, x1,.. . ,xn, y) \supset P(y)) \supset P(z))$

Ca un moment necesar în demonstrația noastră ne propunem să demonstrăm următoarea echivalență:

7. $[\forall y(A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)] \equiv \exists y[A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)]$

a. $[\forall y(A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)] \supset \forall zP(z)$ ip.
b. $[-\forall y(-A \vee P(y))] \vee \forall zP(z)]$ (E $\supset$, a)
c. $[\exists y-(-A \vee P(y)) \vee \forall zP(z)]$ (-$\forall$, b)
d. $\exists y [-(-A \vee P(y)) \vee \forall zP(z)]$ (Rext. fictive, c)
e. $\exists y [(A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)]$ (I $\supset$, d)

Formula e coincide cu partea dreaptă a echivalenței 7. Şi cum trecerea de la a la e s-a făcut utilizând, în exclusivitate, doar regula substituirii echivalentelor, putem parcurge drumul şi în sens invers de la e la a. Prin urmare, am încheiat demonstrarea echivalenței 7.

Putem în continuare să o folosim pentru demonstrarea Lemei 3.

Folosim, mai departe, aceiaşi rutină de n ori pentru introducerea în prefix a cuantificatorilor universali. (Vezi mai sus tranzițiile de la 1 la 5).

Obținem astfel formula 8.

8. $\exists x1. .. \exists xn[\forall y(A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)] \equiv \exists x1. .. \exists xn \exists y[A \supset P(y)) \supset \forall zP(z)]$

Din cele de mai sus rezultă că: a. Formula 1 coincide cu antecedentul lui 8; b. Antecedentul lui 8 este echivalent cu propriul său consecvent; c. Consecventul lui 8 este identic cu antecedentul lui 6; d. Antecedentul lui 6 este echivalent cu consecventul lui 6; e. Consecventul lui 6 coincide cu formula 2. Tranziția se poate face şi în sens invers. Formulele 1 şi 2 din Lema 3 sunt echivalente. Prin aceasta demonstrația Lemei 3 este încheiată. Mai rămâne să folosim lemele 1, 2 şi 3 pentru a obține demonstrarea teoremei lui Skolem.

12.4 *Ultimul asalt*

Un pas important către acest țel mult dorit este încă o demonstrație de echivalență deductivă. Trebuie să demonstrăm că primul termen al Lemei 1

T1L1 $\exists x1 \ldots \exists xn \forall y(A(x1,.. . ,xn, y)$

este deductiv echivalentă cu ultimul termen al Lemei 3, cu T2L3

T2L3 $\exists x1 \ldots \exists xn \exists yQ1z1... Qmzm \forall z[M(z1,... zn,y) \supset P(y)) \supset P(z)]$

1. $\exists x1 \ldots \exists xn \forall y(A(x1,.. . ,xn, y)$ ip.
2. $\exists x1 \ldots \exists xn[\forall y(A(x1,...,xn) \supset P(y)) \supset \forall yP(y)]$. (T2L1,RE,1, Lema1)

Universitatea Spiru Haret

Formulele 1 şi 2 sunt deductiv echivalente potrivit Lemei 1.

Dar formula 2 este identică cu primul termen al Lemei 3, cu T1L3, care, la rândul lui, este echivalent cu cel de al doilea termen al Lemei 3, cu T2L3. Cum echivalenţa este mai tare decât deductiv echivalenţa şi termenul 2 din Lema 1 coincide cu termenul 1 din Lema 3, termenul 1 din Lema 1 este deductiv echivalent cu termenul 2 din Lema 3, cu T2L3, respectiv cu:

3. $\exists x1 \ldots \exists xn \exists y Q1z1 \ldots Qmzm \forall z[M(z1,\ldots zn,y) \supset P(y)) \supset P(z)]$

unde M din termenul 2 din Lema 3 va fi înlocuit printr-un predicat M1, care stă pentru formula $(M \supset P(y)) \supset P(z)$.

Aceasta este intuiţia noastră iniţială.

Dar să ne întoarcem la maniera lui P. S. Novikov de a demonstra ultima parte a teoremei lui Skolem. Din ipoteza 1 de mai sus putem printr-o substituţie a variabilei predicative A printr-o formulă B = Q1z1…QmzmC să obţinem:

4. $\exists x1 \ldots \exists xn \forall y\ Q1z1 \ldots Qmzm\ C(z1,\ldots,zm, x1,\ldots,xn, y)$

Formula 4 este, după Novikov, tot una cu termenul întâi al Lemei 1.

Sarcina pe care trebuie să ne-o asumăm în acest moment este aceea de a demonstra că formula 4, de fapt primul termen al Lemei 1 este deductiv echivalent cu formula:

5. $\exists x1 \ldots \exists xn \exists y\ Q1z1 \ldots Qmzm\ \forall zC1$

unde C1 stă pentru $(C \supset P(y)) \supset P(z)$ şi C şi C1 nu conţin cuantificatori.

Comparând 4 cu 5 Novikov observă că, în formula 5 faţă de 4, a fost înlocuit primul cuantificator universal $\forall y$ prin $\exists y$ şi că a apărut în 5, în faţa matricei un nou cuantificator universal $\forall z$. În ceea ce ne priveşte noi ştim că trecerea de la $\forall y$ la $\exists y$, de la toţi la unii, era cunoscută de Aristotel, iar în sistemul axiomatic al logicii predicatelor am demonstrat-o ca teorema T2. În ceea ce priveşte, cea de a doua modificare şi anume apariţia unui nou cuantificator universal în faţa matricei acesta s-a datorat substituţiei amplificatoare operată în 4, A/C, unde C avea variabile libere z1,. . .,zm. Şi cum C este o matrice în formă normală, dacă C este realizabilă şi implică un atom i.e. $C \supset P(y)$, atunci din adevărul lui C obţinem P(y), iar prin regula derivată a introducerii cuantificatorului universal obţinem $\forall yP(y)$ şi prin regula redenumirii variabilelor legate obţinem $\forall zP(z)$. Aceasta dă seama de cele două deosebiri dintre 4 şi 5 semnalate de P.S. Novikov. Explicaţia dată de noi pentru cele două deosebiri între o formulă de tip 4 şi alta de tip 5 se poate constitui într-o subrutină ce poate fi repetată de mai multe ori.

Universitatea Spiru Haret

Dacă formula 4 de mai sus are forma:

4.1 $\exists x1 \ldots \exists xn \exists y \exists z1 \ldots \exists zr\text{-}1 \forall zrQr+1zr+1 \ldots Qmzm \forall zC1$

atunci prin subrutina menţionată mai sus putem obţine o formulă analogă lui 5

5.1 $\exists x1 \ldots \exists xn \exists y \exists z1 \ldots \exists zr\text{-}1 \exists zrQr+1zr+1 \ldots Qmzm \forall z \forall z'$ C2

care este deductiv echivalent[cu 4.1.

Aplicând de mai multe ori acest demers, ajungem la o formulă deductiv-echivalentă cu formula 4, care este tot una cu primul termen al Lemei 1, modificată printr-o substituţie corectă în sistemul axiomatic al logicii predicatelor. Ajungem astfel la formula:

6. $\exists x1 \ldots \exists xn \exists y \exists z1 \ldots \exists zm \forall z \forall z' \ldots \forall z^{(p-1)}$ Cp

În plus, formula 6 este în formă normală Skolem.

Mai trebuie doar să arătăm că orice formulă în formă normală prenexă poate fi adusă la o schemă de tip 6.

Fie o formă normală prenexă de forma:

7. Q1z1…QmzmB

unde B este adusă la o formă normală şi deci nu conţine cuantificatori. Admitem, de asemenea, că în B nu apar variabilele x şi y.

Atunci formula:

8. $\exists x \forall y$ Q1z1…Qmzm[B$\wedge$(P(x)$\vee$-P(x))$\wedge$(P(y)$\vee$-P(y))]

coincide ca structură de prefix cu schema 4 de mai sus.

Putem include în formulă cuantificatorii Qizi şi obţine:

9. $\exists x \forall y$ [Q1z1…QmzmB$\wedge$(P(x)$\vee$-P(x))$\wedge$(P(y)$\vee$-P(y))]

Dar formula 9 este structural echivalentă cu formula 7, dacă matricea B nu conţine variabilele x şi y.

Într-adevăr, aplicând la 9 regula eliminării cuantificatorului existenţial obţinem:

10. $\forall y$ [Q1z1…QmzmB$\wedge$(P(a)$\vee$-P(a)) $\wedge$(P(y)$\vee$-P(y))]

Cum însă P(a)$\vee$-P(a) este o tautologie, i.e. P(a)$\vee$-P(a) = 1 şi D$\wedge$1 = D şi pentru y = a, obţine tot o tautologie, conjuncţia dintre termenii 2 şi 3 ai matricei va fi şi ea tot o tautologie şi în final B$\wedge$1 = B. Pe această cale formula 10 se reduce la formula 7.

Din cele de mai sus rezultă că pentru orice formă normală prenexă putem construi o formulă echivalentă cu formula 8, care la rândul ei are aceiaşi formă cu formula 4 ce este echivalentă cu primul termen al Lemei 1. Dar primul termen al Lemei 1 este deductiv echivalent cu formula 6 care este, totodată, şi în formă normală Skolem. De unde concluzia generală de importanţă teoretică şi practică: Pentru orice formulă A, bine formată în logica predicatelor, putem construi forma sa normală

Universitatea Spiru Haret

prenexă A_S astfel încât A şi A_S sunt deductiv echivalente, adică dacă din H, A ├ A_S, atunci şi numai atunci din H, A_S ├ A.

Formele normale prenexe şi formele normale Skolem sunt formule standardizate care au matricea în formă clauzală. Aceste forme sunt pasibile de prelucrare computerizată.

Orice bază de cunoştinţe poate fi adusă la forma sa normală conjunctivă sau la forma sa normală disjunctivă.

Or, aceste forme sunt concludente în privinţa clauzelor generice ce pot fi degajate din baza iniţială de cunoştinţe. Aceste clauze generice descriu relaţiile de dependenţe (cauzale, legice, directive practice sau instrucţiuni) dintre diferite clase de obiecte la nivel ontic fizic-natural sau social-istoric.

Eliminarea prin legi de inferenţă a cuantificatorilor existenţiali duce la descoperirea unor obiecte individuale semnificative în domeniul de interpretare şi foarte adesea la identificarea bazei factuale sau a modelului situaţiei acţionale sau a stărilor fizice de fapt.

Pe baza clauzelor generice şi a datelor factuale, în funcţie de întrebările generice pe care le avem, putem pune în funcţiune diferite „maşini inferenţiale", tehnici şi procedee de decizii care descoperă răspunsurile a la întrebările care ne frământă.

De curând am descoperit un procedeu prin care oricărui set de clauze provenit dintr-o bază de cunoştinţe despre un domeniu oarecare putem să-i asociem o bază factuală şi un arbore de întemeiere/derivare ce ilustrează ce teoreme putem deriva din acea bază şi ce teze poate argumenta o fiinţă umană ce acceptă enunţurile descrise prin acel set de formule.

Teoria formelor normale transformă pe logician în arhitect, constructor şi interpret al unor baze de cunoştinţe. Logicianul devine astfel proiectant de baze de cunoştinţe computaţionale. Formalizarea ce aparent ne îndepărtează de realitate se întoarce în realitatea pragmatică şi contribuie la rezolvarea mecanizată a problemelor.

Exerciţii de logica predicatelor şi de axiomatica logicii predicatelor

1. Formalizaţi în limbajul logicii predicatelor propoziţiile:
   a. Oricine se iubeşte pe sine iubeşte pe cineva.
   b. Nici o îndrăgostită de amantul Anei nu o iubeşte pe Ana.
2. Relaţiile de echivalenţă şi echivalenţă deductivă.
3. Cum se aduce o formulă la forma sa normală prenexă ?

Universitatea Spiru Haret

4. Demonstrați echivalența dintre o formulă A şi forma sa normală prenexă.
5. Teorema deducției în logica propozițiilor şi în logica predicatelor.
6. Raționamentele din ipoteză şi teorema deducției.
7. Se dă formula, Călin îşi iubeşte bunicul din partea tatălui său.
8. $\forall y \forall z[(T(x,z) \wedge T(y,z)) \supset (x = y)]$ şi interpretare T(x, y) = x este tatăl lui y să se traducă formula în limba română literară fără să menționați în propoziție vreo variabilă.
9. Se dau semnul funcțional f(x) şi predicatul binar I(x,y) = „x iubeşte pe y". Să se formalizeze propoziția: „Călin îşi iubeşte bunicul din partea tatălui său".
10. Se dau predicatele T(x,y) = „x este tatăl lui z" şi I(u,v) = „u îl iubeşte pe v". Să se scrie în logica predicatelor propoziția: „Călin îşi iubeşte bunicul din partea tatălui său".
11. Semantica termenilor. Numele proprii, poreclele, descripțiile individuale şi specia de atomi predicativi t1 = t2.
12. Teoria sistemelor axiomatice şi demonstrațiile din ipoteze.
13. Relațiile de dependență la nivel ontic şi implicațiile cuantificate universal.
14. Se dă formula $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists x P(x)$. Să se calculeze o consecință imediată din ea.
15. Se dă formula $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists x\text{-}Q(x)$. Să se verifice consistența ei.
16. Formalizarea logică a unor obiecte, proprietăți şi relații dintr-un domeniu din realitate. Ce se conservă prin trecerea de la nivel ontic la nivel logic formal?
17. Regulile substituției în sistemul axiomatic al logicii predicatelor.

Universitatea Spiru Haret

IV.TEORIA DEFINIŢIILOR ŞI BAZELE DE CUNOŞTINŢE

1. Introducere

Definiţia este operaţia logico-semantică prin care se determină semnificaţia unui termen într-un limbaj.

Ne propunem, în capitolul de faţă, să prezentăm, pe scurt, teoria clasică a definiţiilor, teoria definiţiilor în limbajele axiomatice şi formale, precum şi rolul definiţiilor în organizarea bazelor de cunoştinţe şi în scrierea instrucţiunilor Prolog.

Ne vom concentra atenţia asupra prezentării teoriei definiţiilor din perspectiva logicii predicatelor de ordinul întâi, insistând asupra restricţiilor pe care trebuie să le satisfacă definirea corectă a unor relaţii, semne funcţionale sau constante, ca şi asupra satisfacerii cerinţelor de eliminabilitate şi noncreativitate. Vom perfecţiona, totodată, teoria semiotică a definiţiilor pe care am propus-o cu aproape trei decenii în urmă. Ne vom ocupa, de asemenea, de tipologia definiţiilor, de definiţiile operaţionale şi de cele recursive, de definiţiile lexicale şi de cele stipulative, ca şi de rolul definiţiilor în sistemele de calcul. Vom trata, pe scurt, funcţiile cognitive ale definiţiilor referindu-ne, totodată, la rolul definiţiilor în instrucţie şi în argumentare.

2. Teoria aristotelică a definiţiei

Discuţiile în contradictoriu în Academia platonică i-a oferit, se pare, de timpuriu lui Aristotel un bogat „câmp experimental" pentru studierea procedeelor de argumentare şi respingere a unei teze, a modalităţilor de definire corectă a unei noţiuni, precum şi a erorilor strecurate în argumentare sau definire. Teoria definiţiei expuse amplu în cărţile VI şi VII din *Topica* poartă pecetea controversei teoretice dintre cei doi adversari într-o dispută, unul având sarcină de a enunţa şi apăra o teză, iar celălalt de a căuta să o infirme. Menirea *Topicelor* este să-l înarmeze pe interlocutor cu arta folosirii judecăţilor probabile, să circumscrie un număr de trăsături şi scheme generale ale argumentării şi respingerii într-o dispută denumite *topice* sau locuri comune.

Universitatea Spiru Haret

Topica, lucrare de importanță excepțională pentru înțelegerea dialecticii la Aristotel, apare, totodată, ca o teorie despre natura și proprietățile predicatului logic într-o propoziție. În literatură această teorie era cunoscută sub denumirea de concepția aristotelică a predicabililor. În esență, aceasta se reduce la observația că, după raporturile lor cu subiectul (este vorba de subiectul logic în cazul unei judecăți de predicație) predicatele aparțin la patru categorii fundamentale (predicabile): accidentul, genul, propriul și definiția.

Accidentul este un predicat care prin natura sa nu ține de esența lucrului (respectiv a subiectului) și este raportat întâmplător datorită unor cauze exterioare la subiect. De exemplu, „Socrate este persoana ce șade sub măslin" predicatul ('persoana ce șade sub măslin') nu descrie vreo însușire intrinsecă a lui Socrate, ci doar un atribut conjectural al acestuia.

Spre deosebire de accident, *genul*, exprimă o esență comună mai multor clase de obiecte, care se deosebesc între ele prin diferențe. Când este enunțat despre o specie genul nu dezvăluie o notă proprie acesteia, ci doar o însușire pe care specia în cauză o are împreună cu alte specii. Așa, de exemplu, în propoziția „spartanii sunt greci" predicatul 'greci' este deținut de subiectul 'spartani' împreună cu locuitorii altor cetăți grecești, cum ar fi atenienii, tebanii, cretanii, micenienii etc.

Propriul, fără a fi o notă esențială a subiectului, denumește, totuși o proprietate legată indisolubil de subiectul propoziției, astfel încât, orice obiect care satisface subiectul satisface, în același timp, și propriul și invers. Astfel despre orice ființă umană se poate spune că este un biped fără pene și despre orice biped fără pene se poate spune că este o ființă umană. Dar descripția de „biped fără pene" nu denotă o însușire esențială a indivizilor din specia umană.

Definiția, în afară de faptul că este echireferențială cu subiectul sau termenul de definit, are, după Aristotel, particularitatea de a fi o „vorbire (λογος) care exprimă esența unui lucru. Ea întrebuințează sau o vorbire în locul unui nume sau o vorbire în locul altei vorbiri, căci unele lucruri exprimate printr-o vorbire pot fi și ele definite"[1] Prin vorbire, aici, trebuie să înțelegem o descripție prin epitete sau predicate a unui obiect.

Comment [CP1]:

Predicabilii *propriu* și *definiția* generează judecăți necesar adevărate, în timp ce accidentul generează judecăți nonnecesar adevărate sau posibil adevărate. Pe de altă parte, judecățile produse cu ajutorul predicabilelor *propriu* sau *definiție* sunt convertibile simplu, în timp ce judecățile în care intervin predicabilii gen sau accident sunt convertibile prin accident, sau prin diminuarea cantității.

Universitatea Spiru Haret

Aristotel susţine că definirea trebuie efectuată prin gen proxim şi diferenţă specifică: „…la definire trebuie să aşezăm lucrul sub genul său şi să adăugăm diferenţele, deoarece într-o definiţie genul redă, în primul rând, esenţa definitului”[2].

În ceea ce priveşte diferenţele, Aristotel precizează că acestea sunt note care se aplică unor indivizi din extensiunea genului, astfel încât să selecteze doar indivizii din specia numită de subiect. Aplicate la gen diferenţele dau naştere unor specii opuse, subordonate sub raport extensional genului.

Definiţia nu este la Aristotel o operaţie pur formală, ci una cognitivă şi discursiv-comunicativă, înserată într-un proces instructiv.

„Căci definim pentru a cunoaşte obiectul dat, iar cunoaştem nu prin orice factori ci numai prin aceia daţi înainte şi mai bine cunoscuţi, întocmai ca la demonstraţii (căci aceasta este calea oricărei învăţături predate sau însuşite). Este deci, că, dacă nu întrebuinţăm pentru definiţie astfel de factori, nu am definit de loc. Altminteri, unul şi acelaşi lucru ar avea mai multe definiţii[3]”

Detaşându-ne de textul operei aristotelice vom remarca faptul că tradiţia a reţinut din doctrina aristotelică cu prioritate exigenţele sintactice şi semantice stipulate de stagirit şi a ignorat restricţiile de ordin comunicativ şi pragmatic. Rezumăm mai jos principalele teze care au circulat în manualele de logică 2400 de ani:

1 Orice definiţie are un termen de definit *(definiendum)*, o expresie definitoare şi o relaţie de definire, notată, de regulă prin „$=_{df}$” care se citeşte „…este identic prin definiţie cu…”. Rolul relaţiei de definire constă în descrierea unei identităţi de semnificaţie între termenul de definit, notat prescurtat prin Dfd şi semnificaţia expresiei definitoare, notată prin Dfn. Aceasta înseamnă că termenul de definit este explicat persoanei căreia i se adresează definiţia prin expresia definitoare care, de regulă, va face uz de termni cunoscuţi de adresant.

2. Definiţia trebuie dată prin gen proxim şi diferenţă specifică. Aceasta înseamnă, că din punct de vedere extensional, trebuie să includem sfera noţiunii de definit în sfera unei noţiuni gen, imediat supraordonate sferei noţiunii termenului de definit. Astfel, definind pătratul vom spune că este patrulaterul cu toate laturile egale şi unghiurile drepte. Termenul „pătrat „este pe post de *definiendum* sau termen de definit. Expresia „patrulaterul cu toate laturile egale şi unghiurile drepte” este pe post de definitor sau *definiens*. Termenul „patrulater” descrie genul, iar expresia „cu toate laturile egale şi unghiurile drepte” descrie diferenţa specifică.

Universitatea Spiru Haret

3. Definiția trebuie să fie adecvată sau caracteristică. Aceasta revine la a susține că definitorul sau expresia definitoare (i.e. *definiens*-ul) trebuie să fie extensional echivalentă cu termenul de definit sau *definiendumul*. Sunt posibile două abateri de la această regulă:

a) descripțiile stipulate pentru definitor pot fi prea puternice, iar extensiunea acestuia prea restrînsă, încât să nu acopere întreaga sferă a termenului de definit;

b) descripțiile stipulate pentru definitor pot fi prea slabe şi în consecință sfera definitorului să fie mai largă decât cea a termenului de definit ;

c) descripțiile stipulate pentru definitor pot fi inadecvate în dublu sens, nu convin tuturor obiectelor incluse în sfera termenului de definit şi, în plus, permit includerea în sfera termenului de definit a unor obiecte ce nu aparțin acestuia.

4. Definiția nu trebuie să fie circulară, i. e. *idem per idem*. Expresia definitoare nu trebuie să conțină termenul de definit. Circularitatea poate surveni imediat, la nivelul definiției de referință sau poate surveni la nivelul unui şir de definiții ce precizează limbajul unui domeniu de activitate.

5. Definiția trebuie formulată în termeni pozitivi, pe cât posibil. Stipularea faptului ce nu este un anume obiect nu ne ajută decât în rare cazuri să identificăm natura obiectului. Astfel, definirea relației de paralelism între două drepte prin precizarea faptului că nu se întâlnesc niciodată nu constituie o condiție perfect controlabilă şi capabilă să ducă la o decizie printr-un număr finit de paşi.

6. Termenii care apar în definitor trebuie să fie anterior cunoscuți de către adresantul definiției pentru ca termenul de definit să poată fi explicat prin expresia definitoare.

7. Definiția trebuie să dezvăluie esența obiectului definit, nu doar o proprietate superficială a acestuia.

8. În definitorul unei definiții nu trebuie să apară expresii figurative, metafore, termeni neclari.

3. **Critica teoriei aristotelice a definiției**

Aristotel a dezvoltat o teorie a definițiilor în contextul teoriei argumentării şi a judecăților de predicație. El a formulat unele cerințe judicioase cu privire la definiții, cum ar fi cerința adecvării conținutului şi sferei expresiei definitoare la natura obiectului de definit, la extensia şi

Universitatea Spiru Haret

conţinutul acestuia. Aristotel a înţeles că o definiţie trebuie dată astfel încât termenul de definit şi expresia definitoare să fie echireferenţiale, respectiv să vizeze aceiaşi clasă de obiecte. Cei doi termeni ai unei definiţii corecte trebuie să fie semantic echivalenţii i. e. Dfd şi Dfn sa se refere la aceiaşi clasă de obiecte.

Comment [CP1]: t

Aristotel a fost pe deplin conştient de legătura teoriei definiţiilor cu limbajul şi cu actele de comunicare. Vorbind în termeni moderni, am putea spune că Aristotel s-a apropiat de înţelegerea dimensiunii pragmatice a actului de definire, că cineva defineşte pentru altcineva un termen şi că receptorul definiţiei trebuie să înţeleagă termenul de definit cu ajutorul termenilor din expresia definitoare (Dfn), care trebuie să-i fie anterior cunoscuţi.

Aristotel a cerut ca definirea să se facă serios, vizând surprinderea esenţei obiectului de definit şi nu doar surprinderea unor trăsături superficiale. Dar el nu a putut prescrie condiţii logic-formale care să distingă între o definiţie cu valoare cognitivă şi alta care n-ar satisface această cerinţă.

Care sunt principalele obiecţii critice care se pot aduce astăzi teoriei aristotelice ?

1.Aristotel pretinde că orice definiţie trebuie dată prin gen proxim şi diferenţă specifică. Dar aceasta este o condiţie restrictivă prea puternică. Sunt numeroase cazuri în care aceasta condiţie poate fi satisfăcută cu folos. Dar identificarea genului proxim nu este o condiţie *sine qua non* a unei definiţii corecte. Putem utiliza şi un gen supraordonat genului proxim în care să încadrăm extensiunea termenului de definit. Important este ca prin diferenţele specifice adăugate, prin descripţiile ce le propunem, să acoperim întreaga extensiune a termenului de definit şi numai pe aceasta. Mai mult, putem da definiţii formal corecte care să nu utilizeze nici măcar un gen supraordonat oarecare şi în care extensiunea definitorului să fie descrisă cu ajutorul unor operaţii de reuniune, intersecţie, complementaritate, etc. sau disjuncţie, conjuncţie etc. Definiţia dată de Aristotel omului ca fiinţă raţională, strict vorbind nu este prin gen proxim şi diferenţă specifică. Genul proxim al omului este „antropoid superior", nu noţiunea de „fiinţă".

2. Teoria aristotelică a definiţiilor vizează cu prioritate predicate monadice ce descriu proprietăţi ale unor clase de obiecte şi neglijează relaţiile sau predicatele binare şi n-are, care intervin în mod major în cunoaşterea modernă. Ea nu poate da seama de definiţia termenilor fun-cţionali, a operaţiilor matematice sau a constantelor individuale.

Universitatea Spiru Haret

3. Teoria aristotelică a definiţiilor nu este elaborată în cadrul unui limbaj logic formal apt de a descrie exact limbajul unei discipline ştiinţifice, un limbaj de programare sau un segment dintr-o limbă naturală. Teoria aristotelică nu poate da seama de conexiunile şi funcţiile definiţiilor într-o teorie ştiinţifică, de relaţiile definiţiilor cu axiomele, cu regulile de inferenţa, cu teoremele demonstrabile într-un astfel de context.

4.Teoria aristotelică nu dă seama de definiţiile recursive, de cele operaţionale, stipulative, ostensive, etc.

4. **Exemple de definiţii**

Botanica este ştiinţa care se ocupă cu studierea plantelor, având ca obiectiv cercetarea structurii, activităţii vitale şi dezvoltării plantelor, relaţiile lor faţă de mediul înconjurător, repartizarea lor în spaţiu şi în timp, clasificarea, originea şi evoluţia lor. (D. E. R., vol. I, pag. 400)

Brâu 1. Cingătoare ţesută din lână colorată, în dungi sau cu motive împletite, lungă până la 4m, lată până la 35 cm.

2. (ARHIT.) *Brâu 2.* Element decorativ orizontal, continuu, în relief faţă de planul zidului şi, de obicei, ornamentat.

3. *Brâu 3.* Joc popular românesc, răspândit în diverse variante şi având diferite denumiri pe ambele versante ale Carpaţilor, joc de bărbaţi sau mixt, în formaţie de semicerc, cu braţele pe umeri sau prinse în cingătoarea vecinului; se joacă după o melodie vioaie, în ritm binar sincopat, cu multe figuri de virtuozitate, pe câte 3 sau 4 măsuri constând în mişcări cu plimbări mai lente (D.E.R., pp 424-425).

Accepţia *Brâu 1* este introdusă printr-o *definiţie lexicală* care descrie modul în care vorbitorii limbii române folosesc cuvântul brâu. Definiţiile lexicale descriu modul de utilizare a termenilor într-o limbă naturală. Înrudită cu prima accepţie, cea de a doua accepţie *Brâu 2* aparţine arhitecturii şi artelor decorative. Cea de a treia accepţie, *Brâu 3* ţine de domeniu folclorului şi etnografiei.

Calcul (lat. *calculus,* „pietricică") 1.(MAT.) a) Ansamblu de operaţii matematice, făcute în vechime cu ajutorul pietricelelor, de unde şi numele b) Capitol al ştiinţelor matematice în care se foloseşte un anumit tip de operaţii matematice (ex. c. *diferenţial*, c. *integral,* c. *logic* etc.). c) Efectuare a operaţiilor matematice cu ajutorul unor construcţii grafice sau al unor dispozitive, maşini, aparate, numite calculatoare sau maşini de calcul.

2. (MED.) Corp solid, de obicei în formă de pietricică, rezultat din precipitarea sărurilor organice şi anorganice din bilă, urină, salivă,

Universitatea Spiru Haret

lacrimi, etc. (colesterină, oxalaţi, fosfaţi, bicarbonat de calciu). Se formează în interiorul unui organ sau în canalele excretoare ale acestuia (ex. calcul *renal*, calcul *colecistic*, etc.).

Stalactită – depunere calcaroasă de formă conică, fixată prin baza sa de tavanul unor goluri subterane (peşteri, galerii) şi formată prin depunerea carbonatului de calciu din picăturile de apă (D.E.R, vol. 4, p. 482).

Definiţiile date sensului medical al termenului calcul, ca şi definiţia stalactitei sunt descriptiv-genetice şi cauzal-explicative.

Termen Fie date alfabetele:

$A_{ci} = \{ a, b, c, a_1, b_{1...} \}$ constante individuale
$A_{vi} = \{ x, y, z, x_1, x_{2...} \}$ variabile individuale
$A_F = \{ f, g, h, f_1,... \}$ simboluri funcţionale

Numim *termen* orice expresie scrisă în alfabetul $A_T = A_{ci} \cup A_{vi} \cup A_F$ obţinută prin aplicarea de un număr finit de ori a regulilor:

T1. Dacă α aparţine lui A_{ci} atunci α este un *termen*.

T2. Dacă α aparţine lui A_{vi}, atunci α este un *termen*.

T3. Dacă f aparţine lui A_F şi aritatea lui f, notată prin $\delta(f)$, este n şi $t_1,...,t_n$ sunt termeni, atunci f $(t_1,...,t_n)$ este un *termen*.

Potrivit lui T1 simbolurile a, b, c, a_1,... sunt termeni. Ele ţin loc numelor proprii sau descripţiilor individuale. Aşa, de exemplu, putem avea a = Petru, b = Ion etc. Potrivit lui T2, x, y, z, x_1,... vor fi, la fel, termeni, dar termeni cu referinţă ambiguă, neprecizată. Ei ţin loc particulelor din limba naturală, „cineva", „ceva", „careva", „undeva".

Regula T3 permite construirea termenilor compuşi. Dacă f şi g sunt simboluri funcţionale monadice ce ţin loc unor operaţii unare, cum ar fi, de exemplu, y este tatăl lui x, y = f (x) sau z este primul născut al lui x, z = g (x), atunci f (x) şi g (x) vor fi, de asemenea, termeni.

Dacă f_1 desemnează adunarea şi g_1 înmulţirea ca operaţii binare în N (se înţelege $\delta(f) = \delta(g_1) = 2$), atunci g (f (x, y), z) va desemna tot un număr din N rezultat din înmulţirea sumei dintre x şi y cu numărul z.

Termenii sunt, aşadar, expresii scrise în subalfabetele A_{ci}, A_{vi}, A_F în conformitate cu regulile T1, T2, şi T3.

Termenii sunt mijloace de referire sau denumire a unor obiecte dintr-un domeniu de referinţă. Ei ţin locul numelor proprii şi descripţiilor individuale din limbile naturale. Despre termeni mai exact despre obiectele denumite prin termeni putem, întotdeauna, enunţa anumite proprietăţi.

Strict vorbind, termenii nu sunt formule logic-predicative, ci material de construcţie pentru alcătuirea formulelor.

În formulele atomare termenii vor servi ca argumente pentru simbolurile predicative.

Universitatea Spiru Haret

Admițând alfabetele A_{ci}, A_{vi}, A_F, atunci, conform cu T1 vor fi termeni a, b, c, a_1 şi b_1 şi conform cu T2 vor fi termeni x, y, z, x_1, x_2 şi dacă $f \in A_F$ şi $\delta(f) = 1$ şi $\delta(g) = 2$, atunci vor fi termeni compuşi: f(a), g(f(a), b), f(g(f(a), b)), g(f(g(f(a), b)), c) etc. .

Se observă că un termen compus poate intra în continuare în structura altui termen compus.

Aşa cum în algebră definim unele numere cu ajutorul unor operații algebrice, tot aşa în logica predicatelor definim unii termeni compuşi cu ajutorul simbolurilor funcționale. Un termen compus este o aplicare a unui simbol funcțional de aritate n la alți n termeni anterior definiți. Procedeul este iterativ.

Este util să menționăm că în scrierea termenilor din logica predicatelor putem utiliza trei moduri de scriere prefixată, infixată şi postfixată.

În scrierea prefixată se scrie la începutul expresiei simbolul funcțional. În scrierea infixată simbolul funcțional se scrie la mijloc, ca + în aritmetică, 3 + 2; dimpotrivă, în scrierea postfixată se scriu întâi argumentele şi la urmă, în dreapta, simbolul funcțional.

Definiția de mai sus este o definiție *nominală*, *stipulativă* prin care un autor precizează accepția pe care el i-o dă unui termen într-un studiu, manual sau comunicare.

Ea este o definiție *inductivă*, care este inițializată prin regulile T1 sau T2 şi permite iterarea de un număr finit de ori prin regula T3.

Definiția termenului este, în acelaşi timp, *constructivă* şi *computațională.* La fel sunt în logica predicatelor definiții inductive şi constructive definițiile date conceptului de *formulă bine formată*, ca şi celui de teoremă într-un sistem axiomatic. La fel, într-o teorie a argumentării temeiul unui temei al unei teze de argumentat va fi şi el un temei, mai îndepărtat, al primei teze de argumentat, la fel cum strămoşul unui strămoş de al meu, va fi şi el un strămoş, mai îndepărtat de al meu.

5. **Teoria conceptului**

În logica aristotelică o noțiune se definea prin determinarea sferei şi a conținutului. Din noțiuni se închegau judecățile şi din acestea se alcătuiau raționamentele. Teoria conceptului propusă de logica clasică este neoperantă pentru analiza limbajelor teoriilor ştiințifice. Schițăm mai jos elementele unei teorii a conceptului compatibile cu nevoia analizei limbajelor teoriilor ştiințifice.

Universitatea Spiru Haret

Elementele unui concept sunt: numele, extensiunea, intensiunea, operaţiile şi rezultatul operaţiilor.

C = [N, D, I, O, R]

unde: N desemnează numele sau termenul prin care este desemnat conceptul; D desemnează denotatul sau extensiunea conceptului (în logica aristotelică i se spune sferă); I stă pentru *intensiunea* conceptului sau conţinutul acestuia (aceasta va fi exprimată printr-o listă de descriptori, redată în logica predicatelor prin atomi predicativi); O stă pentru o listă de operaţii care se vor aplica asupra obiectelor din D, respectiv, asupra obiectelor din sfera noţiunii, atunci când noţiunea are denotat sau referent material; R este o stare rezultat obţinută ca urmare a aplicării operaţiilor asupra obiectului; această stare are anumite proprietăţi:

1. Orice concept poate fi exprimat explicit printr-o definiţie;

2. Definiţia stabileşte o echivalenţă referenţială între numele unui concept redat printr-un simbol predicativ de forma P(x1,x2,…,xn) şi intensiunea acestuia redată printr-o formulă bine formată în logica predicatelor de ordinul întâi, S, ce conţine atomi predicativi primitivi sau derivaţi, conective logice şi cuantificatori;

Echivalenţa referenţială este exprimată prin simbolul $=_{df}$ sau prin ≡;

4. Numele conceptului este pe post de *definiendum*, iar intensiunea acestuia pe post de *definiens;*

5. O şi R intervin *numai* în definiţiile operaţionale, care presupun acte sau operaţii umane ce condiţionează atribuirea către un obiect a unui descriptor sau proprietăţi de aplicarea asupra acestuia a unui test şi de obţinerea unui rezultat.

Echivalenţa referenţială descrisă mai sus la 2 poate fi redată grafic ca în fig. 1.

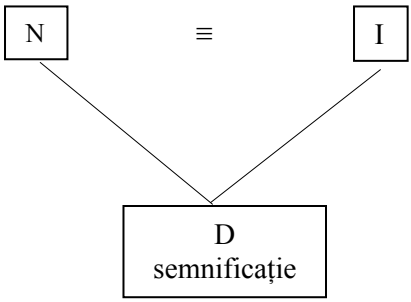


Figura 1. *Reprezentarea grafică a definiţiilor explicite*

Universitatea Spiru Haret

6. N, termenul de definit sau numele conceptului este exprimat printr-un atom predicativ neprimitiv, de exemplu prin P(x1,x2, …,xn);

7. I, intensiunea conceptului este exprimată printr-o formulă bine formată în logica predicatelor de ordinul întâi ce îndeplineşte rolul de *definiens* sau expresie definitoare, redată prin Dfn;

8. D descrie mulţimea obiectelor de referinţă sau referentul conceptului, în cazul conceptelor referenţiale;

9. Echireferenţialitatea înseamnă că şi N şi I desemnează, deopotrivă, pe D şi însuşirile acestuia sau semnificaţia ;

10. Elementele esenţiale ale unei definiţii sunt numele conceptului sau termenul de definit (*definiendum)* şi intensiunea acestuia sau expresia definitoare, denumită tradiţional *definiens.*

11. Fie acum F o formulă bine formată în limbajul L al unei teorii în care apare termenul sau numele N introdus anterior printr-un enunţ definiţional de forma:

$S = (N \equiv I)$ sau $S = (N =_{df} I)$

unde N este conceptul nou introdus prin enunţul definiţional S.

În acest caz, noi putem substitui apariţia în F a lui N, pe baza enunţului definiţional S, prin echivalentul său I, obţinând astfel o *explicaţie* sau *analiză* semantică a termenului N.

Dimpotrivă, dacă în F, o propoziţie din teorie, apare descripţia sau explicaţia I, *definiens*-ul lui S, atunci noi putem substitui pe I prin *definiendumul* său, respectiv prin expresia mai concisă N.

În exemplul considerat noi am făcut uz de regula substituirii echivalenţelor, notată în mod curent prin RE, regula echivalentelor. De această regulă am făcut uz în teoria sistemelor axiomatice.

Demn de reţinut este faptul că de această regulă facem frecvent uz în limbile naturale, ori de câte ori vrem să-i explicăm unui interlocutor accepţia pe care noi o dăm unui termen. Introducerea unei astfel de explicaţii este adesea anunţată de particula „adică". Zicem „celibatar" adică „burlac", dacă interlocutorul nostru nu cunoaşte termenul „celibatar", dar cunoaşte termenul „burlac". Dacă acesta nu cunoaşte nici unul din cei doi termeni atunci i-l explicăm pe unul dintre ei printr-o descripţie ce redă explicaţia sau *definiens*-ul termenului. Aceasta ar putea fi „bărbat matur necăsătorit, prin liberă opţiune „.

Şi într-un caz şi într-altul se conservă semnificaţia formulei F din limbajul L al unei teorii oarecare. Se conservă şi valoarea sa de adevăr, dar se poate schimba mulţimea agenţilor receptori sau mulţimea interpreţilor ce o înţeleg. O definiţie bine dată poate extinde mulţimea interlocutorilor ce înţeleg termenul ce desemnează conceptul.

Universitatea Spiru Haret

12. Să presupunem că într-o teorie T au fost introduse, pe baza unui set de atomi predicativi primitivi At = [A1, A2, …, An], enunţurile definiţionale, S1, S2, …, Sm. Să admitem, de asemenea, că un enunţ definiţional S este descris prin relaţia def(Dfd, Dfn), care se citeşte: „termenul Dfd se defineşte prin intermediul elementelor din Dfn".

Atunci, ne putem pune, în mod legitim, cel puţin următoarele două întrebări. Mai întâi, ce raport există între atomii primitivi şi atomi care apar ca termeni de definit din definiţiile S1,. .. ,Sm ? Şi cea de a doua întrebare, ce relaţii se instituie între termenii introduşi prin definiţie în acea teorie ?

Prima definiţie introdusă nu poate avea în *definiens* decât atomi primitivi, respectiv elemente din At. Toate celelalte definiţii pot avea în definitor atomi primitivi sau atomi derivaţi, introduşi prin definiţiile anterioare lor.

Despre toţi termenii sau mulţimile de termeni T1, T2, T3 care apar într-o teorie pot fi enunţate aceste trei proprietăţi: ireflexivitate, asimetrie şi tranzitivitate.

a) $\neg def(T, T)$

b) $def(T1, T2) \supset \neg def(T2, T1)$

c) $(def(T1, T2) \wedge def(T2, T3)) \supset def(T1, T3)$

Prima cerinţă interzice definiţiile *idem per idem* sau buclele în şirul definiţiilor. Cerinţa b) interzice, mai general, *circularitatea* definiţiilor între doi termeni. Aceasta era o cerinţă formulată încă de către Aristotel. Nici atomii primitivi nu pot fi explicaţi prin ei înşişi. Aceştia nu pot fi explicaţi decât prin exemplificări sau utilizări în contexte practice.

Darea unui exemplu este, într-un fel, o operaţie logică. Cel ce dă un exemplu pregăteşte pentru interlocutorul său o *instanţiere*, o operaţie de trecere de la caracterul abstract al variabilelor dintr-un predicat la nume de obiecte concrete dintr-un domeniu familiar de referinţă ce satisfac acel predicat. Căci logica se ocupă, deopotrivă, de *abstractizare* şi de *determinare* sau coborâre la concret. În acest ultim caz, noi coborâm de la scheme şi structuri logice la clase de obiecte individuale dintr-un domeniu familiar de cunoaştere şi la proprietăţi şi relaţii între acestea. Predicatele instanţiate prin substituirea variabilelor prin constante devin propoziţii factuale şi descriptori de situaţii acţionale.

Cerinţa c), tranzitivitatea relaţiei definiţionale, sugerează posibilitatea reducerii într-o teorie ştiinţifică axiomatică sau într-o bază de cunoştiinţe a oricărui concept derivat la o formulă logico-predicativă bine formată alcătuită din atomi predicativi primitivi sau anterior introduşi şi din conective logice, cuantificatori sau semne funcţionale.

Universitatea Spiru Haret

Este uşor de observat că introducerea conceptelor derivate într-o teorie ştiinţifică defineşte o *relaţie de ordine* care poate fi descrisă prin arbori, diagrame, matrici etc. Un termen nou introdus, i. e. un *definiendum* poate fi privit ca o funcţie logic-propoziţională sau predicativă de conceptele anterior introduse.

Intr-o transpunere în Prolog, *definiendum*-ul sau termenul de definit va fi pe post de *cap* al unei instrucţiuni, iar *definiens*-ul va fi pe post de coadă a instrucţiunii. La rândul lor, atomii neprimitivi din coada sau corpul unei instrucţiuni pot deveni capetele altor instrucţiuni Prolog, până când vom ajunge la clauze având drept coadă numai atomi primitivi instanţiaţi sau vom obţine atomi nereductibili la atomii primitivi ai teoriei. În această interpretare, termenul de definit sau definiendum-ul devine rădăcina arborelui de reducere, iar atomii primitivi instanţiaţi vor fi pe post de frunze.

13. Este important de observat că arborele ce descrie relaţia de ordine dintre concepte într-o teorie poate fi parcurs în sens ascendent, de la concepte primitive spre concepte derivate, mereu mai complexe, şi în acest caz vom evidenţia *funcţia sintetic-agregatoare a definiţiilor*, după cum poate fi parcurs în sens descendent, *analitic-reductiv*, când un concept derivat complex este succesiv redus la concepte subordonate, mai puţin complexe, până când ajungem la *concepte primitive* în teorie sau constatăm ireductibilitatea conceptului analizat la conceptele primitive ale teoriei.

De aici, vom conchide că teoria conceptului dă seama, deopotrivă, de procesele sintetico-constructive şi de cele analitic-reductive. Analiza şi sinteza sunt operaţii logice formale întemeiate pe teoria conceptului şi a definiţiilor În plus, este cazul să reţinem că teoria definiţiilor şi a conceptelor este intim corelată cu teoria deducţiilor şi a demonstraţiilor în sistemele axiomatice, precum şi cu teoria demonstraţiei automatizate şi cu programarea logică.

14. În studierea rolului definiţiilor într-o teorie ştiinţifică ne putem situa pe poziţia constructorului unei noi teorii, care acceptă un număr de concepte primitive şi construieşte pe baza lor conceptele derivate prin definiţii stipulative sau, dimpotrivă, ne putem situa pe poziţia utilizatorului teoriei care consideră teoria gata construită, conceptele derivate deja introduse şi căută doar să le capteze sensul, să le înveţe, să le descopere sensul prin analiză. În acest caz, *a înţelege un concept derivat* apărut într-un definiendum constă în a-l reduce, prin regula substituirii echivalentelor, la funcţii logic-propoziţionale de concepte primitive anterior înţelese.

Universitatea Spiru Haret

În cadrul unei teorii ştiinţifice pot interveni definiţii ale unor proprietăţi sau relaţii ceea ce echivalează cu introducerea unor concepte derivate, definiţii ale unor operaţii şi în sfârşit, definiţia unor constante sau nume pentru obiecte individuale inedite. Introducerea prin definiţie a unui astfel de obiect ideatic nou va avea o structură şi restricţii specifice, după cum vor exista şi unele proprietăţi sau caracteristici comune.

Teoria definiţiilor în contextul teoriei sistemelor axiomatice face de aproape un secol preocuparea filosofilor şi matematicienilor interesaţi de fundamentele matematicii. Contribuţii remarcabile în această direcţie a avut logicianul american Patrik Suppes, în lucrarea sa *Introducţion to Logic,* 1957, al cărei conţinut îl vom folosi amplu în cele ce urmează.

6. **Definirea unor proprietăţi sau relaţii**

D6.1. *Definirea unei proprietăţi sau relaţii se face prin introducerea unui simbol predicativ nou, P(x1,x2,...,xn) pe post de definiendum echivalent cu o formulă bine formată S, pe post de definiens:*

P(x1,x2,...,xn) $=_{df}$ S (formulă definiţională)

unde formula definiţională S trebuie să satisfacă restricţiile:

1. *Variabilele x1, x2, ...,xn trebuie să fie distincte una de alta;*

2. *În expresia definitoare S, i.e. în Dfn, nu pot apare alte variabile libere decât cele care apar în definiendum, i. e. variabilele x1, x2,..., xn;*

3. *În expresia definitoare S nu vor apare alte simboluri predicative, semne funcţionale sau constante individuale decât cele introduse ca primitive în alfabetul teoriei sau introduse prin definiţiile explicite anterioare.*

Să analizăm, conform exigenţelor lui D6.1 definiţia *brâului* 1, reprodusă mai sus:

*Brâu*1. cingătoare ţesută din lână colorată, în dungi sau cu motive împletite, lungă până la 4m, lată până la 35 cm .

brâu(x) ≡ cingătoare(x) ∧ ţesută din lână colorată(x) ∧ (în dungi(x) ∨ cu motive împletite (x)) ∧ lungime (x, 4m) ∧ lăţime (x, 35cm).

Simbolul predicativ prin care se introduce termenul de definit P(x1, x2,…,xn) a fost înlocuit cu predicatul monadic 'brîu(X)', i.e. δ(x)=1. De reţinut că, sub influenţa programării logice, am scris simbolul predicativ cu literă iniţială mică. Nu am respectat strict regulile de formare din logica predicatelor. Nu am scris simbolul predicativ cu majuscule, P(x), cum se scrie în mod curent în logica predicatelor. Scrierea de mai sus nu respectă strict nici sintaxa Prolog, căci facem uz de diacritice româneşti şi sintaxa Prolog nu admite aşa ceva.

Universitatea Spiru Haret

Simbolul ‘ ≡ ’ stă pentru relația de echivalență referențială redată frecvent prin ‘$=_{df}$’ .Expresia definitoare S este alcătuită din formula moleculară ‘cingătoare(x) ∧ țesută din lână colorată(x) ∧(în dungi(x)∨ cu motive împletite (x)) ∧ lungime (x, 4m) ∧ lățime (x, 35cm)’, care este o funcție propoziționalã de niște atomi predicativi.

Este ușor de observat că sunt respectate primele două restricții: Variabilele din definitor sunt distincte. Avem de fapt aici o singură variabilă şi nu are cu ce se confunda. În definitor nu apare decât o singură variabilă; tot ‘x’, care apare şi în *definiendum*.

Respectarea celei de a treia restricții poate fi observată numai în contextul unei teorii ştiințifice în care au fost listate conceptele primitive şi cele anterior introduse prin definiție. Toate predicatele din definitor sunt considerate ca fiind anterior introduse în discursul nostru despre veşmintele tradiționale românești.

Definiția de mai sus este o definiție lexicală sau cel mult din ştiința folclorului şi deci, este improprie pentru a ilustra rolul definițiilor într-o construcție teoretică.

Un exemplu de încălcare a cerinței 1 din D5.1 este pseudodefiniția:

$x \leq x =_{df} x = x \vee x < x$ (Ctrex1)

Relația ‘ ≤ ’ presupune, în mod normal, două variabile distincte, x1 şi x2; or aici x1 = x2.

În realitate, în contraexemplul 1, prescurtat prin Ctrex1, $x \leq x$, pe post de *definiendum*, nu este un predicat de două argumente, ci un predicat de un singur argument.

Cea de a doua restricție este încălcată, atunci când în *definiens* apare o variabilă liberă care nu apare în *definiendum*.

$R(x) =_{df} x+ y = 0$ (Ctrex2)

Suppes a arătat că din pseudodefiniția de mai sus se poate deduce un neadevăr flagrant:

1) $R(x) \equiv x + y = 0$
2) $R(x) \supset x+ y = 0$ (elim ≡, 1)
3) $R(x) \subset x+ y = 0$ (elim ≡, 1)

Formula 3) poate fi parafrazată ca:

4) Dacă există y astfel că x+y = 0, atunci R(x).

Or, 2), de mai sus se citeşte ca:

5) Dacă R(x), atunci pentru orice y, x+y = 0.

Dar din 4) şi 5) rezultă, prin tranzitivitate:

6) Dacă există y astfel că x+y = 0, atunci, pentru orice y, x+y = 0, ceea ce este, evident, fals.

Universitatea Spiru Haret

Prezenţa în definitor a unei variabile libere suplimentare, poate conduce la definiţii incorecte, care nu conservă veridicitatea axiomelor sau ipotezelor asumate.

Includerea în definitor a unui atom predicativ diferit de atomii primitivi declaraţi în lista iniţială şi de cei introduşi prin definiţiile explicite anterioare duce la încălcarea restricţiei 3.

7. **Definirea operaţiilor sau a simbolurilor funcţionale**

În limbajul unei teorii ştiinţifice pot fi introduse prin operaţii logice de definire şi simboluri funcţionale sau semne pentru operaţii algebrice logice etc.

D7.1. *O echivalenţă D care introduce un nou simbol funcţional este o definiţie corectă într-o teorie T, dacă şi numai dacă, este de forma:*

$D = f(x1, x2,. .. ,xn) = y =_{df} S$

şi sunt satisfăcute restricţiile:

1. *x1, x2,. .. ,xn sunt variabile distincte;*

2. *În expresia definitoare S sau Dfn nu apar alte variabile libere, decât cele din definiendum, respectiv, x1, x2,. .. ,xn şi y;*

3. *În expresia definitoare S nu vor apare alte simboluri predicative, semne funcţionale sau constante individuale decât cele introduse ca primitive în alfabetul teoriei sau introduse prin definiţiile explicite anterioare;*

4. *Formula* $\exists !yS$ *este derivabilă din axiome şi din definiţiile anterior introduse în teorie.*

Câteva observaţii sunt, probabil, utile.

Obs. 1. Simbolul D stă pentru formula ce introduce definiţia, respectiv pentru echivalenţa dintre Dfd şi Dfn;

Obs. 2. *Definiendumul* este alcătuit din predicatul $f(x1, x2,. .. ,xn) = y$, respectiv dintr-un atom predicativ de forma t1 = t2;

Obs. 3. Simbolul funcţional *f* stă pentru numele operaţiei. De regulă se introduc operaţii unare sau binare;

Obs.4. Definitorul este redat prin formula moleculară S care conţine, de regulă, în afară de conective logice şi cuantificatori, atomi predicativi anterior introduşi, simboluri funcţionale anterior introduse şi eventual unele constante individuale anterior introduse;

Obs. 5. Restricţiile 1, 2, 3 sunt aceleaşi din definiţia 6.1 dată mai sus pentru simbolurile relaţionale;

Universitatea Spiru Haret

Obs. 6. Restricția 4 cere ca termenul de definit să fie o funcție, respectiv obiectul desemnat prin termenul *y*, dependent de semnificațiile lui *x1, x2,. .. ,xn,* să fie *unic* iar unicitatea lui să fie demonstrabilă din axiomele teoriei şi din definițiile anterior introduse.

Exemple:

Ex1 $x - y = z =_{df} \exists ! z(x = y + z)$

Ex2 $x:y = z =_{df} \exists ! z(x = y. z)$

Ex3 $x:y = z =_{df} \exists ! z \exists !r ((x = (y. z) +r) \wedge (0 \leq r< y))$

În primul exemplu introducem operația scăderii. Aceasta asociază perechii formate dintr-un număr x, numit *descăzut* şi un număr y numit *scăzător* un număr unic z numit *diferență,* astfel încât x = y + z. Operația se poate efectua numai dacă x > y.

Cel de al doilea exemplu introduce, în mod similar, operația împărțirii exacte, iar ultimul introduce operația împărțirii cu rest. În exemplele de mai sus nu au mai fost date axiomele aritmeticii propuse de A. Tarski şi reproduse cu unele modificări de P. Suppes (vezi *Introduction to Logic,* p 129).

La modul general operațiile binare se definesc sub forma:

$$x \circ y = z =_{df} \exists ! zR(x, y, z)$$

unde cel de al treilea argument al relației R, variabila z, descrie rezultatul operației şi trebuie să fie unic. Demonstrația de unicitate trebuie să derive din axiome şi din definițiile anterior introduse. Dacă nu ar fi impusă condiția unicității rezultatului, atunci s-ar putea introduce pseudooperații sau definiții operațional incorecte ce nu conservă veridicitatea axiomelor. Iată un exemplu de pseudooperație ce distorsionează consecințele degajate din premise.

Ex4 $x * y = z =_{df} x < z \wedge y < z$ 1)

$1*2 = 3$ 2)

deoarece:

$1 < 3$ şi $2 < 3$. 3)

Dar, potrivit operației definite în Ex4, vom obține, de asemenea:

$1 * 2 = 4$, 4)

căci:

$1 < 4$ şi $2 < 4$ 5)

Dar, din 2) şi 4), rezultă un neadevăr strident:

$3 = 4$. 6)

Universitatea Spiru Haret

8. **Definirea constantelor individuale**

În logica predicatelor constantele pot fi privite ca nişte simboluri funcţionale având 0 argumente, respectiv ca o funcţie ce selectează un obiect dintr-un domeniu.

D8.1 *O echivalenţă D ce introduce într-o teorie o nouă constantă individuală este o definiţie corectă, dacă şi numai dacă, este de forma:*

$c = x =_{df} S$

şi sunt satisfăcute restricţiile:

1. *Singura variabilă liberă în S este x;*

2. *În expresia definitoare S nu vor apare alte simboluri predicative, semne funcţionale sau constante individuale decât cele introduse ca primitive în alfabetul teoriei sau introduse prin definiţiile explicite anterioare;*

3. *Formula* $\exists !xS$ *este derivabilă din axiome şi din definiţiile anterior introduse în teorie.*

Exemple:

Ex1 $0 = y =_{df} \forall x\ (x + y = x)$

Ex2. $1 = y =_{df} \forall x\ (x.\ y = x)$

Numărul 0 este definit în Ex1 ca numărul natural y care adunat cu *orice* alt număr natural x îl lasă pe acesta la valoarea sa iniţială. În mod analog, este introdus în Ex2 numărul natural 1. 1 este numărul natural care înmulţit cu *orice* alt număr natural îl lasă neschimbat.

Am introdus în capitolele 6-8 trei tipuri de structuri definiţionale (vezi D6.1, D7.1, D8.1) care permit introducerea într-o teorie ştiinţifică a proprietăţilor şi relaţiilor, a unor operaţii noi sau a unor constante noi.

Restricţiile introduse mai sus previn, între altele, unele erori în construcţia teoretică, cum ar fi introducerea ilicită a unor presupoziţii în sistemul teoretic sau introducerea unor operaţii neunivoce. Ele garantează, între altele, cerinţa eliminabilităţii şi noncreativităţii definiţiilor utilizate într-un sistem teoretic sau într-o bază de cunoştinţe.

9. **Definiţiile condiţionale**

Definiţiile condiţionale sunt o formă de a conecta teoria definiţiilor cu contextul discursiv sau pragmatic al utilizării lor. În cazul lor, relaţia definiţională este precedată de o clauză ce descrie ipoteza sau condiţiile preliminare în care echivalenţa definiţională intră în acţiune.

Propunem mai jos regulile definiţiilor condiţionale pentru relaţii.

Universitatea Spiru Haret

D9.1 *O implicaţie C, ce introduce un nou simbol predicativ P, este o definiţie condiţională într-o teorie, dacă şi numai dacă, C este de forma:*

$$H \supset [\, P(x1, x2, .., xn) \equiv S \,]$$

şi sunt satisfăcute restricţiile:

1. *Variabilele x1, x2, ...,xn trebuie să fie distincte una de alta;*

2. *În expresia definitoare S, i.e. în Dfn, nu pot apare alte variabile libere decât cele care apar în definiendum, i. e. variabilele x1, x2, ..., xn;*

3. *În expresia definitoare S şi în ipoteza H nu vor apare alte simboluri predicative, semne funcţionale sau constante individuale decât cele introduse ca primitive în alfabetul teoriei sau introduse prin definiţiile explicite anterioare;*

4. *Formula* $H \supset [\, P(x1, x2, .., xn) \equiv S \,]$ *este derivabilă din axiomele teoriei şi din definiţiile şi faptele anterior introduse.*

În mod analog, pot fi introduse definiţii condiţionale pentru operaţii.

D9.2. *O implicaţie C ce introduce un nou simbol funcţional f este o definiţie condiţională într-o teorie, dacă şi numai dacă, C este de forma:*

$$H \supset [\, f(x1, x2, .., xn) = y \equiv S \,]$$

şi sunt satisfăcute restricţiile:

1. *Variabila y nu apare liberă în H;*

2. *x1, x2,. .. ,xn sunt variabile distincte;*

3. *În expresia definitoare S sau Dfn nu apar alte variabile libere, decât cele din definiendum, respectiv, x1, x2,. .. ,xn şi y;*

4. *În expresia definitoare S nu vor apare alte simboluri predicative, semne funcţionale sau constante individuale decât cele introduse ca primitive în alfabetul teoriei sau introduse prin definiţiile explicite anterioare;*

5. *Formula* $H \supset \exists !y S$ *este derivabilă din axiome şi din definiţiile anterior introduse în teorie.*

Exemplu:

Ex.1 Dacă $y \neq 0$, atunci $x/y = z$, dacă şi numai dacă, $x = y.\ z$.

Simbolic: $C = y \neq 0 \supset [x/y = z \equiv x = y.\ z.]$

unde: $y \neq 0$ este condiţia, $x/y = z$ este definiendumul sau operaţia de definit, ce are forma $t1 = t2$, ‘$\equiv$’ este simbolul echivalenţei definiţionale, iar $x = y.\ z$ este expresia definitoare, s.

Explicaţia împărţirii se sprijină pe ideea de relaţie funcţională şi pe cunoaşterea ideii de înmulţire.

Universitatea Spiru Haret

10. **Structura definitorului şi realizabilitatea predicatului definit**

În capitolele 5-7 am diferenţiat trei tipuri de simboluri ce pot fi introduse prin definiţie într-o teorie ştiinţifică. Din punct de vedere formal o definiţie este o formulă bine formată în limbajul teoriei având forma unei echivalenţe.

Definiţiile într-un limbaj pot fi privite ca reguli de instituire sau ca reguli de descoperire a înţelesului termenilor neprimitivi.

Termenii primitivi pot fi doar ilustraţi sau definiţi implicit prin postularea axiomelor.

În stânga semnului echivalenţei este situat termenul de definit redat printr-un predicat inedit, iar în dreapta acestuia, este plasată expresia definitoare, marcată mai sus prin simbolul S. Restricţiile introduse mai sus ne-au permis să conchidem că în definitor apar, în afară de semne logice şi de cuantificatori, atomi primitivi, simboluri funcţionale, constante funcţionale etc.

Problema pe care ne-o punem în acest capitol este cum putem prelucra structura echivalenţelor definiţionale sau a definiţiilor condiţionale astfel încât să putem determina condiţiile veridicităţii simbolului predicativ nou introdus în funcţie de veridicitatea atomilor primitivi sau a conceptelor anterior definite.

Să considerăm, pentru început, sistemul axiomatic Chisholm Sosa, CSS. Acesta presupune axiomatica logicii propoziţiilor, la care se adaugă, ca functor diadic primitiv, ‘pPq’, care se citeşte: „p este preferabil lui q”. Putem conveni să interpretăm ‘pPq’ ca pe o relaţie binară P(p, q) = „Starea p este preferabilă stării q”.

Axiomele sistemului sunt:
AP1. $pPq \supset \neg (qPp)$
AP2. $(pPq \ \& \ qPr) \supset pPr$
AP3. $pPq \supset (pPr \vee rPq)$
AP4 $(Ip \ \& \ Iq) \supset pSq$
AP5 $(Gp \vee B\neg p) \supset pP\neg p$

Definiţiile introduse în sistem sunt:
D1 $pSq =_{df} \neg(pPq) \ \& \ \neg(qPp)$
D2. $Ip =_{df} \neg(pP\neg p) \& \ \neg(\neg pPp)$
D3. $Np =_{df} \exists q(Iq \ \& \ pSq)$
D4. $Gp =_{df} \exists q(Iq \ \& \ pPq)$
D5. $Bp =_{df} \exists q(Iq \ \& \ qPp)$

Universitatea Spiru Haret

Este uşor de observat că primele trei axiome nu conţin decât conective logice şi atomul primitiv P, respectiv pPq sau P (p, q), care descrie relaţia de preferinţă strictă sau tare. Primele două enunţă faptul că preferinţa strictă este asimetrică şi tranzitivă. Cea de a treia afirmă, că dacă două stări p şi q au fost ordonate preferenţial, i.e. avem dat pPq, atunci o a treia stare r este mai puţin preferabilă decât preferata dintre primele două, respectiv decât p, sau este preferabilă celei respinse în primul caz.

Axiomele P4 şi P5 descriu raporturi între conceptele derivate.

Definiţiile D1-D5, propuse mai sus, introduc, pe rând, relaţiile de echipreferabilitate, indiferenţă axiologică, neutralitate axiologică, şi noţiunile de bine şi rău. Astfel 'pSq' se citeşte: „p este echipreferabil cu q". În mod analog se vor citi şi celelalte concepte derivate.

Ceea ce am numit mai sus echipreferabilitate sau pSq, este mai curând o nonpreferabilitate bilaterală sau o neangajare preferenţială. Indiferenţa axiologică poate fi văzută ca o degenerare a echipreferabilităţii sau neangajării preferenţiale, când neangajarea are loc între o stare şi negaţia ei. La rândul ei, neutralitatea este definită prin referire la indiferenţă axiologică şi la echireferenţialitate. Binele este definit ca ceva preferabil stării de indiferenţă axiologică, iar răul este definit ca ceva inferior sau mai putin preferabil stării de indiferenţă axiologică.

Nu ne vom ocupa aici de demonstrarea unor teoreme de axiologie formală. Cititorul poate consulta lucrarea noastră *Teoria acţiunii şi logica formală*, (Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1984, p. 587-598) unde sunt demonstrate peste 20 de teoreme şi este prezentată o metodă semantică de decizie. Atenţia ne va fi reţinută aici de structura expresiilor definitoare şi de relevanţa acestora pentru realizarea predicatului introdus printr-un definiendum. Ne întrebăm, totodată, ce rol joacă definiţiile în sistemele axiomatice?

Ce forme poate avea definitorul unei definiţii?

Acesta poate fi:

1. o formulă bine formată în limbajul logicii predicatelor ;
2. o formulă de acelaşi tip ce conţine cuantificatori;
3. o formulă în formă normală prenexă;
4. o formulă în formă normală Skolem sau o „matrice";
5. o formă normală conjunctiv sau un set de clauze elementare;
6. un set de clauze Horn sau un set de instrucţiuni Prolog.

Pentru a evalua realizabilitatea predicatului nou introdus sau termenul de definit formula din definitor poate fi adusă la formă clauzală, decisă rezolutiv sau prin metoda Davis -Putnam sau cercetată cu

Universitatea Spiru Haret

ajutorul unor arbori de decizie sau redusă la mulţimi Hintikka. Este util să observăm că o matrice este o funcţie logic propoziţională de atomii predicativi ce intervin în structura definitorului.

Determinarea cazurilor de realizare a predicatului din termenul de definit se face pe o cale reductivă prin aplicarea regulilor arborilor de decizie sau prin aplicarea regulilor metodei Davis-Putnam sau prin construirea mulţimilor Hintikka.

În sistemele axiomatice definiţiile joacă trei funcţii majore:

1. Din perspectiva constructorului de sisteme axiomatice, care porneşte de la termeni primitivi şi de la atomi, ale căror raporturi mutuale sunt determinate prin axiome, definiţiile apar ca *reguli de prescurtare* a agregărilor semantice relevante;

2. Din perspectiva utilizatorului unui sistem axiomatic, care caută temei pentru un concept derivat sau pentru o formulă în care intervine un predicat complex, definiţiile sunt *instrumente de analiză şi reducere a conceptelor complexe la cele elementare*. La fel, o persoană ce caută un text demonstrativ pentru un enunţ sau pentru o formulă, va adopta, la început o perspectivă analitică, reductivă şi numai ulterior, va adopta o perspectivă sintetic-constructivă.

Descriind relaţii de echivalenţă semantică, definiţiile sunt, totodată, *instrumente de calcul sintactic, care permit substituirea într-o formulă F, a termenului de definit prin definitor sau invers. Definiţiile întemeiază noi reguli de inferenţă.*

Este important să înţelegem că definiţiile întemeiază, deopotrivă, analiza şi sinteza conceptelor într-o construcţie teoretică. Dar, aşa cum vom vedea mai departe, definiţiile joacă un rol esenţial în standardizarea limbajelor ştiinţifice sau a celor profesionale şi chiar şi a celor naturale, în apropierea idiolectelor vorbitorilor unei limbi. Dar despre aceste aspecte vom vorbi într-un capitol ulterior consacrat teoriei semiotice a definiţiilor.

11. **Criteriile eliminabilităţii şi non-creativităţii**

Logica modernă studiază definiţiile în strânsă legătură cu limbajul teoriilor ştiinţifice, în special în legătură limbajul teoriilor matematice şi fizice. Logicianul polonez S. Lesniewski (1886--1939) a formulat, între altele, criteriile eliminabilităţii şi non-creativităţii. Acestea au fost studiate, de asemenea, de logicianul american [95, p. 151-173] Patrick Suppes în deceniul al şaselea. Reproducem, mai jos, cu unele modificări, cerinţele eliminabilităţii şi non-creativităţii în formularea lui P. Suppes.

Universitatea Spiru Haret

11.1. *Criteriu de eliminabilitate*

Definiţie *O formulă S ce introduce un simbol nou al unei teorii satisface criteriu eliminabilităţii, dacă şi numai dacă, pentru orice formulă S1 în care apare noul simbol există o formulă S2 în care acesta nu apare astfel încât* $S \supset (S1 \equiv S2)$ *este o formulă derivabilă din axiomele teoriei şi din definiţiile anterior introduse.*

Aplicarea acestor criterii presupune precizarea vocabularului primitiv al teoriei în cauză. Convenim să-l notăm, ca mai sus, prin At = [A1,.. ., An]. Admitem, de asemenea, că axiomele teoriei au fost enumerate în lista L = [Ax1,. .. ,Axk] şi că anterior au fost întroduse definiţiile D = [D1,. .., Dm]. Atunci, definiţia descrisă prin enunţul definiţional S =Dm+1 va fi *eliminabilă,* dacă pentru orice formulă S1 în care apare termenul de definit(Dfd), introdus prin enunţul definiţional S, există o formulă echivalentă cu ea, S2, astfel că:

1) $[L, D] \Rightarrow (S \supset (S1 \equiv S2))$

Formula 1) de mai sus descrie faptul că din axiome şi din definiţiile anterior introduse se deduce formula după care enunţul definiţional S implică existenţa pentru orice formulă S1 în care apare termenul nou introdus, Dfd, existenţa unei formule S2, echivalentă cu S1, ce nu conţine termenul nou introdus.

Prin schema excluderii $\supset$ dr din calculul secvenţial, din 1) rezultă:

2) $[L, D, S] \Rightarrow (S1 \equiv S2)$

ceea ce exprimă faptul că din axiomele L, din definiţiile anterioare D1,D2,. .., Dm şi ultima definiţie Dm+1 = S se deduce că orice formulă S1 ce conţine definiendum-ul ultimei definiţii este echivalentă cu o formulă S2, ce nu conţine acest definiendum.

Cum, acest raţionament poate fi aplicat la orice definiţie ce introduce un termen derivat, rezultă că putem exclude sau elimina toţi termenii derivaţi dintr-o teorie şi să rescriem teoria exclusiv în termenii vocabularului atomar At = [A1, A2,. .., An].

Consecventul expresiei 1) de mai sus spune că, fiind dat un enunţ definiţional S de forma $Dfd \equiv Dfn$ şi o formulă S1 în care apare Dfd ca un termen nou introdus, putem înlocui pe S1 printr-o formulă echivalentă cu ea S2 în care nu apare Dfd şi în locul lui apare Dfn. Dar aceasta nu este decât bine cunoscuta regulă a substituirii echivalentelor.

$$\frac{Dfd \equiv Dfn}{S1[\,Dfd\,] \equiv S2[\,Dfn\,]} \quad sau \quad \frac{Dfd \equiv Dfn,\ S1[\,Dfd\,]}{S2[\,Dfn\,]}$$

Universitatea Spiru Haret

Principiul eliminabilităţii se aplică, practic, sub o formă reductivă sau descendentă şi în programarea logică, atunci când reducem capul unei instrucţiuni Prolog la coada acesteia. În toate aceste cazuri raţionăm prin trecerea de la predicate derivate la predicatele pe care se întemeiază acestea, până ce ajungem la atomi instanţiaţi, ce descriu baza factuală a programului.

Păstrând convenţiile introduse mai sus şi introducând un predicat de două argumente pentru relaţia de derivare logică, deriv (A, B), care se citeşte „din A se deduce B" putem transpune principiul elimina-bilităţii ca o instrucţiune Prolog.

elim (S, T): - axiome(T, L), def_ant (S, D), deriv ([L, D], S ⊃ (S1 ≡ S2)).

11.2. *Criteriu de non-creativitate*

Definiţie. *O formulă S ce introduce un simbol nou Dfd al unei teorii satisface criteriul non-creativităţii, dacă şi numai dacă, nu există vreo formulă T în care nu intervine noul simbol astfel încât S ⊃ T să fie derivabilă din axiome şi din definiţiile precedente, în timp ce T singur să nu fie derivabil din acestea.*

Noţiunea de non-creativitate poate fi definită în termenii teoriei consecinţelor logice sau în termenii calculului secvenţial. Menţinând convenţiile introduse anterior, putem defini non-creativitatea ca un predicat binar, în care primul argument stă pentru enunţul definiţional şi cel de al doilea stă pentru teoria în cauză, simbolul „⇒" stă pentru relaţia de consecinţă logică.

$$non\text{-}creativ(S, T) =_{df} \neg \exists F(([L, D] \Rightarrow S \supset F) \wedge \neg ([L, D] \Rightarrow F))$$

Definiţia S este *non-creativă* în teoria T, dacă nu există nici o formulă F scrisă în alfabetul primitiv At, astfel încât S ⊃F să fie derivabilă din axiome şi din definiţiile anterioare şi F singură să nu fie derivabilă din acestea. În virtutea legilor logicii predicatelor, formula de mai sus poate fi rescrisă ca:

$$non\text{-}creativ(S,T) =_{df} \forall F(([L,D] \Rightarrow (S \supset F)) \supset ([L,D] \Rightarrow F))$$

Reamintim că, potrivit convenţiilor de notare introduse mai sus, L desemnează lista axiomelor teoriei, iar D lista definiţiilor precedente.

Dacă convenim ca în loc de '⇒' să scriem 'deriv(A, B)', şi să o redăm ca o pseudo-instrucţiune Prolog, formula de mai sus devine:

non_creativ(S,T) :- deriv([L, D], S ⊃F) ⊃ deriv([L, D], F) .

Universitatea Spiru Haret

Cerinţa non-creativităţii pretinde ca prin introducerea unei definiţii în limbajul unei teorii axiomatizate să nu se extindă ilicit vocabularul primitiv al acesteia şi să nu crească ilicit puterea de derivare a teoriei prin introducerea frauduloasă a unor concepte noi nemărturisite. Cu alte cuvinte, trebuie să evităm definiţiile în definitorul cărora apar termeni noi ce nu sunt incluşi în lista termenilor primitivi ai limbajului teoriei şi nici în lista termenilor anterior introduşi. Mai mult, enunţul definiţional S, trebuie să nu faciliteze demonstrarea vreunei teoreme scrisă în vocabularul primitiv At, care să nu poată fi obţinută fără intervenţia definiţiei S. Într-un sistem axiomatic, definiţiile sunt introduceri de nume noi pentru diferite combinaţii de atomi primitivi, sunt construcţii de concepte derivate, dar nu îmbogăţiri a zestrei de atomi primitivi. Lista acestora rămâne încremenită.

12. **Teoria semiotică a definiţiilor**

În 1968 am prezentat, la Viena, la cel de al 14-lea Congres Internaţional de Filosofie, o comunicare intitulată *Towards a Semiotical Theory of Definition*. Considerăm, şi după mai bine de trei decenii, valabile intuiţiile şi linia generală a proiectului iniţiat atunci. Credem, totodată, necesară regândirea teoriei schiţată atunci din perspectiva semanticii logicii predicatelor de ordinul întâi şi a teoriei demonstraţiei automatizate. Definiţiile joacă un rol major în programarea logică şi în organizarea bazelor de cunoştinţe. Totodată, definiţiile sunt necesare pentru a dezambiguiza termenii pe care îi utilizăm în discursul sau conversaţia noastră, ca şi pentru a atinge un grad însemnat de uniformizare şi standardizare a limbajului nostru.

Comment [CP1]:

Comment [CP2]:

Logicienii se interesează astăzi de rolul definiţiilor în sistemele axiomatice şi în sistemele formale dotate cu semantici adecvate, capabile să descrie limbajele unor discipline ştiinţifice sau ale unor capitole ale acestora. Logica nu este o maşinărie formală care merge în gol. Ea dă seama de actele inferenţiale din teoriile ştiinţifice, din bazele de cunoştinţe. Pe baza cunoaşterii logicii pot fi concepute programe de demonstrare automatizată a unor teoreme sau de verificare a consistenţei unor seturi de ipoteze.

Teoria definiţiilor este astăzi de un interes major pentru elaborarea unei bune teorii a argumentării sau pentru combaterea sofismelor şi a paralogismelor.

Universitatea Spiru Haret

Sunt două atitudini pe care le putem avea în cercetarea definiţiilor încorporate într-un limbaj sau într-o teorie ştiinţifică. Putem considera limbajul ca un *corp gata constituit* şi să fim interesaţi doar de *identificarea convenţiilor semantice deja instituite*. Aceasta este atitudinea lingvistului sau editorului unui dicţionar explicativ al limbii naţionale sau chiar al unui dicţionar enciclopedic, care *înregistrează convenţiile lingvistice existente* în uzul limbii sau sensurile acreditate unor termeni ştiinţifici într-o disciplină dată, de exemplu „brâu" în arhitectură sau „stalactită" în geologie. Sau, dimpotrivă, putem adopta o *atitudine mai liberală, de revizuire şi regândire a convenţiilor* sau *accepţiilor pe care le au termenii în limbajul unei teorii ştiinţifice* sau în limbajul unei profesiuni etc. De această dată, persoana care propune definiţii nu-şi reduce rolul la consemnarea accepţiilor şi semnificaţiilor atribuite unor termeni sau expresii în limbajul unei teorii, ci, asemenea unui organ legiuitor într-un stat, care propune legi noi, autorul definiţiei *introduce termeni noi sau modifică mai mult sau mai puţin sensurile termenilor anterior introduşi*. Autorul unei definiţii stipulative nu este un reporter sau observator al convenţiilor lingvistice, ci un *iniţiator* de reguli semantice explicite pentru utilizatorii unui limbaj ştiinţific sau tehnic, în scopul rezolvării unor clase de probleme.

Prima atitudine menţionată mai sus conduce la teoria definiţiilor lexicale; cea de a doua conduce la teoria definiţiilor stipulative.

În opinia noastră definiţiile au un rol decisiv în apropierea şi uniformizarea sensurilor atribuite termenilor în idiolectele sau limbajele personale ale indivizilor umani, în instituirea limbajului social. Limbile naturale dispun de mecanisme subtile de apropiere şi ajustare a idiolectelor în procesul comunicării. (A se cerceta în acest sens funcţia semantico-pragmatică a particulei „adică").

În cele ce urmează presupunem definit un limbaj formal L ce, la rândul lui, presupune limbajul formal al logicii predicatelor de ordinul întâi, şi deci, un alfabet A care include simboluri pentru constante individuale, Aci, un subalfabet pentru variabile individuale, A_{vi}, un subalfabet pentru simboluri funcţionale, A_F, un subalfabet A_P pentru simboluri predicative, simboluri pentru conective logice şi cuantificatori, precum şi semne de grupare. Presupunem date regulile de formare a termenilor şi definiţiile formulelor atomare şi ale formulelor bine formate.

Propunem o structură:

Universitatea Spiru Haret

SD = [h1, h2, Sit, L, At, Lh1, Lh2, Dfd, Dfn, Dom,sem(F), cun(H, F)]
unde:

1. *h1, h2* sunt agenţii participanţi la procesul definiţional, *h1* fiind emitentul definiţiei iar *h2* adresantul sau receptorul definiţiei;

2. *Sit* este o situaţie acţională sau discursiv-comunicaţională în care se dă definiţia;

3. *L* este limbajul logicii predicatelor de ordinul întâi;

4. *At = [A1, A2, ...An]* este o listă de atomi primitivi ce apar într-o teorie ştiinţifică sau într-o bază de cunoştinţe, descrisă în limbajul *L*;

5. Lh1 şi *Lh2* sunt idiolectele sau sublimbajele agenţilor *h1* şi *h2* şi satisfac condiţiile:

a) $(Lh1 \cup Lh2) \subset L$;
b) $Lh1 \cap Lh2 \neq \phi$;
c) $At \subset (Lh1 \cap Lh2)$;
d) *Dfd* $\in$ *Lh1 şi este un atom predicativ derivat;*
e) *Dfd* $\notin$ *Lh2;*
f) *Dfn* $\in$ *(Lh1* $\cap$ *Lh2).*

Dfd este definiendum-*ul definiţiei considerate*, *iar* Dfn *este* definiens-*ul iar* Dfd $=_{df}$ Dfn *este formula F ce descrie enunţul definiţional;*

6. *Dfd = P(x1, x2,. .. ,xn)*

7. *Dfn = M(A1, ..., An, D1, D2,.. . Dm) ;*

A1, ..., An sunt atomi primitivi, cunoscuţi de h1 şi h2, iar *D1, D2,.. . Dm* sunt termeni anterior introduşi prin definiţie şi deci cunoscuţi de h2. Definitorul definiţiei curente este $D_{m+1,}$ i.e.,

Dfd = D_{m+1} = *P(x1, x2,. .. ,xn)*

8. *Dom* este un domeniu nevid în care sunt interpretate simbolurile predicative şi simbolurile funcţionale, constantele individuale, etc.

9. Prin funcţia de interpretare s*em* i se asociază fiecărui atom din At o relaţie de aceiaşi aritate definită pe D cu valori în B = [0.1] astfel că:

a) *sem(Dfd) = sem(Dfn)*
b) *cun(h1, Dfn)* $\wedge$ *cun(h1,Dfd)*
c) *cun(h2, Dfn)*

Predicatul *cun(x, y)* se citeşte: „x cunoaşte y". Persoana h1 care defineşte un termen *Dfd* cunoaşte, deopotrivă, semnificaţia acestuia şi semnificaţia expresiei definitoare *Dfn.* Destinatarul definiţiei, h2 cunoaşte dinainte semnificaţia atomilor din Dfn. Ambii interlocutori cunosc şi fac uz de conective logice şi cuantificatori. Pe baza condiţiilor a) şi c), destinatarul sau adresantul definiţiei accede, prin regula substituirii echivalentelor, la semnificaţia termenului nou introdus Dfd, care potrivit lui 6 a) este un predicat de forma *P(x1, x2,. .. ,xn)*

Universitatea Spiru Haret

Observaţii:

Obs. 1. Simbolurile h1, h2, Sit, Lh1, Lh2 descriu *dimensiunea pragmatică* a unei definiţii. Agentul h1 defineşte pentru agentul h2, în *situaţia Sit*, predicatul P(x1, x2,. .. ,xn), pe post de Dfd, prin formula bine formată M(A1, …, An, D1, D2,.. . Dm), aflată pe post de Dfn;

Obs. 2. În definitorul definiţiei Dn+1 vor apare atomi primitivi din At şi predicate derivate, anterior introduse prin definiţiile D = [D1, D2,. .., Dm]. Definitorul Dfn are forma M (A1, …, An, D1, D2,.. . Dm), respectiv va fi o „matrice" a unei forme normale Skolem;

Obs. 3. Formula definiţională va respecta, între altele, restricţiile stipulate în capitolele 5-7, privitoare la caracterul distinct al variabilelor ce apar în termenul de definit, privitoare la variabilele libere din definitor, la natura simbolurilor predicative care apar în Dfn etc.;

Obs. 4. Idiolectele agenţilor sunt sublimbaje ale limbajului teoriei sau ale limbajului de comunicare, instruire, a limbajului bazei de cunoştinţe etc. Acestea vor conţine, între altele, atomii primitivi ce intervin în definiţii. Emitentul definiţiei trebuie să cunoască semnificaţia termenului de definit şi a expresiei definitoare (vezi 9, b) şi 6, f)), iar receptorul definiţiei nu cunoaşte semnificaţia lui Dfd, dar trebuie să cunoască semnificaţia termenilor primitivi, redaţi în construcţia noastră prin atomii At şi respectiv semnificaţia conceptelor ce intervin în definitor. Ambii interlocutori trebuie să cunoască predicatele primitive (vezi 6, c)) şi definiţiile operaţiilor logice ce intervin în expresia definitoare.

Obs. 5. Fiind sublimbaje ale lui L, Lh1 şi Lh2 vor fi guvernate de aceleaşi reguli sintactice şi vor fi interpretate în acelaşi fel;

Obs. 6. Termenul de definit şi expresia definitoare vor avea aceiaşi semnificaţie, respectiv vor desemna acelaşi obiect, clasă de obiecte sau aceiaşi mulţimi de n-tuple ce descriu relaţii (vezi 9, a) şi 8) .Orice model al expresiei definitoare va fi în mod necesar şi un model al termenului de definit şi invers;

Obs. 7. Atât termenul de definit, cât şi expresia definitoare vor fi redate prin predicate şi conectori logici, respectiv prin formule predicative deschise care pot deveni adevărate prin asignări de valori acordate variabilelor propoziţionale sau prin cuantificare.

Astfel conceptele ne apar ca judecăţi potenţiale ce se pot activa prin interpretare;

Obs. 8. Operaţia de definire presupune un demers analitico-sintetic bilateral. De la atomii primitivi către obţinerea unor concepte complexe şi, invers, de la unele concepte complexe către componentele primitive

Universitatea Spiru Haret

ale acestora. Primul demers se realizează prin intermediul operaţiilor de *introducere* a unor conective sau cuantificatori logici şi el corespunde *sintezei* sau creaţiei de concepte derivate. Cel de al doilea demers, de la complex la elementar se realizează prin operaţiile de *eliminare* a unor conective sau cuantificatori logici şi el corespunde în plan epistemic *analizei* unor concepte compuse, respectiv *reducerii* unor formule moleculare la atomi primitivi, cărora le sunt asociate experienţe subiective, acte de percepere, reprezentări, etc.;

Obs. 9. Orice definiţie este şi o interacţiune cognitiv-pragmatică şi un act de comunicare între un agent ce introduce definiţia la un moment dat şi un alt agent ce recepţionează sau interpretează definiţia, chiar dacă acesta nu o recepţionează imediat. Definiţiile sunt totodată acte de legiferare cognitiv-lingvistică, reguli de interpretare şi decodificare a termenilor unui limbaj. Definiţiile stipulative date într-un text de lege juridică obligă pe judecător sau interpretul legii, ca şi pe ceilalţi participanţi la activitatea judiciară, să interpreteze un concept juridic în conformitate cu stipulaţiunile definitorului acestuia şi nu după libera sa inspiraţie.

Obs. 10. Emitentul definiţiei cunoaşte regulile semantice ale termenului de definit şi ale expresiei definitoare, iar receptorul definiţiei cunoaşte regulile semantice ale expresiei definitoare, i.e. ale Dfn. Ambii interlocutori sunt apţi de operaţii de analiză şi sinteză logică, cunosc definiţiile şi proprietăţile conectivelor logice şi ale cuantificatorilor.

Obs. 11. Situaţiei acţionale Sit i se asociază, de regulă, un model v = (D, Ic, Iv) care, la limită, poate fi descris ca o listă de atomi primitivi instanţiaţi adevăraţi simultan despre situaţia Sit.

Să presupunem că un profesor de ştiinţe naturale, pe post de h1, defineşte pentru elevii unei clase de liceu pe post de h2 semnificaţia termenului ‘stalactită’.

Stalactită – depunere calcaroasă de formă conică, fixată prin baza sa de tavanul unor goluri subterane (peşteri, galerii) şi formată prin depunerea carbonatului de calciu din picăturile de apă (D.E.R, vol. 4, p. 482.)

stalactită (x) ≡ depunere_calcaroasă(x) ∧ are(x, f_conică) ∧ gol_subteran (y) ∧ are (y,tavan) ∧ fixată (x, bază, tavan) ∧
formată (x, carbonat_de_calciu_din_apa).

Analiza definiţiei de mai sus pe baza restricţiilor stipulate de structura SD este uşor de făcut.

Este uşor de observat că definiţiile joacă un rol important în activităţile instructiv-didactice, în deosebi în procesul explicării unor termeni. În acest caz, profesorul joacă rolul agentului emitent de

Universitatea Spiru Haret

definiţie, iar elevii joacă rolul agenţilor ce recepţionează definiţia. Ei vor reconstitui înţelesul termenului de definit cu ajutorul expresiei definitoare. Pentru a înţelege ce-i o stalactită ei vor trebui să înţeleagă mai întâi ce-i o depunere calcaroasă, ce este o formă conică, ce este un gol subteran etc. În plus, trebuie să ţinem seama de faptul că rostirea unor cuvinte în faţa unor agenţi evocă experienţe cognitive anterioare ale acestora şi că, de regulă, actele cognitive sunt legate de trăirile şi comportamentele subiecţilor cunoscători.

Două scurte remarci ar putea fi utile.

Mai întâi, predicatul 'depunere_calcaroasă (x)' ar putea fi caracterizat în logica aristotelică drept „gen proxim". Aici joacă rolul de descripţie centrală.

Definiţia de mai sus poate fi văzută şi ca o *definiţie genetico-procedurală.* Autorul definiţiei ne spune nu numai ce este o stalactită, dar şi *cum ia naştere* aceasta, în timp, din picăturile de apă încărcate de carbonat de calciu.

Enunţarea unei definiţii se face fie cu intenţia de a *reaminti* o convenţie semantică anterior instituită şi admisă într-un grup social, fie cu intenţia de *a institui*, în premieră o astfel de convenţie de limbaj. Definiţiile lexicale reamintesc uzanţe şi convenţii deja instituite. Definiţiile stipulative *modifică* sau amendează convenţii preexistente sau *propun convenţii noi*. În acest ultim caz, definiţia stipulativă este dată de un subiect cunoscător cu intenţia de a rezolva o problemă.

Dar să revenim la problemele sintactice, semantice şi pragmatice al structurii definiţionale propuse mai sus.

Problema centrală a teoriei definiţiei este dependenţa înţelegerii semnificaţiei termenului de definit de semnificaţia şi valoarea de adevăr a atomilor care apar în definitor. Altfel spus, realizabilitatea termenului de definit este funcţie logic-propoziţională de realizabilitatea expresiei definitoare, respectiv de mulţimea modelelor pe care le are sau care pot fi construite pentru matricea ce joacă rolul de definitor.

Teorema A. Fie F = P (x1, x2,. .., xn) ≡ M o definiţie explicită într-o teorie ştiinţifică sau într-o bază de cunoştinţe, unde M este expresia definitoare sau Dfn. Atunci predicatul nou introdus P (x1, x2,. . ., xn) este realizabil, dacă şi numai dacă, din expresia definitoare M putem construi o mulţime Hintikka.

Cu alte cuvinte, un termen nou introdus printr-un definitor devine adevărat într-o interpretare v, dacă şi numai dacă, definitorul poate fi redus la o mulţime Hintikka.

Universitatea Spiru Haret

Demonstraţie Presupunem adevărate în interpretarea v axiomele sistemului sau baza de cunoştinţe şi definiţiile anterior introduse. Enunţul definiţional F va fi adevărat, dacă şi numai dacă, P (x1, x2,. .., xn) ≡ M. Întrucât M este definitorul definiţiei F, M este o formulă bine formată în limbajul logicii predicatelor de ordinul întâi, având şi ea precum predicatul de definit, n variabile libere (vezi restricţia 2 din cap. 6, definiţia D6.1). Potrivit restricţiei 3 din aceiaşi definiţie în structura lui M nu pot interveni decât atomi primitivi sau predicate derivate introduse anterior prin definiţii, simboluri funcţionale şi desigur, conective logice şi cuantificatori.

Reamintim definiţia mulţimii Hintikka. Fie U o mulţime de formule şi At = [A1, A2,. .. Am] mulţimea atomilor predicativi care apar în U. Vom numi mulţime Hintikka o mulţime de formule care satisface condiţiile:

1. Pentru orice atom Ai din At, cu $1 \leq i \leq m$, Ai sau $\neg$ Ai aparţine lui U;

2. Dacă A este o α - formulă ce apare în U(ca A1 $\wedge$ A2), atunci A1 $\in$ U şi A2 $\in$ U;

3. Dacă B este o β - formulă ce apare în U(ca(B1 $\vee$ B2), atunci B1 $\in$U sau B2 $\in$U;

4. Dacă A este o γ - formulă(ca $\forall$ xG(x)), atunci G(a) $\in$U pentru toate constantele a din U;

5. Dacă A este o δ- formulă (ca $\exists$ xG(x)), atunci G(a) pentru cel puţin o constantă a din U.

Considerăm cazul cel mai general, când M este o formulă bine formată în limbajul logici predicatelor. Printr-o inducţie pe structura formulei M arătăm că aceasta poate fi redusă la o mulţime Hintikka.

Să admitem că definiţia F este prima definiţie introdusă în sistem sau în baza de cunoştinţe., i.e. F= D1. Atunci M nu va conţine decât atomi primitivi. Totodată, M va fi singura formulă inclusă în mulţimea iniţială U.

Dacă definitorul M este o formulă în formă normală prenexă, atunci, M poate fi adusă la o formă normală Skolem, prin utilizarea regulilor eliminării cuantificatorului existenţial (vezi regula 5 de mai sus); Cum acestea conduc în mod necesar la instanţieri, aplicarea lor creează, totodată noi posibilităţi de aplicare a regulii eliminării cuantificatorilor universali; Pe această cale, formula M este reductibilă la o funcţie logic booleană de atomi predicativi instanţiaţi.

Universitatea Spiru Haret

Paşii următori în analiză vor fi efectuaţi exclusiv pe baza conectorilor logic propoziţionali de tip α şi β. Regulile de tip α duc la dezarticularea sau analiza formulelor în cadrul aceleiaşi mulţimi. Dimpotrivă, regulile de tip β duc la crearea de noi submulţimi.

Procesul de analiză şi instanţiere succesivă poate fi reprezentat prin arbori cu noduri etichetate prin mulţimi de formule.

Pe această cale expresia definitoare M poate fi transpusă într-o mulţime Hintikka.

Mai departe, pe baza teoremei 6 din capitolul „Metoda arborilor de decizie în logica predicatelor" vom conchide că M este realizabilă.

Cum predicatul ce descrie termenul de definit este potrivit condiţiilor 6 şi 7 echivalent cu expresia definitoare rezultă că orice interpretare şi asignare de valori care face definitorul adevărat va face adevărat şi termenul de definit.

Prin teorema A de mai sus am legat teoria definiţiilor în sistemele teoretice şi în bazele de cunoştinţe cu teoria modelelor şi cu procedeele semantice de decizie, căci orice submulţime de atomi instanţiaţi obţinută pe frunzele arborelui de analiză într-o mulţime Hintikka descrie un model al formulei iniţiale.

Aceiaşi idee a conectării teoriei definiţiei cu metodele semantice de decizie din logica predicatelor o putem evidenţia prin alte două teoreme analoage teoremei A de mai sus.

Teorema B. Fie F = P (x1, x2,. .. ,xn) ≡ M. Termenul nou introdus P (având δ (P) = n) este realizabil în teoria T, dacă şi numai dacă, arborele de analiză TrM asociat formulei M are cel puţin un drum deschis.

Realizabilitatea definitorului unei definiţii Dfn poate fi testată direct prin metoda arborilor de decizie. Pentru aceasta este suficient să plasăm formula M ce descrie expresia definitoare în rădăcina arborelui de decizie şi să aplicăm regulile metodei, fără a nega formula iniţială. Dacă analiza noastră se încheie cu obţinerea a cel puţin unui drum deschis în arborele de analiză, atunci M este realizabil şi atomii instanţiaţi identificaţi pe drumul rămas deschis în arbore constituie un model al expresiei definitoare. Cum aceasta este semantic echivalentă cu Dfd, atunci şi Dfd este realizabil.

Numim *arbore de analiză* a unei formule M un arbore obţinut prin plasarea lui M în rădăcina arborelui şi prin aplicarea la aceasta a regulilor definite pentru metoda arborilor de decizie. Formulele atomare scrise într-un drum rămas deschis descriu un *model* al formulei iniţiale.

Universitatea Spiru Haret

Demonstraţia teoremei B poate fi construită printr-o inducţie definită pe structura expresiei definitoare M.

Obs. 1. Arborele de analiză a unui termen definit ne arată la ce termeni primitivi poate fi redus termenul în cauză şi de ce termeni depinde acesta.

Obs. 2. Respingerea sau infirmarea adevărului unuia dintre termenii de care depinde un termen introdus prin definiţie compromite realizabilitatea expresiei definitoare şi prin aceasta a termenului definit.

Teorema C. Fie F = P (x1, x2,. .., xn) ≡ M o definiţie explicită în cadrul unei teorii. Termenul nou introdus P (având δ (P) = n) este realizabil în teoria T, dacă şi numai dacă, testată prin metoda Davis-Putnam expresia definitoare M are un model.

Demonstraţia teoremei C se întemeiază pe faptul că toate metodele de decizie utilizate într-o teorie logică sunt deductiv echivalente în raport cu o clasă de formule K la care acestea sunt aplicate. De exemplu o clasă de formule K sau o bază de cunoştinţe K testată prin arbori de decizie, metoda rezoluţiei sau metoda Davis Putnam identifică aceleaşi liste de atomi instanţiaţi în care aceasta devine adevărată sau găseşte aceleaşi modele ce satisfac baza K.

Exemple. Fie o bază de cunoştinţe K, având drept atomi primitivi predicatele:

T(x, y), M(x, y), C(x, y) şi ca predicate derivate P(x, y), B(x, y), N(x, y), F(x, y), definite după cum urmează:

D1 $P(x, y) =_{df} T(x, y) \vee M(x, y)$

D2 $B(x, y) =_{df} \exists z\,(T(x, z) \wedge P(z, y))$

D3 $N(x, y) =_{df} \exists z\,(T(y, z) \wedge C(z, x))$

D4 $F(x, y) =_{df} \exists z \exists u\,(T(z, x) \wedge T(z, y) \wedge M(u, x) \wedge M(u, y))$

iar baza factuală este descrisă de atomii instanţiaţi:

F1 T(i, n)	F4 M(m, n)	F7 C(n, a)
F2 T(i, d)	F5 M(m, d)	F8 T(d,v)
F3 T(i, l)	F6 M (m, l)	F9 M(l,w)

Transpusă în Prolog K devine:

```
tata(i,n).
tata(i,d).
tata(i,l).
tata(d,v).
mama(m,n).
mama(m,d).
mama(m,l).
mama(l,w).
```


Universitatea Spiru Haret

casatorit(d,a).
parinte(X,Y): - tata(X,Y); mama(X,Y).
bunic(X,Y): - tata(X,Z), parinte(Z,Y).
nora(X,Y): - parinte(Y,Z), casatorit(Z,X).
frate(X,Y): - tata(Z,X), tata(Z,Y), mama(U,X), mama(U,Y), X\=Y.

Să revenim acum la ilustrarea teoremelor A, B, şi C despre realizabilitatea predicatului ce descrie termenul de definit în funcţie de realizabilitatea expresiei definitoare. Să considerăm pentru început D1.

$P(x, y) \equiv T(x, y) \vee M(x, y)$

Calculăm mulţimea Hintikka din definitorul M (sau Dfn) al definiţiei D1, reprodusă ca enunţ definiţional mai sus.

$U = \{ T(x, y) \vee M(x, y)\}$

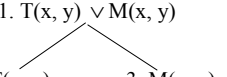
$T(x, y) \vee M(x, y)$ este o β-formulă, care conduce la scindarea mulţimii U în două submulţimi:

$U1 = \{ \{T(x, y)\}, \{M(x, y)\} \},$

cea ce ne permite să conchidem că P(x,y) este realizabil, dacă şi numai dacă, este realizabilă vreouna dintre T(x, y) sau M (x, y). Cercetarea bazei factuale F1-F9 ne permite să observăm că fiecare dintre cele două predicate dispune de câte 4 posibilităţi de instanţiere. Tot atâtea soluţii vom descoperi dacă vom interoga în Prolog baza de cunoştinţe reprodusă mai sus.

Să considerăm aceiaşi definiţie D1 din perspectiva teoremei B.

Analiza definitorului lui D1 prin regulile arborilor de decizie ne va conduce la identificarea modelelor lui $T(x, y) \vee M(x, y)$.



care ţinând seama de F1- F9 va genera pentru P(x, y) aceeaşi clasă de modele.

Să cercetăm acum realizabilitatea termenului nou introdus în definiţia D3, N(x, y) din perspectiva exigenţelor teoremei C.

N(x, y) este realizabilă, dacă şi numai dacă, formula din definitorul lui D3,

$\exists z\ (T(y, z) \wedge C(z, x))$, testatată prin metoda Davis-Putnam, se dovedeşte a fi realizabilă.

1. $\exists z\ (T(y, z) \wedge C(z, x))$
2. $T(y, const) \wedge C(const, x)$

3.1 T (y, const) 3.2 C(const, x)

Universitatea Spiru Haret

Comparând formula 3.2 cu baza factuală F1-F9, constatăm: const este n, iar x = a, iar y = i. În consecinţa, predicatul N(x, y) devine adevărat pentru x = a şi y = i, ceea ce inseamnă că a este în relaţia N cu i.

Ideea metodologică asupra căreia am insistat prin teoremele de mai sus este ideea dependenţei valorii de adevăr a termenului de definit, Dfd, de valoarea de adevăr a definitorului, redat ca o funcţie logic-propoziţională de adevărul termenilor primitivi sau a termenilor derivaţi, anterior introduşi în teorie. Testând prin metode logice adecvate definitorul unei definiţii, realizabilitatea acestuia, testăm, indirect, realizabilitatea, în interpretarea şi asignarea de valori dată, a termenului de definit.

Mulţimile Hintikka, metoda arborilor de decizie, metoda Davis-Putnam se dovedesc a fi mijloace de analiză a realizabilităţii unor predicate derivate într-o teorie ştiinţifică sau într-o bază de cunoştinţe pe baza conexiunii acestora cu termenii sau predicatele din definitor.

Definiţia explică un termen nou introdus pentru un interlocutor sau o clasă de interlocutori, h2, pe baza înţelegerii de către aceştia a termenilor sau numelor comune din expresia definitoare şi, desigur, pe baza înţelegerii conectivelor logice şi a cuantificatorilor.

Din perspectiva emitentului definiţiei, agentul h1, care apare în ipostaza de constructor de teorie, definirea este un act de sinteză sau asamblare a unor termeni sau concepte preexistente într-un concept nou denumit prin predicatul ce stă pentru termenul de definit. Acesta „prescurtează" printr-un nume unic un agregat conceptual explicat în expresia definitoare. Emitentul propune sau legiferează o regulă semantică pentru înţelegerea termenului de definit (desigur, în definiţiile stipulative, nu şi în cele lexicale). Receptorul definiţiei stipulative ia act de convenţiile lexicale instituite de către emitent, le acceptă sau le respinge în forul său intim, dar în comunicarea sa cu acesta trebuie să ţină seama de accepţiile semantice propuse, măcar pentru a-i înţelege modul propriu de gândire. Dacă, dimpotrivă, receptorul definiţiei nu este o fiinţă dubitativă, ci un elev din clasele elementare care citeşte o definiţie într-un manual de geometrie, atunci acesta va acorda, fără ezitare, termenului de definit Dfd (respectiv, P(x1, x2,. .. xn) semnificaţia propusă în Dfn (respectiv în formula M). Reamintim că modelul semiotic propus de noi cere ca toate simbolurile din definitor să fie accesibile agentului receptor al definiţiei.

Construită în acest fel, teoria definiţiilor explicite şi stipulative devine o *teorie a actelor de înţelegere* a termenilor derivaţi prin reducerea acestora la agregări logice de termeni anterior înţeleşi. Pentru a

Universitatea Spiru Haret

înţelege noţiunea de limbaj comun ‘noră (x, y)’ ca un termen de definit o descriem pe aceasta ca pe o compunere a relaţiei de ‘părinte (y, z)’ cu relaţia ‘căsătorit (z, x)’

D5 *noră (x, y)* $\equiv \exists z$*(părinte(y, z)* $\wedge$ *căsătorit(z, x)*

Un copil care doreşte să înţeleagă sensul termenului de limbă naturală ‘noră’ îl va putea capta sau surprinde dacă va fi înţeles anterior semnificaţia termenului de ‘părinte’ ca o generalizare a termenilor ‘tată’ sau ‘mamă’ şi va fi înţeles anterior semnificaţia termenului de ‘căsătorit’. În plus, el va trebui să înţeleagă regulile agregării conjunctive a predicatelor, precum şi semnificaţia cuantificatorului existenţial. În practică, un astfel de termen se introduce prin utilizare contextuală sau prin exemplificare prin propoziţii de forma: „Tanti Ana este nora bunicului Ion, *căci* bunicul Ion este tatăl lui Dan, care este căsătorit cu tanti Ana”. La aceasta ar mai putea fi adăugată precizarea că orice tată este un părinte, după cum şi orice mamă este un părinte. În fraza de mai sus propoziţia „Ana este *nora* lui Ion” este explicată sau justificată pe baza altor două propoziţii: „Ion este *tatăl* lui Dan” şi „Dan este *căsătorit* cu Ana” şi cum „Ion este *tatăl* lui Dan” de aici rezultă că „Ion este *părintele* lui Dan”.

Teoria definiţiilor explicite poate fi corelată în mod firesc cu teoria argumentării sau justificării unor enunţuri. Enunţul „Ana este *nora* lui Ion „poate fi susţinut sau argumentat prin enunţurile anterior stabilite potrivit cărora „Ion este *tatăl* lui Dan” şi „Dan este *căsătorit* cu Ana” Este uşor de observat că termenul de definit se transformă în termen de argumentat, iar expresia definitoare devine suport sau temei factual al tezei factuale de argumentat. Expresia definiţională în forma sa generică va servi ca o regulă sau schemă generală de inferenţă.

Cititorul atent al definiţiei D3 de mai sus, va observa că aceasta este identică cu D5, prin care am introdus termenul de „noră”, care, la rândul său este redată ca ultimă instrucţiune Prolog în programul scris pentru baza de cunoştinţe K, dată mai sus. Prologul poate identifica toate speciile sau cazurile particulare care instanţiază un termen derivat sau un definiendum prin reducerea acestuia la expresia definitoare sau la „corpul” instrucţiunii Prolog. La rândul lui un termen din „corpul” sau „coada” unei instrucţiuni poate deveni „capul” unei noi instrucţiuni, care va avea propria ei „coadă”. Această înlănţuire poate fi reprezentată intuitiv prin arbori de reducere sau întemeiere. Important este ca ultimii termeni sau „frunzele” să aibă în baza de date predicate instanţiate sau date factuale.

Universitatea Spiru Haret

Parcurgând arborele de sus în jos putem obţine, *prin modus ponens*, din datele factuale şi clauzele generice ca teoremă, o propoziţie factuală ce instanţiază predicatul termenului de definit. O teorie modernă despre lanţurile de definiţii ce apar în construcţiile noastre teoretice sau în bazele de cunoştinţe ale unor clase de probleme ne permite să stabilim conexiuni surprinzătoare între teoria conceptelor şi programarea logică. De adevărul acestei propoziţii ne vom convinge pe deplin după parcurgerea capitolului următor.

13. **Definiţiile explicite şi bazele de cunoştinţe**

Definiţia este o operaţie logico-analitică prin care se explică înţelesul unui termen cu ajutorul altor termeni, anterior cunoscuţi de interlocutorul căruia ne adresăm. Astfel, definiţiile ne apar ca instrumente de învăţare a convenţiilor lingvistice din limbile naturale şi din limbajele specializate ale ştiinţelor sau din limbajele diferitelor profesii. Dar definiţiile mai joacă şi alte roluri, decât acela de extindere a vocabularului individual al unui vorbitor. Aşa cum am mai observat mai sus, definiţiile permit ordonarea conceptelor într-o teorie ştiinţifică, începând cu cele primitive şi terminând cu ultimele concepte derivate introduse. În plus, definiţiile intervin ca reguli de calcul într-un sistem teoretic. Întrucât enunţurile definiţionale sunt echivalenţe, ele permit utilizarea regulii substituirii echivalentelor, ori de câte ori într-o formulă oarecare apare Dfd-ul sau Dfn-ul unei definiţii. Dar, mai mult decât aceasta, definiţiile joacă un rol esenţial în programarea logică, în scrierea instrucţiunilor în Prolog. Ilustrăm aceasta prin scrierea unor instrucţiuni despre relaţiile de rubedenie, la care dealtfel ne-am referit şi mai sus.

```
/* Relaţii de rubedenie*/

tata(ion,dan).
tata(ion,ana).
tata(dan,petru).
tata(dan,elena).
tata(gheorghe,veta).
tata(petru,pavel).
tata(petru,vera).
```


Universitatea Spiru Haret

```
tata(vlad,oana).
mama(maria,dan).
mama(maria,ana).
mama(vica,petru).
mama(floarea,pavel).
mama(ana,veta).
mama(veta,oana).
mama(vica,elena).
mama(floarea,vera).
casatorit(ion,maria).
casatorit(dan,vica).
casatorit(petru,floarea).
casatorit(gheorghe,ana).
casatorit(vlad,veta).
casatorit(maria,ion).
casatorit(vica,dan).
casatorit(floarea,petru).
casatorit(ana,gheorghe).
casatorit(veta,vlad).
lista_barbati(l1,[ion,dan,gheorghe,petru,vlad,pavel]).
lista_femei(l2,[maria,vica,ana,floarea,veta,vera,oana]).

member(X,[X|Y]).
member(X,[Y|Z]):-member(X,Z).
barbat(X):-lista_barbati(l1,L),
           member(X,L).
femeie(X):-lista_femei(l2,L),
           member(X,L).
parinte(X,Y):-tata(X,Y);
              mama(X,Y).
copil(X,Y):-parinte(Y,X).
fiu(X,Y):-copil(X,Y),
          barbat(X).
fiica(X,Y):-copil(X,Y),
            femeie(X).
bunic(X,Y):-tata(X,Z),
            parinte(Z,Y).
bunica(X,Y):-mama(X,Z),
             parinte(Z,Y).
```

```
unchi(X,Y):-parinte(Z,X),
            parinte(Z,U),
            parinte(U,Y),
            barbat(X).
matusa(X,Y):-parinte(Z,X),
             femeie(X),
             parinte(Z,U),
             parinte(U,Y).
nepot_de_bunic(X,Y):-bunic(Y,X).
nepot_de_unchi(X,Y):-unchi(Y,X).
var(X,Y):-parinte(S,U),
          parinte(S,T),
          parinte(U,X),
          parinte(T,Y),
          X\=Y, U\=T,
          barbat(X).
vara(X,Y):-parinte(S,U),
           parinte(S,T),
           parinte(U,X),
           parinte(T,Y),
           X\=Y,U\=T,
           femeie(X).
frate(X,Y):-tata(Z,X),
            tata(Z,Y),
            mama(U,X),
            mama(U,Y),
            barbat(X),
            X\=Y.
sora(X,Y):-tata(Z,X),
           tata(Z,Y),
           mama(U,X),
           mama(U,Y),
           femeie(X),
           X\=Y.
sot(X):-casatorit(X,Y).
sotie(Y):-casatorit(X,Y).
nora(U,V):-parinte(V,Z),
           casatorit(Z,U).
ginere(U,V):-parinte(V,Z),
             casatorit(U,Z).
```

```
socru(T,S):-nora(S,T);
            ginere(S,T).
stramos(X,Y):-parinte(X,Y).
stramos(X,Y):-parinte(X,Z),
                stramos(Z,Y).
descendent(X,Y):-stramos(Y,X).
ruda_liniara(X,Y):-stramos(X,Y);
                        stramos(Y,X).
ruda_coliniara(X,Y):-(stramos(Z,X),
                        stramos(Z,Y));
                        (stramos(X,Z),
                        stramos(Y,Z)).
ruda_de_singe(X,Y):-ruda_liniara(X,Y);
                        ruda_coliniara(X,Y).
ruda_prin_alianta(X,Z):-casatorit(X,Y),
                                parinte(Z,Y).
ruda(X,Y):-ruda_de_singe(X,Y);
            ruda_prin_alianta(X,Y).

/*Intrebari:
?-tata(X,dan).
?-tata(ion,Y).
?-bunica(maria,X).
?-bunica(X,_).
?-bunic(X,Y).
?-descendent(X,ion).
?-sot(X).
?-var(X,Y).
?-vara(X,Y).
?-stramos(X,oana).
?-unchi(X,veta).
?-matusa(X,petru).
?-frate(X,Y).
?-nora(X,ion).
?-ginere(X,gheorghe).
?-stramos(X,oana),femeie(X).
?-stramos(X,pavel),barbat(X).
?-bunic(X,vera).        */
```

Câteva observaţii vor face mai bine înţelese raporturile dintre definiţiile explicite şi instrucţiunile Prolog.

Obs. 1. Situaţia acţională sau discursiv-comunicativă *Sit* în care intervine introducerea definiţiilor este caracterizată de baza factuală stipulată la începutul programului. Aceasta oferă câte 8 instanţieri pentru fiecare dintre predicatele primitive: tată(X, Y), mamă(X, Y), căsătorit(X, Y). Altfel spus, se poate afirma că *Sit* are ca model cele 24 de clauze factuale enumerate la începutul programului Prolog. Vom include în model şi cele două clauze care introduc lista bărbaţilor şi lista femeilor.

Obs. 2. Instrucţiunile generice introduc 29 de concepte derivate: bărbat, femeie, părinte, fiu, fiică,..., rudă, definite pe baza conceptelor primitive şi a celor anterior introduse;

Obs. 3. Lista conceptelor definite într-o teorie coerentă satisface exigenţele relaţiei de ordine menţionată anterior (vezi cap.5, pag 150, punctele a), b), c)). Într-o teorie sau într-o bază de cunoştinţe definiţiile trebuie să fie ireflexive, asimetrice şi tranzitive. Trebuie să evităm circularitatea atât în cadrul unei singure definiţii prin bucle de un singur pas, cât şi în cadrul unui lanţ de definiţii. Şi un cerc cu un diametru mai mare tot cerc este într-un lanţ de definiţii. Termenii primitivi trebuie să rămână nedefiniţi explicit. Aceştia pot fi definiţi implicit, prin apariţia lor în axiome şi pot fi ilustraţi sau instanţiaţi în baza factuală ce „hrăneşte" teoria, întrând în mecanismele ei de prelucrare a informaţiei. O teorie poate fi privită ca un mecanism discursiv de descriere şi prelucrare a informaţiilor noastre despre lumea reală. Într-un anumit sens, teoremele demonstrate, enunţurile derivate pot fi privite ca ieşiri din sistemul teoretic.[1] Relaţia de definire este asimetrică într-o construcţie teoretică dată. Relaţia de definire într-o construcţie teoretică este tranzitivă. Toate definiţiile pot fi reduse, în ultimă instanţă la baza lor primitivă.

Obs. 4. Termenul de definit sau Dfd joacă rolul de cap al clauzei generice sau al instrucţiunii, iar expresia definitoare sau Dfn joacă rolul de corp sau coadă a instrucţiunii Prolog;

Obs 5. În demonstrarea unui termen derivat reducem succesiv realizabilitatea acestuia la realizabilitatea definitorului său, respectiv la realizabilitatea corpului sau cozii clauzei. Procedeul se repetă de

[1] Într-un capitol următor vom considera mulţimea tuturor consecinţelor derivate din axiomele unei teorii ca descriind aceeaşi lume posibilă şi vom considera drept o stare epistemică diferită numai una în care se schimbă baza iniţială de cunoştinţe prin adăugarea sau eliminarea datelor iniţiale.

Universitatea Spiru Haret

mai multe ori, până ce se accede la baza factuală, respectiv la modelul lui Sit, simbolul ce descrie situaţia sau starea cognitivă în care se introduc definiţiile sau în care se scrie programul;

Obs. 6. Demonstraţiile în Prolog constau în reducerea succesivă a realizabilităţii termenilor derivaţi la realizabilitatea definitorilor acestora. Procesul se încheie cu succes, atunci când baza factuală poate întemeia adevărul tuturor termenilor ce etichetează „frunze" sau noduri terminale în arborele de reducere sau argumentare construit din regulile programului Prolog sau din enunţurile condiţionale generice.

Obs. 7. Demonstraţia în Prolog este un proces de reducţie, de coborâre de la abstract la concret, de la variabile la constante.

Obs. 8. Demonstraţiile în Prolog fac uz şi de principiul inducţiei. În cazul particular, acesta este asigurat prin definirea inductivă a conceptului de strămoş:

stramos(X,Y):-parinte(X,Y).
strămos(X,Y):-părinte(X,Z),
strămos(Z,Y).

Obs. 9. Demonstraţiile în Prolog presupun utilizarea unor mecanisme de unificare. În particular, presupun descoperirea celui mai general unificator şi executarea unor substituţii şi instanţieri, respectiv anumite concretizări sau instanţieri ale schemelor generale.

Obs. 10. Între teoria definiţiilor într-o construcţie teoretică, reducţia la concepte primitive, căutarea textului demonstrativ pentru un predicat definit instanţiat şi teoria argumentării există o legătură organică de care ne vom da mai bine seama în capitolul care urmează.

14. **Rolul definiţiilor în ştiinţele juridice. Normele, definiţiile stipulative şi instrucţiunile Prolog**

Normele juridice sunt promulgate de puterea legislativă şi apără un set de valori în care crede o anumită comunitate. Sunt valori viaţa şi demnitatea persoanelor, avuţia acestora, instituţiile publice, suveranitatea statului etc. Conduitele care contravin prevederilor normative sunt infracţiuni sau contravenţii.

Legiuitorii din toate timpurile, de la Hamurabi sau Solon până în zilele noastre, au identificat principalele clase posibile de infracţiuni şi le-au asociat, în funcţie de gravitatea acestora, pedepse mai mult sau mai puţin severe. Clasele sau tipurile de infracţiuni sunt mulţimi de

Universitatea Spiru Haret

conduite sau situaţii indezirabile provenite din conduite, cărora legiuitorii le-au asociat sancţiuni determinate. Codul Penal Român enumeră o lungă listă de infracţiuni cărora li se atribuie pedepse. Astfel, în Codul Penal în dreptul cuvântului „furt", la articolul 208 se scrie:

„Luare unui bun mobil din posesia sau detenţia altuia, fără consimţământul acestuia, în scopul de a şi-l însuşi pe nedrept, se pedepseşte cu închisoare de la 3 luni la 2 ani sau cu amendă".

Furtul este, deci, un gen de conduită infracţională definită de legiuitor. Ca forme mai grave de furt, acesta distinge „furtul calificat", şi „tâlhăria".

Scopul acestui paragraf este să facem o conexiune între clasele de infracţiuni, teoria definiţiilor stipulative şi instrucţiunile Prolog.

Furtul este o infracţiune contra proprietăţii, este un atentat la proprietatea legitimă a altcuiva. Pentru ca cineva să poată săvârşi un furt trebuie, în prealabil, ca altcineva să aibă (să posede) sau să deţină un bun şi o altă persoană, viitorul hoţ, să atenteze asupra bunului deţinut legitim de către primul, să-l ia fără consimţământul deţinătorului, cu intenţia de a şi-l însuşi pe nedrept.

Furtul este o relaţie socială complexă, ternară, cuaternară sau n-ară. Iată, pe scurt, notele definitorii sau precondiţiile relaţiei cuaternare:

fură (X,Y,Z,) = „X fură de la Y, Z, în condiţiile_"
dacă:
are (Y,Z),
deţine (Y,Z)),
bun (Z),
ia (X,Z),
luat_fără consimţământ (Y,Z)
scop (X, însuşire_nedreaptă (Z)).

La modul general, vom spune că „X fură de la Y, Z, în condiţiile L, dacă Y are sau deţine Z şi Z este un bun şi X ia, de la Y, Z fără învoirea lui Y, cu scopul de a şi-l însuşi în mod nedrept".

Putem explica relaţia de furt ca o reţea semantică temporală, unde t1< t2.

are (Y,Z); t1
deţine (Y,Z)), t1
bun (Z), t1
ia (X,Y,Z), t2
fură (X,Y,Z,_) t2
fără_consimţământ (Y,Z), t2
scop (X, însuşire_nedreaptă (Z)) t2

Universitatea Spiru Haret

Posesiunea sau deţinerea sunt anterioare actului de a fura (t1<t2): Dacă cineva ia cu consimţământul proprietarului un obiect aflat în posesia acestuia, nu fură, căci el nu schimbă regimul juridic al obiectului luat. Dar este posibil ca cineva să fure un obiect al cărui proprietar este el însuşi, dacă obiectul în cauză se găseşte în deţinerea altei persoane şi aceasta nu este anunţată de luarea obiectului. Un proprietar de rea credinţă ar putea să-i ceară acestuia restituirea obiectului deţinut, ca şi cum el nu l-ar fi luat.

Din punctul de vedere al definiţiilor stipulative, termenul ce descrie o clasă de conduite reprobabile, în cazul nostru furtul, este pe post de *definiendum* (Dfd) sau termen de definit, iar notele definitorii ale acestuia sunt pe post de *definiens* (Dfn) sau expresie definitorie.

În planul instrucţiunilor Prolog, numele clasei de infracţiuni stă pe postul de cap al instrucţiunii (întotdeauna descrisă printr-un atom predicativ), iar definitorul sau caracterizarea ei în termeni primitivi sau anterior introduşi, se face în coada instrucţiunii.

Intr-o clauză Horn, termenul ce descrie clasa de infracţiuni corespunde literalului pozitiv, iar caracteristicile sau notele clasei de infracţiuni sunt redate tot prin literali negativi.

Intr-o propoziţie condiţională de forma: „dacă A, atunci B", termenul ce descrie clasa de infracţiuni corespunde consecventului B, iar caracteristicile acesteia corespund antecedentului A, care, de regulă, este o conjuncţie de atomi predicativi. Aceste observaţii pot fi rezumate în tabelul nr.1.

1	Definiţie	Definiendum (Dfd)	Definiens (Dfn)
2	Implicaţie	Consecvent	Antecedent
3	Instrucţiune Prolog	Cap	Corp
4	Clauză Horn	Literal pozitiv	Literali negativi
5	Drept penal	Clasă de infracţiuni	Caracteristici

Tabel 1. *Corespondenţe între definiţii, implicaţii, instrucţiuni Prolog, clauze Horn şi dreptul penal*

Universitatea Spiru Haret

Pe scurt, clasa sau genul de infracţiuni (de exemplu, viol) corespunde literalului pozitiv (la nivelul clauzelor Horn), capului instrucţiunii Prolog, *definiendum*-ului dintr-o definiţie stipulativă şi consecventului dintr-o implicaţie logică. Notele definitorii ale clasei sau genului de infracţiune sau caracteristicile acesteia corespund, într-o clauză Horn, literalilor negativi, coadei sau corpului unei infracţiuni Prolog, definitorului dintr-o definiţie stipulativă şi antecedentului într-o implicaţie logică.

Concluzia practică ce se degajă de aici este de a construi pentru fiecare clasă sau gen de infracţiuni (furt, furt_calificat, tâlhărie, piraterie, insultă, viol, seducţie, omor, omor calificat) o compunere de relaţii atomare primitive sau anterior introduse care să acopere semnificaţia termenului de definit. Intre Dfd şi Dfn există o identitate referenţială. În procesul explorării unei baze de cunoştinţe se reduce o întrebare la capul unei instrucţiuni şi capul instrucţiunii la corpul acesteia şi apoi fiecare atom din corpul instrucţiunii se reduce la antecedenţii săi posibili, dacă acel atom apare în ipostaza de cap al unei noi instrucţiuni. Ultima instrucţiune nu poate fi redusă decât la atomi instanţiaţi. Înlocuirea variabilelor prin constante sau instanţierea mijloceşte aceste secvenţe de reduceri succesive.

Dar înainte de aceasta să spunem câteva cuvinte despre predicate şi întrebări şi despre modalităţile de a le exprima în Prolog.

Un predicat este o schemă sau o structură propoziţională aptă de a deveni o propoziţie, de exemplu „X deţine Y", „X împrumută de la Y, Z", „X este prieten cu Y".

Aceste scheme predicative devin propoziţii, dacă în locul variabilelor individuale punem nume proprii sau constante individuale sau dacă cuantificăm fiecare variabilă individuală din schemă. Exemple; „Ion deţine 4 ha de pământ", „Petru împrumută de la Nicolae 10.000 lei", „Există două persoane X şi Y astfel că X este prieten cu Y" (relaţia de prietenie nu este vidă):

Noţiunea de predicat stă şi la baza întrebărilor. Exemple de întrebări sunt: „I-a furat Dan lui Ion maşina ?, „Cine a furat maşina lui Ion?".

O întrebare nu este o propoziţie declarativă, ci o solicitare din partea unui agent adresată interlocutorului său de a se pronunţa fie asupra valorii de adevăr a unei interpretări date unui predicat sau asupra satisfacerii de către unul sau mai multe argumente a exigenţilor acelei interpretări.

Universitatea Spiru Haret

15. **Definiţiile explicite şi conceptele economiei de piaţă**

Facem mai jos o tentativă superficială de a descrie într-un set de definiţii un număr de concepte derivate ale economiei de piaţă, pentru ca, în pasul următor, să scriem un număr de instrucţiuni Prolog despre activităţile umane într-o economie de piaţă. Urmând tematica obişnuită a unui curs de economie, vom defini concepte ce ţin de factorii producţiei, de piaţa capitalului, piaţa muncii, piaţa monetară, teoria producţiei în economia de piaţă, cost, profit, concurenţă, dobândă compusă, rentabilitate, etc.

Vom defini, pe baza unor primitive ca: 'produce(X,Y)', 'vinde (X,Y)', 'cumpără(X, Y)', 'angajează(X,Y)', etc. unele concepte derivate ca: 'patron(X)', 'salariat(X)', 'negustor(X)', 'concurează(X, Y)', 'întreprinde(X,afacere)', 'capital(X)', 'titlu_de_valoare(X)', 'divident_actiune(firma,X)', 'profit_anual(agent,firma)', 'curs_acţiune(firma,val)', 'obligaţiune(oblig,firma,bani)', debitor(firma, agent, bani, termen)', 'creditor(agent, firma) etc.

Teoria acţiunii şi economia de piaţă

```
%%% Piaţă, concurenţă, capital
produce(ion, pantofi).
produce(jean, detergenti).
produce(lulu, mobila).
produce(nicu, cartofi).
produce(pavel, cartofi).
produce(vasile,[griu,orz,porumb,ovas]).
produce(lae,[griu,orz,porumb,ovas]).
produce(victor,paine).
produce(marin,paine).
produce(maria,pulovare).
produce(barbu,[lacate,chei]).
produce(ana,pulovare).
produce(maria,pulovare).
produce(david,[lacate,chei]).
produce(petru,[cirese,visine,caise,mere,pere]).
consuma (X,Z):-produce(X,Y), f_munca(Z,Pers,Ore),
```


Universitatea Spiru Haret

```
energie(Z, KW),((materiale(Z);prefabricate(Z)).
angajeaza(jean,[andrei,paul,calin,doru,viorica,elena]).
angajeaza(iulu,[dinu,fabian,eva, sanda,marina]).
patron(X):-angajeaza(X,Y).
salariat(Z):-angajeaza(X,Y),member(Z,Y).
l_salariati(L):- setof(X, salariat(X), L).
cumpara(X,grau):- produce(X,paine).
brutar(X):- produce(X,paine).
cereale([griu,orz,porumb,ovas]).
cereala(X):- cereale(Y), member(X,Y).
fructe([cirese,visine,caise,mere,pere]).
cost(ion,pantofi,60000).
cost(dan,pantofi,80000).
cost(ana,pulovar,70000).
cost(maria,pulovar,50000).
cost(nicu, cartofi,500).
cost(pavel,cartofi,600).
cost(victor,paine,400).
cost(marin,paine,500).
vinde(asan,paine).
vinde(nicos,paine).
pret_vanzare(asan,paine,800).
pret_vanzare(nicos,paine,850).

concureaza1(X,Y):-produce(X,Z),produce(Y,Z),cost(X,Z,U),
                  cost(Y,Z,T),U<T.
concureaza2(X,Y):-vinde(X,Z),vinde(Y,Z),pret_vanzare(X,Z,U),
                  pret_vanzare(Y,Z,T),U<T.
concureaza(X,Y):-concureaza1(X,Y);concureaza2(X,Y).

fruct(X):-fructe(Y),member(X,Y).

cumpara(adam,ion,pantofi,65000).
cumparator(X):-cumpara(X,Y,Z,P).
vanzator(Y):- cumpara(X,Y,Z,P).
marfa(Z):-cumpara(X,Y,Z,P).
pret(P):-cumpara(X,Y,Z,P).
vinde(adam, pantofi,75000).
pret_cumparare(Z):- cumpara(X,Y,Z).
```

```
pret_vanzare(Z):- vinde(X,Y,Z).
a_cumparat(gh,pulovare).
a_cumparat(gh,cirese).
a_cumparat(radu,pulovare).
a_cumparat(gavrila,lacate).
cumparator(X):-a_cumparat(X,T).
negustor(X):-cumpara(X,Y,Z),vinde(X,Y,U),
                U>Z.
intermediar(X):- negustor(X).

are(X,Y):-produce(X,Y).
are(X,Y):-a_cumparat(X,Y).
ofera(X,Y):-are(X,Y),vrea(X,bani).
cumpara(X,Y):-are_nevoie(X,Y);face_comert(X,Y).
producator(X):-produce(X,Y).
produs(Y):-produce(X,Y).
trebuinte([hrana,adapost,sanatate,securitate,delectare]).
trebuinta(X):-trebuinte(Y),member(X,Y).
satisface(paine,hrana).
satisface(casa,adapost).
satisface(medicament,sanatate).
satisface(consult_medical, sanatate).
satisface(spectacol,delectare).
satisface(politie, securitate).

bun_material(X):- satisface(X,Y),trebuinta(Y).


%%%Structura şi funcţionarea economiei de piaţă

l_factor_prod([solul,subsolul,apa,minerale,lemn,riu, mare],
            [unelte,masini,instalatii,energie,prefabricate],
            [know_how, tehnologii,programe],[bani]).
factori_nat(A):- l_factori_prod(A,B,C,D).
capital(X):-
l_factor_prod(A,B,C,D),(member(X,B);member(X,D)).
abilitati_tehnice(C):-l_factor_prod(A,B,C,D).
factor_restrictiv(X):- factori_nat(A),member(X,A).
l_factori_restrictivi(L):- setof (X, factor_restrictv(X), L).
```

```
primeste(X,renta):-are(X,mosie).
primeste(X,profit):- are(X,capital).
primeste(X,salariu):-depune(X,munca).
%%% agent_ec(X):-intreprinzator(X);producator(X);intermediar(X);
%%% gospodarie(X).

agenti_ec([adam,bratu,cornea,darie,emilian,gabor,horia,jir,kelly,olaru]
[iprse,ira,lampa,caleasca,itb],
[racnetul,trascaul,bumbacul,ciupeala,pleasca],
[copeica,albina,trintorul,clica]).
agent_ec(X):-gospodarie(X);intreprindere(X);
                societate_de_persoane(X);societate_de_capital(X).
gospodarii(A):- agenti_ec(A,B,C,D).
gospodarie(X):- gospodarii(A), member(X,A).
intreprinderi(B):-agenti_ec(A,B,C,D).
intreprindere(X):- intreprinderi(A), member(X,A).
societati_de_persoane(C):-agenti_ec(A,B,C,D).
societate_de_persoane(X):-societati_de_persoane(C),member(X,C).
societati_de_capital(D):-agenti_ec(A,B,C,D).
societate_de_capital(X):-societati_de_capital(D),member(X,D).

%%% Proprietatea
poseda(bratu,mosie).
poseda(tovu,clica).
poseda(tiriac,banca).
poseda(dulau,ciupeala).
poseda(unsurosu,pleasca).
proprietar(X):-poseda(X,Y).
proprietate(Y):-poseda(X,Y).

dispune(X,Y):-poseda(X,Y).
utilizeaza(X,Y):-poseda(X,Y).
drept_de_uzfruct(X,Y):-poseda(X,Y).
intretine(X,Y):-poseda(X,Y).
apara(X,Y):-poseda(X,Y).
administreaza(X,Y):-poseda(X,Y).
```

```
%Piaţa capitalului

folosit(unelte,afac1).
folosit(masini,bigAfaire).
folosit(instalatii,afac).
folosit(instal2,litleAffaire).
folosit(dolari,ciupeala).
folosit(marci,litleAffaire).
l_bani([dolari,lei,marci,lire, franci,guldeni,zloti,ruble]).
bani(X):- l_bani(Y), member(X,Y).

capital1(X):-(mijloace_prod(X);bani(X)),folosit(X,Afacere).
afacere(Afacere).
afacere(Afacere):-intreprinde(X,Afacere).
scop(unsurosu,profit).
investeste(unsurosu,lei).
organizeaza(unsurosu,[muncitori,unelte,masini,instalatii,energie,
bani, materii_prime,tehnologii,bani]).
produce(unsurosu,casa).

intreprinde(X,Afacere):-scop(X,Profit),
                        investeste(X,Bani),
                        organizeaza(X,Factori_prod),
                        (produce(X,Bunuri);face(X,Servicii)).
titluri_de_valoare([actiuni,obligatiuni,ipoteci,cambii,varante,cecuri]).
titluv(X):-titluri_de_valoare(Y),member(X,Y).
%%% Nota:O acţiune este mai sus un element într-o multime
%%% si apoi o voi defini ca un predicat. De optat intre
%%% cele doua alternative!!Eventual, de lucrat cu clase
%%% si cu clasificari. Vezi exemplele.
%%% detine(Agent,Firma,NrActiuni).
%%% valoare_nominala(Firma,Valoare).
%%% profit(Firma,Procent).

detine(tovu,racnetul,50).
detine(tova,trascaul,50).
detine(tovu1,racnetul,60).
detine(tovu,ciupeala,50).
detine(latrau,pleasca,50).
```

```
detine(dulau,racnetul,30).
detine(lupu,racnetul,80).
detine(puiu1,racnetul,50).
detine(puiu1,ciupeala,50).
detine(piru,pleasca,40).
valoare_nominala(racnetul,800000).
valoare_nominala(ciupeala,1000000).
valoare_nominala(trascaul,1100000).
valoare_nominala(pleasca,1500000).
profit(racnetul,20).
profit(ciupeala,30).
profit(trascaul,30).
profit(pleasca,50).

divident_actiune(Firma,X):- valoare_nominala(Firma,V),
profit(Firma,Procent),X is V*Procent/200.
profit_anual(Agent,Firma,Val):-divident_actiune(Firma,Div),
            detine(Agent,Firma,Nr_Ac),Val is Div*Nr_Ac.
%%% curs_actiune(Firma,Data,Bani).
curs_actiune(racnetul,d(7,01,97),900000).
curs_actiune(ciupeala,d(7,01,97),800000).
curs_actiune(trascaul,d(7,01,97),1300000).
curs_actiune(pleasca,d(7,01,97),1600000).

curs_supranominal(Firma,Data):-valoare_nominala(Firma,Val),
curs_actiune(Firma,Data,Bani),Bani>Val.

curs_subnominal(Firma,Data):-valoare_nominala(Firma,Val),
curs_actiune(Firma,Data,Bani),Bani<Val.

emite(copeica,h1).
emite(copeica,h2).
emite(copeica,h3).
emite(albina,a1).
emite(albina,a1).
emite(albina,a2).
emite(trintorul,t1).
emite(clica,c2).
emite(bumbacul,b1).
```

```
societate_de_capital(copeica).
societate_de_capital(albina).
societate_de_capital(trintorul).
societate_de_capital(clica).
societate_de_capital(gargara).
imprumuta(adam,copeica,4000000,1).
imprumuta(nicos,clica,5000000,2).
imprumuta(asan,bumbacul,3000000,1).
plateste(copeica,adam,dobanda).
plateste(clica,nicos,dobanda).
plateste(bumbacul,asam,dobanda).
rascumpara(copeica,adam,1,4000000).
rascumpara(clica,nicos,2,5000000).
rascumpara(bumbascul,asan,1,3000000).
poseda(adam,copeica,h1).
poseda(adam,copeica,h2).
poseda(adam,copeica,h3).
poseda(asan,bumbacul,b1).
poseda(nicos,clica,c2).

obligatiune(Oblig,Firma,Bani):-emite(Firma,Oblig),
            societate_de_capital(Firma),
            imprumuta(Agent,Firma,Bani,Termen),
            plateste(Firma,Agent,Dobanda),
            rascumpara(Firma,Agent,Termen,Bani).
debitor(Firma,Agent,Bani,Termen):- emite(Firma,Oblig),
        imprumuta(Agent,Firma,Bani,Termen),
        poseda(Agent,Firma,Oblig).
creditor(Agent,Firma) :- poseda(Agent,Firma,Oblig).
```

Programul poate fi interogat printr-o lungă listă de întrebări despre producători, despre produse, despre costuri, prețuri, proprietari, capitaliști, salariați, vânzători, cumpărători, negustori, profit, concu-rență, acțiuni, dividende etc. Programul dat mai sus trebuie înțeles ca un îndemn adresat cititorului de a se adresa cu mijloacele logicii și ale programării logice unor teme de interes teoretic și practic cum sunt cele legate de economia de piață.

Universitatea Spiru Haret

16. **Definiţiile operaţionale**

Definiţiile operaţionale sunt o specie aparte de definiţii în care explicarea sensului unui termen este mijlocită de determinarea unor situaţii acţionale şi desfăşurarea unor operaţii, conduite sau acţiuni încheiate prin atingerea unor rezultate sau prin satisfacerea unor exigenţe. Pe această cale utilizarea unui termen pentru a caracteriza un obiect individual este condiţionată de desfăşurarea asupra acestuia a unei operaţii sau a unui şir de operaţii şi de rezultatele cu care se încheie acea sau acele operaţii.

16.1. *Exemple*

Să dăm, mai întâi câteva exemple de definiţii operaţionale.

1. x este acid, dacă şi numai dacă, introducând în el o hârtie de turnesol, aceasta se înroşeşte;

2. conferinţa a durat o oră, dacă şi numai dacă, din momentul începerii ei până în momentul terminării ei, arătătorul mare al ceasului a executat o rotaţie completă;

3. distanţa dintre cei doi pomi este de 15m, dacă şi numai dacă, unitatea de măsură numită metru a putut fi suprapusă de 15 ori în intervalul respectiv;

4. cuarţul este mai dur decât plumbul, dacă şi numai dacă, apăsând un vârf de cristal de o placă de plumb, acesta o zgârie;

5. Formula F descrie un raţionament valid, dacă şi numai dacă, aplicând asupra ei metoda arborilor de decizie, în arborele ei complet obţinem numai drumuri închise.

6. Persoana x suferă de boala y, dacă şi numai dacă la examenul clinic a manifestat simptomele S1,. .. ,Sn şi la analizele A1,. .. ,Am a obţinut rezultatele R1,. .., Rm.

7. dobanda_compusa(Bani,Rata,Timp,DobC):-
suma_imprumutata(Bani),rata(Rata),numar_ani(Timp),
R1 is 1+Rata/100, expo(Timp, R1, ExpR1),
R2 is ExpR1-1, DobC is Bani*R2.

%%%Nota: Instrucţiunea de mai sus descrie formula dobânzii
%%% compuse propusă de Leibniz în 1683

Ce au comun toate aceste definiţii ? În toate aceste definiţii se pune problema îndreptăţirii calificării unui obiect desemnat printr-un

Universitatea Spiru Haret

nume propriu sau printr-o variabilă printr-un termen sau un descriptor teoretic, în funcţie de modul în care răspunde obiectul în cauză la testul sau operaţia (respectiv operaţiile) ce urmează să se aplice asupra sa.

Definiţiile operaţionale reduc o problemă de semantică logică la o problema acţional-pragmatică sau sintactic computaţională. Definitorul definiţiei, chiar dacă este redat prin cuvinte, nu vizează obiecte sau semnificaţii lexicale, ci operaţii fizice, măsurători, calcule matematice sau programe logico-sintactice prin care se pot atinge anumite rezultate, iar aceste rezultate vor funcţiona ca nişte criterii de încuviinţare sau respingere a utilizării termenului de definit pentru calificarea obiectului în cauză.

Este uşor de observat că în toate aceste definiţii intervine un termen de definit ce poate fi redat printr-un predicat sau o propoziţie aflate pe post de definiendum. Astfel în prima definiţie termenul de definit este predicatul monadic 'acid(x)', în a doua se cere definirea propoziţiei 'a_durat(conferinţa, 1 oră)' ; în a treia se cere definirea propoziţiei 'distanţa(pom1,pom2, 15m)' ; în a patra se cere definirea propoziţiei 'mai_dur(cuarţ, plumb) ; în a cincea definiţie se cere definirea unui predicat metateoretic de forma' valid(F)' etc. .

Şi în definiţiile operaţionale intervine simbolul $=_{df}$ sau $\equiv$ relaţia de echireferenţialitate între termenul de definit şi expresia definitoare. Dar aceasta nu mai leagă expresii de acelaşi fel. Termenul de definit aparţine teoriei, în timp ce expresia definitoare aparţine domeniului praxiologiei, teoriei experimentelor sau măsurătorilor, unor procedee logico-sintactice.

Definiţiile operaţionale pot fi explicate dintr-o perspectivă semiotico-praxiologică.

16.2 *O perspectivă semiotico-acţionalistă asupra definiţiilor operaţionale*

Definiţia 8. Spunem că un agent h1 *defineşte operaţional, într-o structură SD*

SD = [h1, h2, Sit, L, At, Lh1, Lh2, Dfd, Dfn, Dom, sem(F), cun(H, F), în, O, ab, Rez] (vezi cap 11) *un termen P*, unde $\delta(P) = n$ pentru un agent h2, dacă şi numai dacă:

1. semnificaţia simbolurilor *h1, h2, Sit, L, At, Lh1, Lh2, Dfd, Dfn, Dom, sem(F), cun(H, F), este cea introdusă în cap 11;*

2. *agenţii h1 şi h2 se află în situaţia Sit1, i e.*
   în(h1, Sit)

Universitatea Spiru Haret

în(h2, Sit)
în([x1, x2, ...,xn], Sit1)
în(y, Sit2)

3. *O este o mulţime de operaţii definite pe* Dom^n *cu valori în Dom, i.e.*
   o: $Dom^n \alpha Dom$,
   respectiv: *o(x1, x2,. .. xn) = y;*
4. *cun(h1, o);*
5. *ab este un predicat de două argumente astfel că are loc:*
   ab(h1, o) ;
   care se citeşte: „agentul h1 este apt să execute operaţia o";
6. $P(x1,x2,. .. ,xn, y) =_{df} o(x1, x2,. .. xn) = y \wedge Q(y)$

unde P(x1,x2,. .. ,xn, y) este termenul de definit şi Q(y) este un descriptor sau un epitet din mulţimea rezultatelor Rez.

Observaţii

Obs.1. Definiţiile operaţionale sunt definiţii ce transcend nivelul lexical; ele condiţionează un act semantic, cum ar fi adevărul unui enunţ sau realizarea unui predicat, de rezultatele unor operaţii fizice, tehnice sau sintactic-calculatorii. Ele leagă semantica de praxiologie sau de teoria activităţilor umane.

Obs.2. Definiţiile operaţionale presupun abilităţi sau competenţe operaţionale ale agenţilor participanţi la instituirea convenţiilor semantice. Dar abilităţile sunt capacităţi de a face sau executa ceva; ele ţin de domeniul posibilului acţional, care angajează o categorie specială de operatori modali.

Obs.3 Definiţiile operaţionale dau seama şi de aşa numiţii termeni dispoziţionali, cum ar fi termenii: 'inflamabil(x)', 'sancţionabil(x)', 'rentabil(x), etc. ;

Obs.4 Definiţiile operaţionale reclamă o viziune dinamică asupra lumii. Ele presupun stări şi momente diferite ale sistemului lumii între care au loc tranziţii, imaginate şi executate de către fiinţa umană ca agent al actelor de conduită şi ca agent al actelor de asertare şi de legiferare a convenţiilor semantice. Pe acest temei am şi introdus explicit cel puţin două situaţii acţionale, *Sit1* şi *Sit2*

Obs.5 Definiţiile operaţionale pot fi clasificate relevant după natura operaţiilor ce intervin în desfăşurarea lor. Astfel, vom avea definiţii operaţionale care angajează operaţii fizic-experimentale, teste sau experimente chimice sau biologice, secvenţe de operaţii tehnice, operaţii sintactic calculatorii.

Universitatea Spiru Haret

Obs.6 În condiţia 6 de mai sus *P(x1, x2,. .., xn)* aparţine domeniului semnelor lingvistice şi este un predicat sau o propoziţie, în timp ce *o(x1, x2,. .. xn)* vizează o operaţie de n argumente ce ţine de domeniul acţiunilor umane. Variabila *y* descrie rezultatul acţiunii şi despre acesta se afirmă că este caracterizat de proprietatea *Q*. Deţinerea proprietăţii *Q* de către *y*, rezultatul operaţiei *o,* este o condiţie suficientă pentru a se putea afirma despre n-tuplu *(x1,x2,. . ., xn)* că are proprietatea *P*.

Componenta pragmatică a definiţiilor operaţionale este vizibilă şi pregnantă. Agenţii execută operaţii sau cel puţin imaginează operaţii şi propun reguli sau convenţii de utilizare a termenilor dintr-un limbaj ştiinţific în funcţie de rezultatele sau stările finale care se obţin prin aplicarea sau execuţia efectivă a operaţiilor, procedurilor sau strategiilor preconizate.

16.3 *Definiţiile operaţionale şi schemele de inferenţa*

Să presupunem că δ(P)=1, respectiv că termenul de definit este un predicat monadic şi, de asemenea, δ(o)=1. Admitem că x este obiectul testat pentru a vedea dacă lui i se poate aplica predicatul P.

Atunci demersul unei definiţii operaţionale poate fi descris prin următorii 4 paşi:

1. descrierea situaţiei iniţiale în care se găsesc obiectul x şi agenţii h1 şi h2;
2. executarea unei operaţii de testare asupra obiectului x;
3. verificarea dacă rezultatul operaţiei satisface criteriu q;
4. atribuirea obiectului x a predicatului p, dacă rezultatul operaţiei satisface criteriu q.

Succesiunea acestor paşi poate fi redată sub forma unei Reguli de Introducere a unei Definiţii Operaţionale (RIDO):

1. *în(h1, sit1;în(h2, sit1;în(x, sit1).*
2. *do(h1,x, o, y).* *(RIDO)*
3. *q(y,sit2).*

---

4. *p(x).*

Formula RIDO de mai sus descrie totodată o schemă de inferenţă a definiţiilor operaţionale. Cifrele 1-4 descriu principalii paşi ai introducerii unei definiţii operaţionale.

Schema de inferenţă RIDO ne conduce direct la formularea unei instrucţiuni Prolog, apte de a descrie exigenţele unei definiţii operaţionale.

p(x) :- în(h1, sit1), in(h2, sit1), în(x, sit1),
do(h1,x, o, y),q(y, sit2). (IP)

Universitatea Spiru Haret

Obiectul *x* are proprietatea *p*, dacă agenţi *h1, h2* şi obiectul *x* se află în situaţia *sit1,* agentul *h1* execută asupra obiectului *x* operaţia *o* cu rezultatul *y* ce are proprietatea *q* în noua situaţie *sit2.*

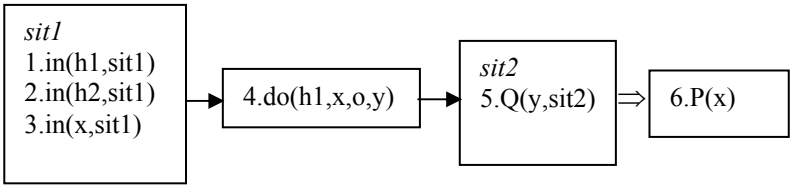


Fig. 2. *Reprezentarea grafică a definiţiilor operaţionale*

Definiţiile operaţionale leagă evenimente, acţiuni, fapte şi reguli care au statuturi ontologice, praxiologice şi cognitive diferite. Mai întâi ele, identifică cel puţin 2 stări fizice sau social-epistemice diferite: *sit1* şi *sit2* .Fiecare dintre stări sunt descrise de un număr de propoziţii sau predicate diferite, care, în fig2 au fost scrise înlăuntrul dreptunghiului ce conturează starea.

Propoziţia 4 descrie un act sau o execuţie a unei operaţii sau secvenţă de operaţii sau un program.

Propoziţia 5. descrie un atribut sau o notă definitorie a rezultatului acţiunii sau operaţiei o.

Propoziţia 6 descrie termenul de definit.

Întreaga figură reprezintă grafic regula definiţiilor operaţionale, care sună astfel:

Dacă agenţii *h1, h2* şi obiectul *x* se află în *sit1* şi *h1* execută asupra obiectului *x* operaţia *o* şi prin aceasta se ajunge la un rezultat *y* care are proprietatea *Q*, i.e. obţinem *Q(y,sit2)*, atunci obiectul *x* are proprietatea *P,* i.e. putem aserta *P(x).*

De regulă *Q* este o proprietate observabilă şi serveşte drept criteriu pentru asertarea unei proprietăţii teoretice.

Particularitatea definiţiilor operaţionale rezidă în faptul că ele instituie reguli sau criterii prin care anumite decizii de ordin semantic sunt condiţionate de rezultatele unor experimente, teste, măsurători sau calcule. Pe această cale, valoarea de adevăr a unei propoziţii devine dependentă de rezultatele unor conduite practice. Teoria definiţiilor operaţionale ţine, deopotrivă, de semantica logică şi de praxiologie sau de teoria acţiunii; ea leagă semantica de teoria acţiunii.

Universitatea Spiru Haret

O a doua notă caracteristică a definiţiilor operaţionale este conectarea termenilor observaţionali, cum sunt Q(y,sit2), menţionat mai sus, de termenii teoretici, ce apar în axiome sau în teoremele derivate din acestea. Un astfel de termen teoretic este redat în exemplul de mai sus de predicatul P(x).

În sfârşit, spre deosebire de definiţiile explicite, lexicale sau stipulative, definiţiile operaţionale sunt creative. Ele extind aria termenilor primitivi dintr-o teorie, adăugând la aceştia termenii observaţionali utilizaţi în definitorii definiţiilor operaţionale introduse. În consecinţă, ele nu satisfac cerinţa noncreativităţii.

Teoria definiţiilor operaţionale angajează, deopotrivă, dimensiunea pragmatică a limbajului ştiinţelor, căci aici intervin agenţi epistemici, dar şi agenţii autori ai unor experienţe sau măsurători, după cum intervin în mod necesar două sau mai multe situaţii acţionale.

Definiţiile operaţionale pot fi privite şi ca o cale de desubiectivizare a termenilor sau conceptelor introduse într-o teorie ştiinţifică prin apelul la operaţii, experimente sau măsurători.

Definiţiile operaţionale pot fi utilizate în sistemele expert, în sisteme tehnice de automatizare, în sisteme cu agenţi soft sau hard.

O ultimă remarcă la nivelul unui subiect de teză de doctorat: Logica dinamică şi teoria definiţiilor operaţionale. Sugerăm prin aceasta ideea că teoria definiţiilor operaţionale poate fi regândită în termenii logicii dinamice. Un predicat P este definit operaţional într-o situaţie w0, dacă şi numai dacă, există un operator modal dinamic [π] aplicabil în w0, astfel încât în starea finală atinsă după executarea programului π, în starea w1, să fie satisfăcut un criteriu Q(y, w1) care atrage după sine predicatul P sau chiar în w1 să devină adevărat predicatul P.

Regândirea teoriei definiţiilor operaţionale în contextul unor situaţii iniţiale şi al unor procese tehnologice în care se fac teste, măsurători şi se are în vedere satisfacerea unor condiţii de ieşire ar putea duce la aplicaţii interesante ale definiţiilor operaţionale, mai ales dacă ţinem seama că acestea pot fi descrise prin instrucţiuni de programare logică.

16.4. *Agenţi, operaţii şi abilităţi*

Fiinţa umană intervine în activitatea de definire operaţională, deopotrivă, ca agent al activităţilor practice şi ca subiect epistemic. Considerând o mulţime de agenţi H (de la Human beings) şi o mulţime de operaţii Op putem defini abilităţile unui agent şi mulţimea executanţilor apţi de a executa o anumită operaţie sau o mulţime de operaţii.

Universitatea Spiru Haret

Fie H = [h1, h2, h3, h4, h5] şi Op = [o1, o2, o3, o4, o5, o6]. Definim noțiunea de *abilitate* a unui agent individual ca fiind mulțimea operațiilor pe care acesta le poate executa.

$ab: H \rightarrow 2^{Op}$

$ab(h) = \{ o \in Op: M^a (h, o) \}$ *(15.4.1)*

unde M^a (h, o) se citeşte: „Agentul h este apt să execute operația o „sau „deține abilitatea de a face operația o". La fel putem defini, pentru orice operație, mulțimea agenților apți sau capabili de a o executa.

$exec: Op \rightarrow 2^H$

$exec(o) = \{h \in H \mid M^a (h, o)\}$ *(15.4.2)*

Funcția *exec(o)* asociază fiecărei operații mulțimea agenților ce o ştiu şi pot executa. Cele două concepte definite mai sus devin intuitive de îndată ce le vom reprezenta printr-o matrice sau o diagramă.

Op\ H	h1	h2	h3	h4	h5
o1	0	1	1	0	0
02	1	0	1	1	0
o3	1	1	0	0	1
o4	0	1	0	1	1
o5	1	0	1	1	0
o6	0	0	0	0	1

Tabel 2. *Reprezentarea abilităților agenților şi a executanților unor operații*

Este uşor de observat că abilitatea agentului *h1, ab(h1)= {o2, o3, o5},* respectiv vor fi satisfăcute propozițiile: M^a *(h1, o2),* M^a *(h1, o3),* M^a *(h1, o5).* De-a lungul anilor am dezvoltat mai multe sisteme de logica modalităților acționale[vezi în acest sens: *Modalități praxiologice*, Revista de Filozofie, Tom XXII,nr.6,1976, p.694-to5; *Logica modalităților acționale*, în *Logica acțiunii. Studii*, Editura Ştiințifică Bucureşti, 1983, p.5-48; *The Logic of Operational Modalities and Artificial Intelligence*, Rev. Roum. des Sc. Soc. serie de Ph. et Log. Tome 29, nr. 3-4 iul-dec 1985 p.243-253; *Operațional Modal Logic.The system MO1*, Rev. Roum. des Sc. Social. serie de Ph. et Log, Tome 30, nr 3-4, 1986, p. 87- 108].

Abilitatea sau competența executivă asociază unui agent mulțimea operațiilor pe care le ştie sau poate executa acesta. Dimpotrivă, funcția executanți, notată *exec(o),* asociază unei operații mulțimea agenților apți sau capabili să o execute. Din Tabelul 1 putem vedea că agenții apți de a executa operația o5, respectiv *exec(o5) = {h1, h3, h4}.*

Universitatea Spiru Haret

În studiul nostru, scris în colaborare cu prof. univ. ing. dr. Adina Magda Florea, *Human Action, Automata and Prolog* [61] am descris conceptul de abilitate în cadrul teoriei automatelor nedeterministe şi al unor programe de logica acțiunii scrise în Prolog.

16.5. *Obiecte, operații, domeniu de aplicare al unei operații şi deschidere operațională a unui obiect*

Într-un mod analog, putem studia raporturile dintre mulțimea obiectelor şi mulțimea operațiilor prin care pot fi testate acele obiecte.

Fie mulțimea obiectelor Ob = {x1, x2, x3, x4, x5} şi mulțimea operațiilor Op = {o1, o2, o3, o4, o5, o6}. Putem acum defini noțiunea de *deschidere operațională* a unui obiect ca mulțimea operațiilor aplicabile la acel obiect.

$deso: Ob \rightarrow 2^{Op}$

$deso(x) = \{o \in \mathrm{Op}: \exists \mathrm{r}(\mathrm{o}(\mathrm{x}) = \mathrm{r}\}$ (15.5.1)

Analog putem defini mulțimea rezultatelor sau stărilor accesibile de la obiectul x:

$s\_acces(x) = \{r \in S: \exists\, o \in Op \ \wedge o(x)=r\}$ *(15.5.2)*

unde *S* este mulțimea stărilor în care pot trece obiectele *Ob* prin operațiile *Op.*

Analog, noțiunii de deschidere operațională a unui obiect putem defini noțiunea de domeniu de aplicație al unei operații. Numim domeniu de aplicație al operației o o mulțime de obiecte din Ob la care se aplică operația o.

$apl: Op \rightarrow 2^{Ob}$

$apl(o) = \{ \mathrm{x} \in \mathrm{Ob}: \exists \mathrm{r}(\mathrm{o}(\mathrm{x}) = \mathrm{r})\}$ *(15.5.3)*

Noțiunile de deschidere operațională a unui obiect, *deso(x)* şi de domeniu de aplicație al unei operații, *apl(o)* pot fi redate cu ajutorul unor matrici sau tabele.

Op\Ob	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*
o1	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
o2	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
o3	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*
o4	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
o5	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*
o6	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

Tabelul 3. *Reprezentarea deschiderilor operaționale ale unor obiecte şi a domeniilor de aplicație ale unor operații*

Universitatea Spiru Haret

Tabelul 3 ne arată că deso(x2) = {o2, o4, o5}, cea ce înseamnă ca asupra obiectului x2 se pot aplica operaţiile o2, o4, şi o5. Deschiderea operaţională a obiectului x5 este mulţimea vidă. Altfel spus, obiectul x5 este *operaţional opac.* Formal, vom numi un *obiect operaţional opac* dacă asupra lui nu putem acţiona cu nici o operaţie, cel puţin în acele circumstanţe şi în acel moment istoric.

15.5.4 $op\_opac(x) =_{df} deso(x) = \varnothing$

În mod analog, vom numi o *operaţie vidă,* dacă ea nu este aplicabilă nici unui obiect din domeniul de obiecte considerate. Aşa de exemplu, $deso(o6) = \varnothing$, căci, potrivit Tabelului 2, operaţia o6 nu se aplică nici unui obiect *x* din mulţimea *Ob*.

În paragrafele 15.4 şi 15.5 am definit conceptele de abilitate a unui agent (*ab(h)*), executanţi ai unei operaţii (*exec(o)*), deschidere operaţională a unui obiect (*deso(x)*), stări sau rezultate accesibile(s_*acces(x)*) şi domeniu de aplicaţie al unei operaţii (*apl(o)*). Aceste concepte ne vor servi ca puncte de sprijin pentru o nouă perspectivă asupra definiţiilor operaţionale.

16.6 *Abilităţi, deschideri operaţionale şi definiţii operaţionale*

Înainte de a trece la prezentarea noii tentative, credem oportun să evidenţiem la ce anume întrebări relevante răspund conceptele definite mai sus şi cum se leagă ele de teoria definiţiilor operaţionale.

Funcţia abilitate *ab(h1)* răspunde la întrebarea: „Ce operaţii ştie şi poate executa agentul h1 ce introduce definiţia operaţională ?”

Funcţia *deso(x)* răspunde la întrebarea: „Ce operaţii se pot aplica asupra obiectului x aflat în situaţia sit ?”

Funcţia *s_acces(x)* răspunde la întrebarea: „La ce rezultat conduce aplicarea operaţiei o asupra obiectului x ?”

Funcţia *exec(o)* ne informează: „Cine poate executa o anumită operaţie?”

Este evident că, pentru elaborarea unei teorii despre definiţiile operaţionale, interesează faptul dacă există sau nu o intersecţie între ceea ce ştie să facă agentul h şi operaţiile ce pot fi efectuate asupra obiectului supus testării în situaţia *sit1*. În plus, ne interesează dacă operaţia aplicată de un agent asupra unui obiect x conduce la un rezultat din sit2 care satisface o proprietate Q. În termenii definiţi mai sus, este important să ştim dacă, $ab(h1) \cap deso(x) \neq \varnothing$.

Pe de altă parte, este important să putem da seama în teoria noastră de schimbarea sau tranziţia ce o impune realităţii executarea

Universitatea Spiru Haret

de către agentul h1 a operației o, respectiv de schimbarea stării dispozitivului sau montajului experimental, de schimbarea stărilor sistemului socio-uman sau de schimbarea stărilor interne ale sistemului de calcul. În acest moment intervine funcția *s_acces(x)* care ne duce de la o stare inițială sit1 la o stare sit2 în care apare rezultatul r.

Important de reținut este faptul că rezultatul r obținut prin acționarea asupra lui x trebuie să aibă proprietăți observabile, *Q(r)*, care servesc în montajul considerat drept indiciu sau criteriu al îndreptățirii aplicării predicatului teoretic sau dispozițional *P(x),* aflat pe post de termen de definit.

Decizia asupra oportunității aplicării predicatului *P* asupra obiectului x în sit1 se ia postum, în *sit2*, ținând seama de comportarea sistemului după acționarea asupra lui prin operația *o* şi de proprietățile stării rezultat *r*, de faptul dacă aceasta satisface sau nu predicatul observațional *Q* .

Definiția 9. *Fiind date obiectele Ob, agenții H, şi operațiile Op, precum şi definițiile introduse mai sus pentru funcțiile ab, deso, s_acces, spunem că agentul h1 defineşte operațional în situația sit1 pentru agentul h2 predicatul teoretic P, dacă şi numai dacă:*

1. *în (h1,sit1)*
2. *în (h2, sit1)*
3. *în (x, sit1)* $\wedge$ $x \in Ob$
4. $\exists o \in (deso(x) \cap ab(h1))$
5. *do(h1, x, o, r)*
6. $r \in s\_acces(x)$.
7. *în(r, sit2)*
8. *Q(r)*
9. $Q \in A^o$

unde A^o este o mulțime de termeni observaționali.

Predicatul *do(h1, x, o, r)* se citeşte: „Agentul *h1* execută asupra obiectului *x* operația *o* cu rezultatul *r*".

Predicatul *do(h1, x, o, r)* este analizabil cu ajutorul conceptelor primitive admise în limbajul definit, căci *o(x) = r* exprimă faptul că executând asupra obiectului *x* operația *o* se ajunge la rezultatul *r*, ce aparține lui *s_acces(x*). Cum, însă, operația *o* aparține, deopotrivă, deschiderii operaționale a lui *x* şi abilităților agentului *h1*(vezi restricția 4), rezultă ca agentul *h1* poate executa această operație. Din restricțiile 1 şi 3 rezultă că agentul *h1* şi are prilejul de a executa operația *o*.

Universitatea Spiru Haret

Definițiile 8 şi 9 propuse pentru caracterizarea demersului definițiilor operaționale sunt, în liniile lor mari, dominate de aceeaşi filozofie subiacentă. Ambele adoptă o perspectivă semiotico-paxiologică; ambele includ un moment experimental sau acțional; ambele presupun tranziții şi situații diferite; ambele presupun termeni sau descriptori observaționali, pe care se sprijină introducerea termenilor teoretici sau dispoziționali. Definiția 9 amănunțeşte descrierea raporturilor dintre obiecte şi operații şi a raporturilor dintre operații şi agenți şi menționează în mod explicit nevoia existenței unei intersecții între abilitățile agenților şi deschiderea operaționala a obiectelor de referință.

17. **Definițiile lexicale şi definițiile stipulative**

Definițiile lexicale preexistă naşterii unui vorbitor al unei limbi. Ele sunt o creație istorică a membrilor unei comunități. Învățăm fiecare limba maternă în procesul acomodării noastre la mediul natural şi social, prin exerciții de producere a sunetelor şi de captare prin context şi utilizare a semnificație cuvintelor pronunțate. Învățarea limbi este legată de ceea ce noi am numit odinioară cunoaştere ostensivă.[Cornel Popa,*Teoria cunoaşterii*, Editura Ştiințifică,1972, p.30-45; *Teoria definiției*, Editura Ştiințifică, 1972, p.104-125]

Definițiile stipulative sunt inițiative semantice ale unor autori individuali care propun fie restricții şi modificări ale uzanțelor unor termeni, fie crearea de termeni noi necesari pentru o regândire teoretică a unor construcții teoretice sau a terminologiei unor câmpuri de activități umane.

17.1 *Definițiile lexicale*

Definițiile lexicale sunt, de regulă, opera lingviştilor specialişti în limba lor maternă. Ei consemnează cu minuțiozitate sensurile pe care le are un termen în limba de referință; consemnează sensurile *arhaice,* se pronunță asupra originii termenului. La noi ne informează asupra faptului dacă termenul provine din latină, dacă e un franțuzism, dacă e de origine slavonă, germană, maghiară sau turcă. Ne informează dacă termenul reprezintă un provincialism şi anume din ce provincie.

Definițiile lexicale ne informează ce rol joacă cuvântul în cauză din punct de vedere morfologic, ce parte de vorbire este şi ce funcții gramaticale poate îndeplini.

Universitatea Spiru Haret

Definiţiile lexicale sunt consemnări de reguli semantice acreditate într-o limbă naturală într-o anume perioadă istorică. De regulă, autorii acestor definiţii de dicţionar explicativ al unei limbi se folosesc de autoritatea unor scriitori clasici, recunoscuţi de specialişti ca buni vorbitori ai limbii în cauză. Menirea unor astfel de definiţii lexicale este de a-i învăţa pe vorbitorii acelei limbi, pe tineri şi pe străini, proprietatea cuvintelor, sensul exact, propriu al acestora, în diferite clase de contexte acţionale sau discursive.

De multe ori unul şi acelaşi termen de definit Dfd are un mănunchi de semnificaţii înrudite sau analoage, explicate prin definitoare diferite:

1. Dfd $term_1$ $=_{df}$ $Dfnterm_1$
2. Dfd $term_2$ $=_{df}$ $Dfnterm_2$

…….

3. Dfd $term_n$ $=_{df}$ $Dfnterm_n$

În limbile naturale intervin adeseori raporturi de *omonimie*. Sensuri şi concepte diferite sunt adăpostite sau strânse sub umbrela aceluiaşi termen lingvistic, tot aşa cum mai multe păsări îşi pot avea cuibul în acelaşi copac. Cuvântul „brâu" citat la începutul capitolului în paragraful „Exemple de definiţii" descrie o ambiguitate lingvistică din limba română. Acelaşi termen acoperă un mănunchi de semnificaţii toate legate între ele printr-o comparaţie sau raţionament prin analogie şi având un nucleu semantic unic.

Este uşor de observat că omonimia cuvântului 'brâu' este de alt fel decât omonimia cuvântului 'vie'.

În primul caz avem un miez semantic comun un obiect alungit, eventual circular, înfăşurat cu desene, încrustări, sau o formă de prindere de brâu a unor dansatori etc. În cel de al doilea caz în cazul termenului vehicul 'vie' suntem în faţa unei etichete sonore sau scrise lipite peste entităţi complet diferite.

În propoziţia 'Mama mea e vie_1, eu i-am spus să vie_2 pân' la noi la vie_3' cele trei apariţii ale termenului 'vie' sunt din punct de vedere fonetic şi grafic identice, dar fiecare apariţie a cuvântului 'vie' ca succesiune de sunete sau litere scrise în acelaşi fel are o semnificaţie distinctă, cu funcţii sintactice şi morfologice diferite.

O astfel de expresie e probabil intraductibilă dintr-o limbă în alta, deşi fiecare limbă naturală are multe astfel de jocuri de cuvinte, dar rareori acestea sunt traductibile strict, prin trecerea de la o limbă la alta.

Definiţiile lexicale sunt descrieri de sensuri instituite prin timp şi cutumă în limbile naturale. Ele sunt un fel de procese verbale de constatare a practicii sau uzanţelor lingvistice şi nu legiferări de reguli de

Universitatea Spiru Haret

utilizare a unor cuvinte. Ele nu ne obligă să utilizăm un termen numai într-o accepție sau alta; ele ne spun cum au făcut-o şi cum o fac conaționali sau ceilalți vorbitori ai limbii în cauză.

Termenii în limbile naturale sunt adesea ambigui şi circulari.

Pentru a convinge pe cititorul nostru de afirmația că definițiile în limbile naturale sunt circulare îi propunem următorul experiment: să ia un dicționar explicativ al limbii române sau al limbii engleze şi să procedeze în felul următor. Să aleagă la întâmplare un prim termen de definit, term1. Să aleagă apoi din explicația sau definitorul acestuia prin care se explică term1 un alt termen term2 şi să-i caute şi acestuia, la litera corespunzătoare, explicația prin alte cuvinte term3, term 4. Să repete acest joc de mai multe ori şi apoi să caute după câți astfel de paşi se ajunge să se folosească într-un definitor un cuvânt apărut anterior pe post de termen de definit. Toate aceste tentative duc, în ultimă instanță, la explicarea unui termen prin el însuşi !. Ele diferă doar după numărul paşilor după care se închide un cerc sau altul. Vom avea deci, cercuri de diametre diferite. Definițiile lexicale nu satisfac condiția de asimetrie. Pentru ele nu este adevărat că dacă termenul x1 se defineşte prin x2, x2 prin x3… xn-1 prin xn, atunci în definiția lui xn nu s-ar putea să apară vreunul dintre termenii anterior definiți. Nici o limbă naturală nu specifică nişte termeni primitivi, cum se întâmplă în definițiile introduse în teoriile matematice axiomatizate. Nici o limbă naturală nu e construită de către un singur agent sub forma unei teorii ştiințifice şi apoi adoptată prin vot de către toți ceilalți vorbitori.

17.2. *Definițiile stipulative*

Spre deosebire de definițiile lexicale care sunt descrieri de convenții lexicale preexistente, lexicograful nefăcând altceva decât să le descrie cât mai exact şi să le clasifice, să le ilustreze, definițiile stipulative sunt *norme de instituire* a unor noi convenții de utilizare a unor termeni propuse de un autor determinat dintr-o disciplină ştiințifică, domeniu administrativ sau profesie tehnică în scopul dezambiguizării unui limbaj specializat pentru rezolvarea unor clase de probleme de drept, ştiințe tehnice, medicale, comunicații etc. .

Aceste norme sunt propuse de un autor, care se obligă în primul rând pe el însuşi să folosească o listă de termeni cu sensuri speciale, de regulă mai restrânse decât cele existente în limba naturală. Foarte adesea autorul în cauză introduce un termen nou, inedit pentru un concept propus de el.

Această multiplicare artificială a termenilor unor discipline ştiințifice trebuie judecată sever, curățată cu briciul lui Occam, astfel încât

Universitatea Spiru Haret

această introducere a unor termeni să sporească eficienţa construcţiilor teoretice, fără a încărca şi înnoda inutil minţile oamenilor.

Termenii 'furt', 'tâlhărie', 'adulter', 'bigam' etc., definiţi anterior în exemplele de argumentare juridică sunt toţi redaţi prin definiţii stipulative luate din Codul Penal Român şi rostul lor este de a distinge diferite clase de conduite infracţionale şi de a le asocia acestora calificări juridice diferite şi pedepse diferite.

Definiţiile stipulative juridice fac parte din sistemele de norme în cauză şi devin publice şi criterii obligatorii de evaluare a conduitelor unor agenţi.

La fel standardele tehnice, medicale etc. devin reglementări ale activităţii unor clase de indivizi dintr-o profesie dată.

Este uşor de observat că definiţiile stipulative sunt legate de reglementarea activităţilor umane. Normele de utilizare a termenilor propuse de autorii definiţiilor stipulative ţintesc la uniformizarea şi unificarea limbajului într-o profesie pentru a face sensul termenilor utilizaţi mai precis, pentru a identifica obiectele, stările şi proprietăţile acestora. Mai mult aceste descripţii urmăresc ameliorarea evaluărilor, declanşarea la timp şi adecvat a conduitelor cerute de situaţie.

Ţinem să atragem atenţia asupra rolului definiţiilor stipulative în activităţile medicale, în diagnoza şi tratamentul bolilor, în transportul feroviar, naval şi aerian, în regulamentele şi activităţile militare.

Este important să observăm că aceste definiţii stipulative introduc clase de echivalenţe pe mulţimea activităţilor umane, definesc adesea structuri de latici sau arbori şi pot fi redate prin propoziţii condiţionale cu cuantificatori universali şi prin instrucţiuni Prolog.

Sugerăm studenţilor noştri să cerceteze din perspectiva teoriei definiţiilor stipulative legea învăţământului, reglementările recente privind obţinerea de credite, precum şi reglementările de conduită în instituţiile publice, circulaţia pe drumurile publice etc. Aceiaşi recomandare o facem în privinţa studierii codului eticii profesionale în profesiunea de ziarist.

17.3. *Raporturile dintre definiţiile stipulative şi cele lexicale*

Definiţiile stipulative pot fi privite ca selecţii de sensuri dintre cele create de utilizatorii limbilor naturale, căci şi persoanele ce introduc definiţii stipulative sunt vorbitori de limbi naturale. În aceste cazuri autorul unei definiţii stipulative alege unul dintre sensurile multiple ale unui termen cu intenţia de a face limbajul mai precis, chiar univoc. Vom numi acest fel de *definiţii stipulative de precizare*.

Universitatea Spiru Haret

Dacă vom considera limba naturală ca un fluviu cu mai multe ramificații, ramificațiile fiind sensurile multiple, atunci opera autorului unei definiții stipulative de precizare poată fi comparată cu opera unui inginer de hidroameliorațiuni ce blochează prin baraje unele brațe secundare, încercând să adâncească brațul principal.

Lexicograful ce propune o definiție stipulativă de precizare încearcă o reglementare parțială a sensurilor unui termen, încurajând o accepție existentă în limbă şi discurajând accepțiile celelalte. Dar nimeni nu este autoritate supremă într-o limbă naturală, nici chiar institutul de specialitate al unei academii. Acesta propune, dar vorbitorii dispun.

Sunt definiții stipulative introduse de grupuri profesionale care impun şi standardizează accepțiile pe care trebuie să le aibă un termen tehnic într-o profesiune. Revistele de specialitate îndeplinesc în realitate şi funcția de standardizare şi uniformizare a terminologiei dintr-o profesie. Fiecare limbaj de programare are şi o listă de termeni specifici care precizează ce efecte au diferite comenzi, cum se poate atinge un anumit obiectiv. Acest grup de definiții sunt pe de o parte definiții stipulative şi totodată definiții operaționale, care ne spun cum pot fi efectuate anumite sarcini

Sunt însă definiții stipulative de autor. Un filosof sau un literat într-un eseu poate propune un sens personal pentru un termen. Mai mult, foarte adesea unii autori nu se arată de loc preocupați de precizarea accepțiilor pe care le dau unor termeni. Pur şi simplu fac uz de ele şi lasă pe seama cititorului efortul de a-i ghici accepțiile speciale pe care le dă el unor termeni din limba naturală. Putem considera un text scris de un autor ca o manieră de a defini implicit, prin utilizare, semnificația pe care acesta o acordă termenilor. În acest caz, nişte texte mai extinse servesc de *definiții implicite* pe care un cititor inteligent le poate descoperi, prin efort propriu, în țesătura textului scris.

Exegeza atentă a textelor unor filosofi din aceiaşi şcoală sau din şcoli diferite poate contribui la rafinarea intelectuală a unui autor care le studiază opera, la dezvoltarea propriului său limbaj. Bufon spunea că Le style ce l'homme même. Vorbirea unui individ spune multe despre educația şi profesia sa, despre gusturile şi atitudinile sale, despre dominantele sale comportamentale.

După criteriul şi numărul agenților care le introduc, definițiile stipulative pot fi *de grup* profesional şi *personale* sau *de autor*.

După amploarea îndepărtării lor de uzanța instituită în limbile naturale, definițiile stipulative pot fi *de selecție* sau *precizare* a semnificației

Universitatea Spiru Haret

unui termen şi novatoare sau de introducere a unor sensuri noi. Definiţiile de autor sunt, de regulă, novatoare şi au, în principal, funcţia de a propune, în serios sau în glumă, accepţii noi unui termen. Într-o perioadă sau alta a vieţii mele de dascăl, educator şi publicist am propus termenului 'cap' mai multe definiţii stipulative pe care le reproduc mai jos:

D1. Capul este cel de al treilea picior în jocul de fotbal.

D2. Capul este un suport pentru pălărie.

D3. Capul este un ideator sau maşinăria care produce ideile.

D4. Capul este extremitatea superioară acoperită de păr sau de chelie.

D5. Capul este colivia cu sticleţi pe care o deţine orice individ.

Aceste exemple arată că definiţiile stipulative ţin, în mod hotărâtor, de *ideolectul* şi *personalitatea* agentului ce le introduce. Definiţiile de mai sus au toate o meteahnă, nu folosesc limba la propriu, fac uz de comparaţii şi metafore. Ele ţin mai degrabă de teoria stilului şi nu de ştiinţa logicii, dar satisfac un număr de cerinţe serioase ale oricăror definiţii stipulative, propun accepţii distincte pentru anumiţi termeni, dau explicaţii singulare şi plauzibile unor termeni.

Definiţiile capului propuse de noi mai sus sunt în fapt o pledoarie pentru funcţiile autentice ale capului şi intelectului uman şi o formă de protest faţă de subaprecierea funcţiilor gândirii şi creativităţii umane în societatea românească în tranziţie, faţă de căderea în derizoriu. Admitem, deci, că chiar şi operaţia de definire poate fi o figură de stil, o respingere a decăderii şi grotescului.

Definiţiile stipulative ţin de teoria stilului şi a ideolectelor şi sunt, din nefericire, ignorate, deopotrivă de logicieni şi lingvişti, de critici literari şi esteticieni.

Teoria definiţiilor nu trebuie, nici într-un caz, ruptă de teoria limbajului natural sau artificial în care sunt propuse acestea, de funcţiile definiţiilor într-un sistem axiomatic, într-o bază de cunoştinţe, într-o teorie ştiinţifică, într-un text de lege sau într-un articol de ziar.

Definiţiile sunt, într-un fel, reglementări semantic normative şi operaţii prin care construim limbaje specializate pentru diferite profesiuni şi activităţi umane. Ele ţin de teoria comunicării dintre agenţi şi de teoria limbajelor naturale şi specializate.

Definiţiile sunt, totodată, verigi importante în tehnicile de prelucrare a informaţiei, căci ele înlesnesc inferenţa sau deducţia, permit aplicarea regulii substituirii echivalentelor şi reducerea unui termen definit sau derivat la termenii primitivi în sistem.

Universitatea Spiru Haret

Într-un sistem teoretic definițiile pot fi folosite *Top Down* sau *reductiv*, de la termenii derivați spre atomi, de la termeni de definit sau Dfd la expresiile definitoare sau Dfn, cale pe care coborâm de la complex la elementar sau la atomi primitivi sau *Bottom Up*, de jos în sus, de la elementar la complex, când prescurtăm anumite agregări semantice printr-un termen tehnic special propus de noi sau măcar recapitulat de noi.

Definițiile sunt mijloace de analiză şi sinteză în cadrul unor structuri teoretice de interes cognitiv şi practic operațional.

Logica clasică nu a analizat niciodată definițiile în legătură cu contextul lor teoretic, axiomatic sau cu contextul şi funcțiile lor într-o bază de cunoştințe.

Problematica analizei şi sintezei mijlocită de definiții într-o demonstrație logico-axiomatică este evidențiată între altele de demonstrațiile efectuate prin metoda calculului natural şi prin aplicarea teoremei deducției. Într-o astfel de demonstrație noi utilizăm regulile logice de excludere a conjuncției, disjuncției, a cuantificatorilor existențiali şi universali pentru a accede la termenii primitivi în sistem şi apoi, într-o a doua fază facem uz de regulile inverse de introducere a conjuncției, disjuncției şi a cuantificatorilor. Analiza şi sinteza sunt operații logice extrem de importante în descoperirea demonstrației unei formule sau a unei teoreme.

Teoria definițiilor este întotdeauna o punte de legătură între idiolectele diferiților vorbitori ai unei limbi naturale. Prin definiții explicite, prin definiții ostensive sau de arătare a obiectului denumit printr-un nume comun noi facem pe membrii tineri ai unei comunități să adere şi să folosească convențiile deja instituite ale unei limbi naturale.

Persoana care definește un termen trebuie să explice semnificația termenului nou cu ajutorul termenilor deja asimilați şi înțeleşi de adresantul definiției. Definițiile semantice explicative intervin în învățarea limbii materne şi mai ales în învățarea limbajelor ştiințelor particulare.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 5. **TEORIA CLASIFICĂRII, REZOLUŢIA DUALĂ ŞI BAZELE DE CUNOŞTINŢE**

1. **Introducere**

Teoria clasificării este un capitol tradiţional de logică aristotelică, care, de regulă, este ignorat de tratatele de logică matematică. La fel cum este ignorată teoria definiţiilor. Credem că aceste omisiuni sunt nejustificate, mai ales astăzi când logica tinde să devină o metodologie generală în alcătuirea bazelor de cunoştinţe şi în demonstraţia automatizată.

În capitolul de faţă dorim să regândim dintr-o perspectivă logico-informatică teoria clasificării şi să o corelăm cu analiza şi construcţia bazelor de cunoştinţe şi cu programarea orientată spre obiecte. Credinţa noastră este că teoria clasificării nu se reduce la simpla partiţie de mulţimi, cu toate că orice clasificare defineşte şi o partiţie. Privirea clasificării ca o simplă partiţie de mulţimi ignoră dimensiunea intensională a operaţiei de clasificare. Un obiectiv major al cercetării noastre constă tocmai în punerea în lumină a valorii descriptive şi logic inferenţiale a operaţiilor de divizare şi clasificare şi în corelarea clasificării cu programarea logică, cu teoria formelor normale disjunctive şi cu principiul rezoluţiei duale.

Vom corela, totodată, teoria clasificării cu teoria întrebărilor şi chestionarelor, arătând că operaţia de clasificare presupune explorarea notelor definitorii ale unei clase şi utilizarea operaţiilor de abstractizare şi determinare.

În sfârşit, vom arăta că teoria clasificării este intim legată cu evaluarea activităţilor umane, în principal a rezultatelor acestora.

Momentele principale ale expunerii noastre vor fi: statutul ontologic al operaţiei de clasificare sau răspunsul la întrebarea „Ce clasificăm ?”; definiţia formală a clasificării elementare (cu nivel unic); criteriile, măsurătorile şi definiţiile operaţionale; interpretarea relaţională a clasificărilor elementare; descrierea clasificărilor elementare ca relaţii binare; compunerea clasificărilor elementare şi obţinerea clasificărilor

Universitatea Spiru Haret

complexe, clasificarea multinivelară şi speciile ei; descrierea în Prolog a unor proprietăţi formale ale clasificărilor; diagramele Karnaugh şi teoria clasificării; arborii etichetaţi şi teoria clasificării; proprietăţilor claselor ultime (specia infima) şi formele normale disjunctive; rezoluţia duală şi verificarea corectitudinii formale a clasificării; clasificarea, abstractizarea şi minimizarea, clasificarea şi diviziunea ca mijloace de analiză a bazelor de cunoştinţe; teoria clasificării şi judecăţile de valoare; teoria clasificării şi standardizarea tehnică; analiza, proiectarea şi programarea orientate spre obiecte şi teoria clasificării.

Un concept sau o noţiune are, din punctul nostru de vedere un *nume* exprimat printr-un simbol predicativ de o anume aritate pe care îl vom nota, în acest capitol, prin D şi o *extensiune* (sferă) sau mulţime de obiecte la care se referă, pe care o vom nota prin M şi o *intensiune,* constând dintr-un număr de caracteristici simbolizate prin descriptorii Al,..., Ak, relaţiile dintre acestea fiind redate cu ajutorul conectivelor şi cuantificatorilor logici. În teoria clasificării pe care o dezvoltăm în continuare vom încerca să ţinem seama, deopotrivă, de nume, extensiune şi intensiune şi să desvăluim corelaţiile dintre ele. În plus, credem că elaborarea teoriei clasificării trebuie să se sprijine pe cunoaşterea teoriei definiţiilor explicite sau stipulative şi a rolului lor în construirea unor programe logice.

2. **Ce clasificăm?**

Este clasificarea o teorie a grupării şi ordonării obiectelor din lumea fizică, o teorie a grupării şi ordonării termenilor într-un glosar sau dicţionar enciclopedic sau o teorie a grupării şi ordonării conceptelor sau noţiunilor dintr-o disciplină ştiinţifică?

Prima problemă este, aşadar, la ce nivel situăm actul clasificării şi teoria acestuia, la nivel ontic, la nivel lingvistic sau la nivel conceptual, ideatic ?.

Este mai presus de orice îndoială că în ştiinţele naturii, în fizică, chimie, mineralogie, botanică, zoologie, anatomie etc. clasificările vizează ordonarea şi departajarea diferitelor categorii de obiecte reale şi numai în secundar, delimitări de concepte sau noţiuni.

Pe de altă parte, în ştiinţele analitice, matematice, lingvistică, logică matematică, informatică, drept etc., foarte adesea obiectul clasificării îl constituie conceptele anterior introduse şi mulţimile de obiecte, stări sau acte asociate acestora ca domeniu de interpretare.

Universitatea Spiru Haret

În sfârşit, cum conceptele sunt denumite prin termeni din limbajul ştiinţelor sau din limba naturală, clasificarea poate viza evident şi termenii unui limbaj, inclusiv cuvintele unei limbi naturale.

Multe clasificări vizează obiecte sau stări create prin conduita practică umană. Lumea obiectelor artificiale (tehnice, artistice etc.) face mereu obiectul clasificărilor şi evaluărilor după diferite criterii. În drept şi în morală clasificăm şi evaluăm deopotrivă conduite ale unor agenţi şi stări sau rezultate derivate din acestea. Ştiinţa dreptului este plină de definiţii stipulative care descriu stări sau situaţii derivate din conduitele umane şi care sunt evaluate de legiuitor ca acceptabile sau legale şi stări care sunt evaluate ca inacceptabile. De regulă, cele inacceptabile care prezintă un pericol social sunt interzise, după cum sunt interzise şi unele conduite omisive care au consecinţe sociale inacceptabile.

Adoptând răspunsuri diferite la întrebarea formulată la începutul paragrafului, logicienii şi utilizatorii clasificărilor au adoptat *poziţii realiste,* după care clasificarea se ocupă de repartizarea obiectelor în clase cu proprietăţi identice sau similare, *poziţii nominaliste,* după care clasificarea se ocupă de separarea termenilor în clase distincte şi *poziţii conceptualiste,* după care clasificarea se ocupă de analiza şi ierarhizarea conceptelor.

Fiecare dintre aceste trei soluţii alternative îşi are propria sa raţionalitate. În cele ce urmează ne propunem să dezvoltăm o teorie a clasificării care să ţină, deopotrivă, seama de obiectul de referinţă al clasificărilor, care în ultimă instanţă îl constituie mulţimele de obiecte, dar şi de conţinutul sau intensiunea termenilor ce desemnează mulţimile de obiecte. În ultimă instanţă, teoria clasificării este o teorie a ierarhizării şi ordonării conceptelor dintr-o teorie ştiinţifică sau dintr-un domeniu de activitate social umană.

Clasificarea are, în viziunea noastră, dimensiuni sintactice, semantice şi pragmatice, fiind deopotrivă o operaţie empirico-pragmatică şi conceptual teoretică.

3. **Definiţia clasificării elementare**

Teoria clasificării pe care o dezvoltăm în continuare presupune algebra mulţimilor şi limbajul logicii predicatelor de ordinul întâi. Ea se va sprijini, totodată şi pe unele cunoştinţe de teoria definiţiilor explicite.

Vom introduce, mai întâi definiţia clasificării elementare, respectiv a clasificării cu un singur nivel de subdiviziuni sau clase.

Universitatea Spiru Haret

Definiția l. Numim *clasificare elementară* sau *cu un singur nivel* o structură:

K=(Mo, C, cl)

unde:

l) Mo este *mulțimea de referință* sau *universul discursului*, respectiv obiectele individuale ce trebuie clasificate;

2) C este o mulțime de simboluri predicative ce desemnează criteriile după care se face clasificarea;

3) *cl* este o operație:

$cl: 2^{Mo} \times C \rightarrow (2^{Mo})^n$

respectiv:

a) $cl(Mo,c) = [M1,M2,...Mm]$

ce satisface condițiile:

b) $\bigcup_{i=1}^{i=m} Mi = Mo \qquad 1 \leq i \leq m)$

c) $Mi \cap Mj = \phi \qquad 1 \leq i, j \leq m$

d) $nr\text{-}cl(cl) = card(cls) = m$

4) Apartenența la o clasă este condiționată de satisfacerea unei descripții specifice;

a) $\forall x(Di(x) \rightarrow x \in Mi)$

b) $D_i = f_b(A1,A2,...Ak)$

c) $subcl(Mi,Mo) \rightarrow (int(Mi) \Rightarrow int(Mo))$

5) Intensiunea *clasificandum*-ului este echivalentă cu intersecția intensiunii claselor rezultate, iar acestea sunt intensional disjuncte;

a) $int(Mo) = \bigcap_{i=1}^{i=m} int(Mi) \qquad 1 \leq i \leq m$

b) $(descr(Di,Mi) \wedge descr(Dj,Mj))) \rightarrow (Di/Dj)$

Observații

Obs. l. Din punct de vedere semantic mulțimea univers Mo coincide cu domeniul de cercetare asociat termenilor teoriei științifice în cauză.

Obs. 2. Criteriile pot fi înțelese într-o primă instanță ca niște predicate de două argumente, unul pentru nume sau atribut și altul pentru valori sau etichete valorizatoare valabile despre obiectele desemnate prin acel nume. De exemplu, criteriul „studii" într-o anchetă sociologică asupra personalului unei organizații poate lua valorile „elementare", „medii", „universitare", „postuniversitare".

Universitatea Spiru Haret

Pentru operaționalizarea clasificării trebuie să dispunem de reguli sau proceduri care să scindeze mulțimea univers în submulțimile asociate epitetelor de mai sus.

Obs. 3. Egalitatea 3) a) descrie operația de clasificare. Clasificarea ne apare ca o funcție definită pe produsul cartezian al mulțimii părților lui Mo, cu mulțimea criteriilor C cu valori în produsul cartezian al unei mulțimi de m submulțimi din Mo.

Putem numi primul termen al egalității a) drept *classificandum* sau mulțime de clasificat, iar pe cel de al doilea termen drept *classificans* sau rezultat al clasificării, respectiv *clasele* obținute.

Obs. 4. Condițiile 3) b) şi 3) c) descriu restricțiile extensionale ale unei clasificări: reuniunea claselor obținute trebuie să fie echivalentă cu clasa inițială sau *classificandum* (într-o clasificare nu trebuie să rămână vreun „rest", respectiv obiecte nerepartizate în clase) şi clasele obținute trebuie să fie disjuncte între ele (nici un element să nu aparțină la două clase diferite).

Aceste condiții extensionale sunt satisfăcute de orice partiție.

Obs. 5. Condiția 3) d) defineşte numărul claselor obținute într-o clasificare ca fiind cardinalul mulțimii de subclase obținute. În notația specificată la 3) a) numărul de clase (al mulțimii classificans) este m;

Obs. 6. Punctele 4) şi 5) descriu exigențe de ordin intensional ale unei clasificări:

- Orice clasă are un nume sau o descripție caracteristică satisfăcută de orice element din clasă (vezi 4), a));

- Conținutul sau semnificația descriptorului poate fi redată printr-o definiție explicită cu ajutorul unor atribute sau descriptori predicativi (vezi 4), b)).

Intensiunea unei clase sau subdiviziuni (specii) implică intensiunea clasei inițiale sau a clasificandumului (genului) (vezi 4), c)).

Genul cuprinde extensional specia şi specia implică intensional genul;

- Intensiunea clasei univers este echivalentă cu intersecția dintre intensiunile claselor rezultate şi acestea sunt intensional incompatibile între ele. (vezi 5) a), 5) b)).

Obs. 7. Clasificarea este o delimitare sau departajare a unor mulțimi de obiecte, dar şi o analiză a conținutului unor noțiuni având drept referenți (sau designat) elementele mulțimii de referință.

Teoria grupării obiectelor din mulțimea univers în clase distincte este, totodată, o teorie a analizei conținutului noțiunilor ce au ca extensiune obiectele din clasele delimitate. De aceea, teoria clasificării merge

Universitatea Spiru Haret

mână în mână cu teoria definițiilor explicite sau stipulative prin care se delimitează sfera şi conținutul claselor şi subclaselor definite printr-un proces de clasificare.

Obs. 8. Clasificarea definită mai sus este o *clasificare elementară* care operează cu o mulțime inițială sau mulțimea univers de discurs, Mo, cu un criteriu unic, c∈C şi cu o mulțime de clase sau subdiviziuni rezultate din aplicarea criteriului la mulțimea univers. Criteriul este „securea" ce despică mulțimea univers în clase distincte Di, $1 \leq i \leq m$, fiecare având un descriptor generic Di, ce este referențial echivalent cu expresia definitoare (Dfn sau definens) redată prin f_b (Al,...,Am), unde Al,...,Am sunt simboluri predicative iar f_b este o funcție de adevăr, respectiv o funcție binară. Mai exact, f_b (Al,...,Am) joacă rolul definitorului dintr-o definiție şi este descriptibil printr-o formulă bine formată in logica predicatelor.

În viziunea teoriei pe care o propunem, o clasă nu este doar o mulțime ci o tripletă (descriptor, mulțimea, intensiune) prescurtat (D, M, I), unde D este numele sau descriptorul concis al clasei, M este mulțimea obiectelor desemnate iar conținutul analitic al descriptorului sau intensiunea I este data de expresia definitoare a lui D, respectiv de f_b(Al,A2,...,Am).

Obs. 9. Definiția descriptorului unei clase, dată prin condiția 4), b) este o schemă a unei definiții efective în care va apare în *definiendum* un simbol predicativ, cu una sau mai multe variabile libere şi în *definiens* mai multe simboluri predicative, având fiecare una sau mai multe variabile libere.

Numărul de variabile libere din Dfd va trebui să fie egal cu numărul de variabile libere din Dfn. Mai mult, variabile libere de o parte şi de alta a semnului =df vor trebui să fie aceleaşi. Expresia definitoare f_b(Al,...,Am) descrie analitic conținutul lui D, descriptorul sintetic al clasei M.

Cu alte cuvinte, orice n-tuplu de obiecte din Mo ce satisface descriptorul (sintetic) al unei clase va trebui să satisfacă, de asemenea, expresia analitică a acesteia, redată prin expresia definitoare f_b(Al,...,Am) şi invers.

Exemplul l. Clasificarea oamenilor după grupa sangvină.
Fie O = mulțimea oamenilor, c = gs i.e. grupa sangvină.
Atunci sistemul de clasificare K din definiția l va avea forma:
K1 = (O, gs, cl) I.l.

Universitatea Spiru Haret

unde operaţia *cl* va fi definită pe produsul cartezian al mulţimii părţilor mulţimii oamenilor şi mulţimea singleton {gs}, respectiv pe $\{2^O \times gs\}$ şi va lua valori într-o mulţime de mulţimi (de cardinal 4), respectiv {M1, M2, M3, M4}. Scrieri alternative pot fi {I, II, III, IV} sau {0, A, B, AB}

Cele patru clase epuizează mulţimea oamenilor şi sunt disjuncte. Satisfac, deci, condiţiile 3) b) şi c).

Numărul de clase, nr cl obţinute după criteriu gs este egal cu card (cl (O,gs)) = card ({M1, M2,M3, M4}) = 4

Descriptorul clasei M1 este D1 = „oameni având grupa I-a de sânge" şi acesta poate fi văzut ca *definiendum* al unei definiţii având drept referent elementele clasei M1 şi drept *definiens* anumite caracteristici sau atribute ale globulelor roşii şi ale plasmei sangvine şi specificarea compatibilităţilor de transfuzie, de la ce grupe poate primi şi căror grupe le poate fi donator.

Aşa de exemplu, între atributele grupei M1 sau 0 va fi menţionată calitatea de *donator universal*, iar între atributele grupei M4 calitatea de *receptor universal*.

Mai departe, cum M1 este inclus extensional de către Mo şi descriptorul lui Ml este Dl intensiunea lui Dl, respectiv caracteristicile sau atributele oamenilor din grupa MI (I-a i.e.0) conţin, între altele, atributele generale ale oamenilor.

4. **Criterii, măsurători şi definiţii operaţionale**

Termenul „criteriu" folosit de definiţia l păstrează încă o anumită ambiguitate.

Am afirmat mai sus că un criteriu este descris de un simbol predicativ şi că acesta provoacă scindarea mulţimii de clasificat, dar n-am precizat *cum* se realizează această regrupare a elementelor mulţimii iniţiale.

Ne propunem să evidenţiem aici mecanismul formal al constituirii claselor rezultate prin intervenţia criteriului. Mai exact, vrem să arătăm cum devin criteriile operaţionale.

Pentru înţelegerea acestui fapt trebuie să ducem analiza noastră mai departe. Orice element c unde c = Atribut (Ind, Val) din C (vezi definiţia l) poate fi văzut ca o structură:

Atribut (Ind,Val) = (op, S, R) (Cr)

Universitatea Spiru Haret

unde:

l) *Atribut (Ind,Val)* este o schemă predicativă pe post de *definiendum* ce poate genera clase de judecăţi de relaţie de forma *temperatura (X,Y)*, i.e. „temperatura obiectului X este Y"; unde Y este un calificativ oarecare (de exemplu, „ridicată")

2) *op* este o operaţie sau o procedură definită pe Mo cu valori în **R,** ce corespunde înregistrării rezultatelor măsurătorilor unor proprietăţi cantitative ale obiectelor de clasificat.

op: Mo → **R**

op (X) = Y se citeşte „obiectul X are valoarea Y", iar **R** este mulţimea numerelor reale.

3) Definim codomeniul aplicaţiei

$Cop = \{y \in \mathbf{R}: \exists x(x \varepsilon M \wedge op(x) = y)\}$

4) Definim o relaţie de ordine parţială S pe mulţimea valorilor codomeniului operaţiei *op* ce descrie intervalul sau spectrul valorilor:

$S \subset Cop \times Cop$

şi satisface condiţiile:

a) $\forall x S(x,x)$

b) $\forall x \forall y \forall z[(S(x,y) \wedge S(y,z)) \rightarrow S(x,z)]$

c) $\forall x \forall y[(S(x,y) \wedge S(x,y)) \rightarrow x = y]$

5) Segmentăm intervalul valorilor într-un număr de m puncte şi obţinem m+1 subintervale ordonate şi disjuncte: *I1, I2,...,Im+1*.

6) Definim cele m+1 clase rezultate prin operaţia de clasificare în conformitate cu schema:

$Mi = \{x \in Mo: op(x \in Ii\} \ (1 \leq i \leq m+1)$

7) Asociem fiecărui subinterval *I1,...,Im+l* un descriptor specific: *D1*, *D2,...,Dm+1*

Evident, clasele *Mi,* $1 \leq i \leq m+1$ satisfac condiţiile 3a-3d, 4a, 4c, 5a, 5b stipulate în definiţia l.

Este important să arătăm că operaţionalizarea criteriilor prezentată mai sus este compatibilă cu exigenţele programării în Prolog şi deci, permite o tratare computerizată.

Mai mult, întrucât există sisteme de măsurare automată a valorilor unor parametri, putem obţine automat şi unele clasificări de interes empiric.

Iată, pe scurt, cum putem descrie în Prolog clasificarea studenţilor dintr-un an de studii după criteriul rezultatelor obţinute într-o sesiune de examene.

Operaţionalizarea criteriului „rezultate la învăţătură" va fi descrisă de structura:

Universitatea Spiru Haret

rezultate (X,Clasei) = [Media, Lista descrescătoare a mediilor, Reguli] $1 \leq i \leq r$

Presupunem calculată cu metodele obişnuite sau computerizate media notelor obţinute într-un sistem de notare de la l la 10 de către fiecare student. Criteriul de clasificare este predicatul:

c = media (X,Z).

Aceasta poate fi exprimată într-o bază de cunoştinţe factuale de forma: *media (ion, 7,23)*. sau într-o matrice adecvată .

Ordonăm descrescător notele obţinute de studenţi.

Delimităm subintervalele din intervalul [10 - l] prin fixarea „graniţelor" 9, 7, 5, 4 şi obţinem subintervalele: I1 = [lo - 9]; I2 = [9 - 7]; I3 = [7 - 5];I4 = [5 - 4];I5 = [4 - l].

Definim procedural clasele de studenţi după criteriul rezultate la învăţătură:

f_bun (X): - media (X,Y), element(Y, I1). *Rl*
bun (X): - media (X,Y), element (Y,I2) *R2*

şi aşa mai departe.

Clasificarea poate fi rafinată în continuare prin luarea în considerare a unor criterii suplimentare, cum ar fi calitatea lucrărilor prezentate la sesiunile ştiinţifice studenţeşti, nivelul abilităţilor practice dobândite etc.

Proceduri similare pot fi folosite pentru ierarhizarea calitativă a unor produse tehnice.

Speţa de operaţionalizare prezentată mai sus se întemeiază pe operaţia de măsurare.

Putem obţine o operaţionalizare a criteriilor de definire şi prin *utilizarea definiţilor operaţionale.*

soluţie_acid (X):- înroşeşte (X, hârtia_ de_ turnesol_ albastră).
bază (X):- albăstreşte (X, hârtia de turnesol-roşie).
sare (X):- acid (Y), bază (Z), se_formează_prin_neutralizare (X,Y,Z)).

Definiţiile operaţionale întemeiază atribuirea unui epitet şi încadrarea într-o clasă pe rezultatul efectuării unui test. Ele mediază tranziţia de la operaţii şi conduite practice la judecăţi asertorice şi la încadrarea într-o clasă de obiecte, stări sau evenimente.

Clasificările sunt alcătuiri de clase şi precizări ale intensiunii conceptelor asociate acestor clase pe temeiul unor acte şi comportamente practice, cum ar fi măsurătorile sau definiţiile operaţionale.

O a treia cale de a operaţionaliza o clasificare şi de a fundamenta nişte aserţiuni teoretice privind apartenenţa la o clasă sau alta a unei mulţimi de obiecte este utilizarea unui algoritm de decizie.

Universitatea Spiru Haret

Să ne imaginăm că de data aceasta ne interesează determinarea caracteristicilor semantice ale unei formule logico-matematice ce descrie un raţionament.

formulă_ validă (X): - testare (X, arbori, duce (X, închid_ drumuri) .
formulă_ invalidă (X): - testare(X, arbori, duce(X,drum_deschis).

Putem, deci, conchide că există cel puţin trei căi alternative prin care putem operaţionaliza criteriile unei clasificări: prin conectarea teoriei aserţiunii cu teoria măsurătorilor; prin conectarea teoriei criteriilor cu definiţiile operaţionale şi, în sfârşit, prin conectarea teoriei criteriilor de clasificare cu teoria metodelor de decizie din logica matematică. Este util să menţionăm că în cea de a treia speţă de operaţionalizare clasa sau descriptorul vizat priveşte lumea formulelor bine formate şi nu lumea substanţelor fizice sau lumea evaluării conduitelor umane. Aşa cum vom vedea cu alt prilej teoria clasificării este intim legată şi de teoria judecăţilor de valoare.

Criteriile devin clare prin operaţionalizare. Atât timp cât ne menţinem în perimetrul explicaţiilor lingvistice generale, expresiile de forma „rezultate la învăţătură", „nivel de pregătire profesională", ce descriu criterii, rămân echivoce.

Ele pot fi dezambiguizate prin definirea modului în care devin operante.

Am prezentat mai sus o modalitate de operaţionalizare a criteriului „rezultate la învăţătură" întemeiată pe procedura de calculare a mediei.

Aceasta a condus la divizarea mulţimii studenţilor în cinci clase.

Acelaşi criterii pot fi operaţionalizate şi după o altă strategie. Scindăm, mai întâi, mulţimea studenţilor examinaţi în promovaţi şi nepromovaţi, după criteriul: „a promovat *X toate* examenele sau nu le-a promovat pe *toate*" şi apoi mulţimea nepromovaţilor o scindăm după criteriul numărului de discipline nepromovate, mai exact după răspunsul la întrebarea „are *X* mai mult de trei discipline nepromovate sau nu" în clasa restanţierilor şi în clasa repetenţilor.

Clasificarea ternară în promovaţi, restanţieri şi repetenţi am obţinut-o mai sus printr-o dublă dihotomie.

Este uşor de observat că o astfel de clasificare nu a dezvoltat uniform toate ramificaţiile. Mulţimea promovaţilor n-a mai fost scindată. În plus, ar fi aberant să ne întrebăm despre mulţimea promovaţilor, dacă au mai mult de trei discipline nepromovate.

De aici rezultă că cerinţa formulată de către unii logicieni, după care o clasificare trebuie să aibă, la un nivel, un singur criteriu este excesivă.

Universitatea Spiru Haret

Mulţimea studenţilor promovaţi, evident, va putea fi şi ea determinată în continuare după un număr de alte criterii judicioase cum ar fi, de exemplu, ca mai sus, mărimea mediilor sau mediile la disciplinele de specialitate sau participarea la sesiunile ştiinţifice studenţeşti etc.

Din cele de mai sus rezultă că noţiunea de criteriu comportă mai multe stadii de înţelegere şi aprofundare.

Un criteriu este un predicat deschis care va fi instanţiat şi deci transformat în propoziţie declarativă, după cum un individ din mulţimea de clasificat satisface sau nu anumite condiţii de ordin cantitativ, obţinute prin măsurare sau după cum, testarea individului printr-o anumită metodă conduce la rezultate ce satisfac anumiţi descriptori (definiţii operaţionale) sau aplicând un anumit algoritm asupra unui set de formule sintactic corecte, ajungem la expresii cu o structură standard ce serveşte drept indicator pentru proprietăţi semantice mai profunde ale formulelor.

Teoria criteriilor este, aşadar, intim legată de teoria întrebărilor şi răspunsurilor la întrebări, mediate de fiecare dată de proceduri, experimente şi calcule. Clasificările se sprijină, în ultimă instanţă, pe acţiune, experiment, măsurătoare şi tehnici de legare a aserţiunilor şi judecăţilor de valoare de orizontul empiric pragmatic al unei comunităţi.

5. **Interpretarea relaţională a clasificărilor elementare**

În definiţia l din capitolul 3 am văzut clasificarea ca o operaţie şi am descris-o cu ajutorul unei funcţii ce trebuia să satisfacă mai multe condiţii de ordin extensional (vezi: 4), a) - 5), b)).

Pentru articularea coerentă, concisă şi intuitivă a teoriei clasificărilor plurinivelare este avantajos să interpretăm clasificarea ca o relaţie ternară sau binară.

Clasificarea poate fi văzută ca o relaţie definită pe produsul cartezian al mulţimii părţilor universului Mo cu mulţimea criteriilor şi mulţimea m-tuplelor de submulţimi din părţile lui Mo

Definiţia 2. Numim *clasificare elementară* sau clasificare cu un singur nivel o relaţie ternară:

$$Kr \subset 2^{Mo} \times C \times (2^{Mo})^{m} \qquad (2.1.)$$

a cărei instanţiere:

$$Kr(Mo,c,[M1,...,Mm]) \qquad (2.2.)$$

se citeşte:

Universitatea Spiru Haret

„Clasificând mulțimea inițială *Mo* după criteriul *c* obținem clasele *Ml,...,Mm*"

Acestea satisfac condițiile:

$i = m$

a) $\cup Mi = Mo \qquad l \leq i \leq m$

$i = 1$

b) $Mi \cap Mj = \varnothing \qquad i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq m$

2. Pentru orice clasă $Mi,\ l \leq i \leq m$, există un descriptor *Di* astfel că:

c) $\forall x(\ Di(x) \rightarrow x \in M)$

iar semnificația descriptorului *Di* poate fi redată printr-o definiție explicită cu ajutorul unor conective şi cuantificatori logici şi a unui număr de proprietăți sau atribute exprimate prin simboluri predicative de diferite arități: *A1,...,Ak*.

Schematic structura definiției explicite este:

d) $Di = df f_b\ (Al, A2,...,Ak)$

unde f_b este o funcție de adevăr, iar *Al,...,Ak* sunt atomi predicativi.

În formulare condiției 2 b) am făcut abstracție de cuantificatori iar în formularea condiției 2 a) am presupus că elementele mulțimii *Mi* au proprietăți monadice. În realitate, pot interveni şi relații binare, ternare etc.

Descriptorii asociați mulțimilor redau proprietățile claselor de obiecte şi alcătuiesc intensiunea sau conținutul acestora exprimat sintetic printr-un predicat *Di* de diferite arități.

3. Dacă *Do* este descriptorul lui *Mo* şi *Dl,D2,...,Dm* sunt descriptorii claselor *M1, M2,...,Mm*, atunci:

e) $(\ Mi \subset Mo) \rightarrow (\ Di \Rightarrow Do)$

f) $Do = D1 \oplus D2 \oplus,..., \oplus Dm$

unde $\oplus$ este simbolul disjuncției exclusive:

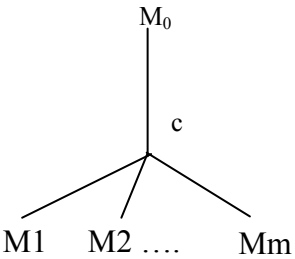
g) $A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Condițiile stipulate în definiția l se mențin cu unele adecvări şi în definiția 2. Şi aceasta păstrează condițiile extensionale ale unei partiții (vezi *a) şi b)*. Dar în plus, le leagă pe acestea de atribute sau proprietăți (vezi condițiile c) şi d). Condiția e) defineşte raportul invers dintre extensiune şi intensiune, după care specia este mai bogată în conținut decât genul care este mai extins ca sferă decât specia. Condițiile f) şi g) descriu relațiile extensionale dintre clasele obținute care sunt mutual disjuncte şi reuniunea lor echivalează cu extensiunea mulțimii de clasificat numită de noi drept classificandum. Definiția 2 de mai sus (vezi 2.1 şi 2,2) reduce clasificarea elementară la o relație

Universitatea Spiru Haret

triadică între mulţimea iniţială *Mo* sau mulţimea ce trebuie clasificată (*classificandum*), criteriul *c* cu $c \in C$ mulţimea criteriilor şi mulţimea claselor obţinute sau rezultatele clasificării. O clasificare concretă este o tripletă *(Univers, Criteriu, Clase)* sau *(Mo,c,[M1,...,Mm])*.

Putem reda intuitiv aceasta printr-un graf:



classificandum sau univers (cld)
Criteriu

.... clase sau *classificans* (cls)

Fig.l. Reprezentarea extensională a unei clasificări elementare

Graful de mai sus evidenţiază, cu prioritate, *dimensiunea extensională* a operaţiei de clasificare. În el sunt precizate mulţimea iniţială, criteriul şi mulţimile rezultate prin clasificare (clasele).

Putem evidenţia *dimensiunea intensională* a operaţiei de clasificare prin schimbarea etichetării. Astfel, vom pune în loc de numele claselor *intensiunea* sau proprietăţile acestora.

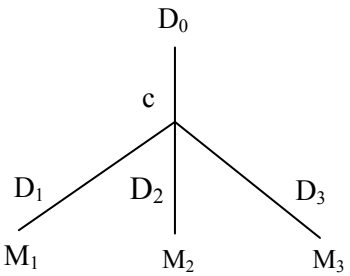


Fig.2. Reprezentarea intensională a unei clasificări elementare

Graful unei clasificări poate fi parcurs *descendent* de la mulţimea Univers spre *clasele terminale sau ascendent* de la clasele terminale sau „speciile ultime" spre mulţimea Univers.

Universitatea Spiru Haret

Parcurgerea descendentă corespunde procesului de *analiză şi determinare*. Dimpotrivă, parcurgerea ascendentă corespunde procesului de *abstractizare şi generalizare.*

Orice scindare a unei clase inițiale în subclase presupune utilizarea unui criteriu şi identificarea unor *proprietăți discriminatorii.*

Între două clase provenite dintr-o clasă inițială putem găsi *asemănări şi deosebiri.*

Asemănările provin din intensiunea claselor supraordonate, iar deosebirile din intensiunea claselor disjuncte sau coordonate.

Limita puterii de analiză este mulțimea cu un singur element (mulțimea singleton). Individul concentrează maximum de determinare posibil. El are intensiunea cea mai bogată. Între doi indivizi putem întotdeauna identifica prin analiză note discriminatorii. Într-un fel, observația de mai sus este concordantă cu observația lui Aristotel după care individualul deține maximum de determinare.

O clasificare, după un criteriu dat, încetează când se ajunge la indivizi.

Parcurgerea descendentă a unei clasificări poate fi văzută ca un sistem intrare-ieşire în care unei perechi (Univers, Criteriu) îi asociem, la ieşire, Clase.

Parcurgerea ascendentă poate fi văzută ca un sistem cu intrări multiple şi cu ieşire unică, prin care diversității valorilor de intrare ale unei clase de obiecte le identificăm un criteriu unic ce le explică deosebirile şi le identifică asemănările şi genul ce le acoperă.

6. **Clasificarea elementară ca o relație binară**

Pentru dezvoltările ulterioare este utilă o schimbare sumară a descrierii relaționale dată mai sus. În loc să descriem clasificarea ca o relație ternară o vom descrie acum ca o relație binară. Aceasta pentru a putea mai lesnicios descrie compunerea de clasificări, în capitolele ulterioare, în care ne vom ocupa de clasificările multinivelare şi de spețele lor.

Dăm mai întâi o descriere a clasificărilor elementare ca relații binare care neglijează dimensiunea intensională a clasificărilor şi redă explicit doar criteriile şi extensiunea claselor implicate.

$Kr2 \subseteq (2^{Mo} \times C) \times (2^{Mo})m$

Universitatea Spiru Haret

Clasificarea este o relaţie între perechile <mulţime univers, criteriu> şi mulţimile de câte m clase <*M1, M2,...,Mm*>, rezultate din aplicarea criteriului la clasa iniţială. Înţeleasă ca o relaţie binară (cu două argumente) o clasificare concretă poate fi descrisă ca:

kr ([Mo, C], [M1, M2,...,Mm]). *(kr M) (6.1)*

Pe primul argument al relaţiei l-am numit mai sus (vezi definiţia 1 din cap.3) *classificandum* (*cld*) iar pe cel de al doilea *classificans* (*cln*).

Cu aceste convenţii de grupare şi prescurtare orice clasificare este descriptibilă ca o relaţie binară sau o compunere de relaţii binare. Din perspectivă extensională clasificarea elementară va avea în final schema:

kr(Cld, Cln) *(6.2)*

unde *Cld* ţine loc clasei iniţiale sau clasei „părinte", iar *Cln* claselor nou obţinute, „fii" sau „fiice".

Dacă dorim să captăm în definiţia noastră şi intensiunea claselor generate printr-o clasificare, atunci o clasificare elementară poate fi caracterizată:

kr([Mo, Cr],[[D1, M1], [D2, M2],...,[Dm, Mm]]) *(6.3)*

Formula (*6.3*) poate fi privită ca o descriere în Prolog a schemei unei clasificări elementare.

Este uşor de observat că aceasta este o relaţie binară. Primul argument *[Mo, Cr]* stă pentru *classificandum* (cld) sau „mulţimea" de clasificat; cel de al doilea, *[[D1, M1],..., [Dm, Mm]]* stă pentru *classificans (cln)* sau clasele rezultate dintr-o clasificare. Numărul claselor rezultate sau *card (Cln)* este *m*.

Din clauza *kr (X,Y)* putem extrage:

cld (X): - kr (X, Y). *(6.4)*
cln (Y): - kr (X, Y) *(6.5)*
cls(Z) :- cln(Y),element(Z,Y). *(6.6)*
int-clasă (Z, D): - Z = [D, M] *(6.7)*
ext-clasă (Z, M): - Z = [D, M] *(6.8)*
arc (X, Z): - kr (X, Y), element (Z,Y) *(6.9)*

Instrucţiunile *(6.3)–(6.9)* definesc în Prolog conceptele de *classificandum* sau mulţime de clasificat, *classificans* sau mulţimea claselor obţinute, *clasă*, *intensiunea* şi *extensiunea* unei clase precum şi noţiunea de *arc*.

La modul concret un arc este descris ca o relaţie între două perechi. Prima pereche este alcătuită din mulţimea iniţială şi din criteriu de clasificare iar cea de a doua dintr-o clasă rezultată prin clasificare care are un descriptor şi o extensiune.

Universitatea Spiru Haret

Scris în Prolog un arc va avea forma:

arc ([mo, co], [d1, m1]). *(6.10)*

Semnificația sa este: „Din mulțimea inițială m0, prin aplicarea criteriului c0 pe temeiul proprietății d1 se delimitează mulțimea m1".

Arcele şi drumurile la un loc cu operaționalizarea criteriilor (vezi cap.4) descriu dinamica actelor de clasificare.

Interpretarea clasificării elementare ca o relație binară ne va permite să definim mai departe clasificările multinivelare, cu criterii unice sau multiple pe fiecare nivel.

7. **Reprezentarea grafică a clasificărilor**

Clasificările multinivelare pot fi văzute ca iterări sau compuneri de clasificări elementare în care clasele rezultate dintr-o clasificare devin, la rândul lor, clase inițiale pentru alte clasificări. Se înțelege, orice clasă inițială sau *classificandum* va face uz de un criteriu distinct de cele utilizate la nivelele anterioare.

Într-o clasificare multinivelară distingem la început o mulțime univers Mo caracterizată printr-un descriptor Do şi la nivelul ultim speciile sau clasele ultime, care nu se mai scindează în alte subclase, având fiecare propriul lor descriptor.

Între acestea, pe niveluri distincte, vor fi plasate clasele sau genurile intermediare, delimitate şi acestea prin descriptori specifici.

Forma curentă de reprezentare intuitivă a claselor sunt arborii. În mod tradițional în nodurile arborilor sunt plasate clasele, iar arcele leagă o clasă gen de speciile sale subordonate (vezi fig.3).

Prezentăm mai jos patru modalități de reprezentare grafică a unei clasificări multinivelare banale, comentată în trecere, în capitolul IV.

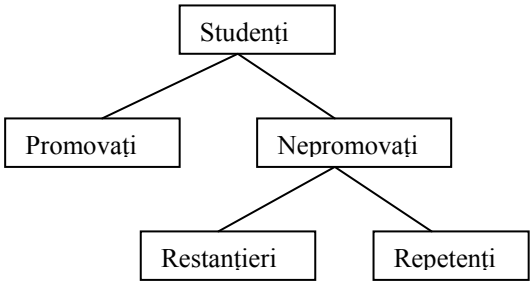


Fig. 3.Reprezentarea grafică a clasificării studenților după performanța şcolară

Universitatea Spiru Haret

În conformitate cu cele spuse în capitolul V despre clasificările elementare, putem reprezenta clasificarea amintită în capitolul IV prin graful:

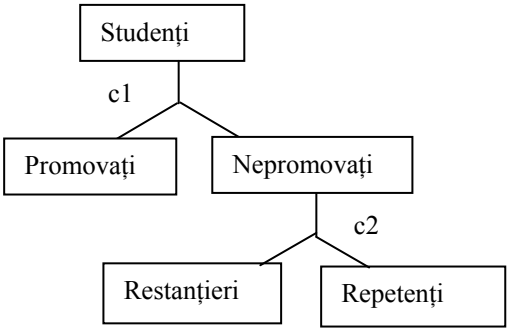


Fig.4 *Reprezentarea unei clasificări multinivelare prin criterii şi mulțimi.*

O soluție alternativă ar fi reprezentarea clasificărilor sub forma unor organigrame în cadrul căreia criteriile iau forma unor blocuri de decizie având tot atâtea ieşiri câte tipuri de răspunsuri pot fi date la întrebarea criteriu.

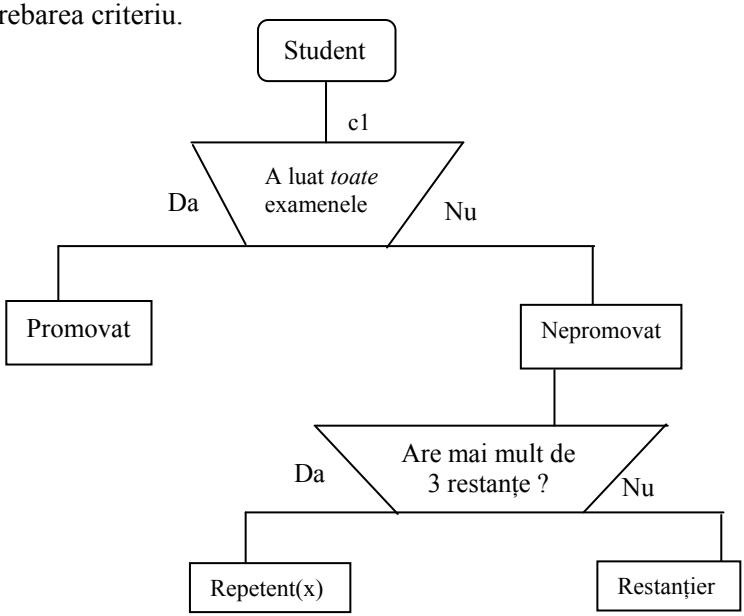


Fig. 5. *Reprezentarea unei clasificări prin organigrame*

Neajunsul reprezentării tradiționale prin mulțimi şi linii (vezi fig.3) constă în faptul că nu redă explicit criteriile clasificării şi nici modul de operaționalizare a acestora. În plus, neglijează descriptorii sau intensiunea claselor.

Reprezentările din fig. 3 şi 4 evidențiază rezultatele operației de clasificare, mulțimile de obiecte delimitate. Reprezentarea din fig.5 evidențiază intensiunea sau descriptorii claselor sub forma unor predicate. În plus, reprezentarea din fig.5 pune în lumină modul de operaționalizare a criteriilor prin formularea întrebării asociate criteriului şi prin enumerarea alternativelor de răspuns.

În locul triunghiului putem avea un poligon cu n laturi (o latură pentru intrare şi n-1 pentru ieşiri sau clase de răspunsuri sau de descriptori evaluatori.

Cea de a 4-a modalitate de reprezentare (vezi fig. 6) ține seama, deopotrivă, de extensiunea claselor şi de intensiunea acestora, evidențiind, totodată, şi criteriul, lăsând în umbră modul de operaționalizare a acestuia.

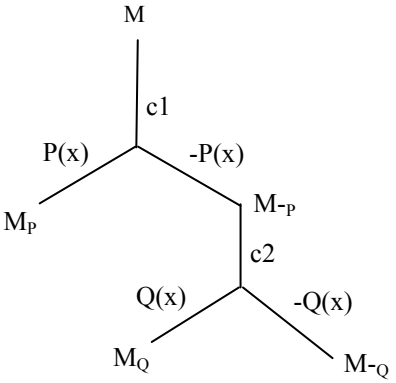


Fig 6. Reprezentarea prin arbori a unei clasificări dihotomice şi marcareaintensiunii acesteia

În lucrarea de față optăm pentru reprezentarea clasificărilor prin arbori etichetați care marchează pentru orice clasificare elementară mulțimea inițială sau *classificandum,* criteriul clasificării, descriptorii sau intensiunea claselor şi clasele sau submulțimile rezultate (extensiunea). Reprezentarea pe care o propunem dă seama, deopotrivă, de

Universitatea Spiru Haret

extensiunea şi intensiunea operațiilor de clasificare şi facilitează înțelegerea inferențelor imediate întemeiate pe teoria clasificării.

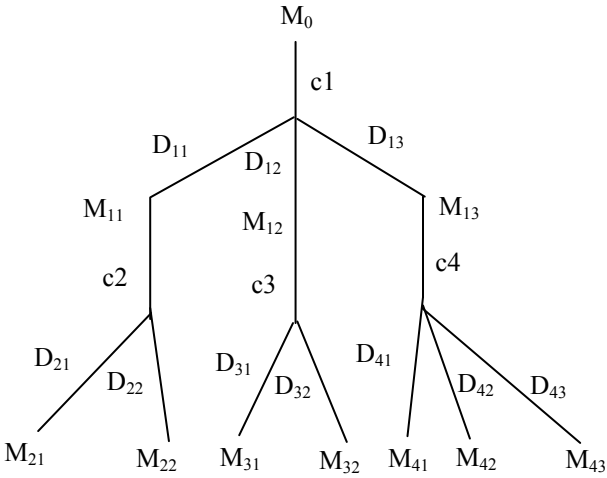


Fig. 7. Reprezentarea prin arbori etichetați a unei clasificări multinivelare

Mo este mulțimea univers ce joacă rolul de rădăcină a arborelui. *c1, c2, c3*, *c4* sunt criteriile. Etichetele Dij desemnează descriptorii sau „valorile" generate de criteriul *i, i* = l, 2, 3, 4.Ele dezvăluie intensiunea claselor. Etichetele Mij descriu clasele sau mai exact extensiunea acestora. Clasele aflate pe „frunze" sau la extremitatea unui drum început în *Mo* se numesc *clase terminale* sau *specii* ultime rezultate din *Mo* prin compunerile de clasificări *c1∗c2, c1∗c3, c1∗c4*.

Clasificarea descrisă în Fig.7 este o clasificare completă cu mai multe criterii pe un nivel.

Intensiunea speciilor ultime *M21,...,M43* este descrisă de atributele D21(x),D11(x) pentru orice x ∈M21,... şi de *D43(x),D13(x)* pentru orice *x ∈M43*.

Clasificările mai pot fi reprezentate prin diagrama Karnaugh şi prin liste. Reprezentarea prin liste este deosebit de utilă pentru elaborarea unei teorii a clasificărilor compatibilă cu programarea logică şi cu bazele de cunoştințe scrise în Prolog. Asupra acestor probleme vom reveni în capitolele următoare.

Universitatea Spiru Haret

8. **Clasificările elementare şi schemele de inferenţă**

Clasificarea nu este o simplă grupare a obiectelor în clase, ci un instrument de ordonare logică şi un punct de plecare pentru deducerea unor cunoştinţe.

Inferenţele derivate dintr-o clasificare elementară vizează, deopotrivă, sfera şi conţinutul sau intensiunea conceptelor.

Prin *intensiunea* unui concept înţelegem, grosier vorbind, un şir de note descrise prin simboluri predicative.

Formulăm câteva scheme de inferenţă întemeiate pe ceea ce am numit mai sus clasificare elementară.

1. Dacă N este o subclasă a lui M şi intensiunea lui N este K şi intensiunea lui M este L, atunci intensiunea lui N implică intensiunea lui M.

1a. *(subclasă (N, M) ∧ int (N, K) ∧int (M, L))⊃ (K⇒L)*

1b. *impli (K, L): - subclasă (N, M), int (N, K), int (M, L).*

Formularea 1 a fost redată ca formulă logică la *1a* şi ca instrucţiune Prolog la *1b*. Prin *impli (X,Y)* am redat în Prolog implicaţia intensională; un rând mai sus aceasta a fost redată prin „⇒”.

Schemă de mai sus a fost formulată în logica tradiţională ca principiul raportului invers între sferă şi conţinut.

Specia este mai bogată în conţinut decât genul în care este inclusă. Dintre specii, cea mai bogată în conţinut este *specia infima*. La limită, *specia infima* poate avea un singur element, referentul ei fiind o *clasă singleton.*

2. Fie o clasificare elementară:

kr([Mo,c], [M1, M2,...Mm])

şi D1, D2,...,Dm descriptorii generici ai claselor *M1, M2,...,Mm*.. Atunci pentru orice *i, j* cu $1 \leq i, j \leq m$ are loc schema de inferenţă:

2a. *Di (X) / Dj(X)*

Di(X)

¬ Dj(X)

2b. *not (dj(X)): - not (di(X), dj(X)),*
di (X)

Cu alte cuvinte, pentru un obiect *x* din *Mo* poate fi adevărat odată un singur descriptor de clasă, toţi ceilalţi fiind falşi. Altfel spus descriptorii claselor obţinute sunt mutual incompatibili.

Universitatea Spiru Haret

3. Fie o clasificare elementară *Kr ([Mo, c], [M1, M2,...,Mm])* şi *D1*, *D2,...,Dm* descriptorii generici ai claselor.

Atunci pentru orice *x* din *Mo* cel puţin un descriptor de clasă trebuie să fie adevărat.

Să admitem că *Mo* a fost scindat prin criteriul *c* în trei clase *M1, M2, M3*. Atunci are loc schema:

≡3a 1. $D1(x) \vee D2(x) \vee D3(x)$
2. $\neg(D1xX) \vee D2(x))$

---

3. *D3(x)*

3b. *d3(X): - d1(X); d2(X); d3(X),*
not (d1(X); d2(X))

Dacă este adevărată o propoziţie disjunctivă cu n termeni şi sunt falşi n-1 termeni ai disjuncţiei, atunci termenul ultim rămas este o propoziţie adevărată.

Acest tip de raţionament anulează n-1 dintre alternative şi conchide cu certitudine asupra veridicităţii alternativei rămase.

Obs.l. Programatorii în Prolog ştiu că apariţia unei clauze negate complică mult demersul inferenţial, căci Prolog-ul „înţelege" negaţia doar ca eşec (failure).

Pentru fiinţa umană atât raţionamentele întemeiate pe incompatibilităţi (non-conjuncţie), cât şi cele întemeiate pe explorarea alternativelor sunt mult mai fireşti. Ori acestea derivă ambele direct din disjuncţia exclusivă:

$$A \oplus B \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (-A \vee -B)$$

care este o non-echivalentă.

9. **Clasificările alternative şi inferenţele imediate**

Fie două clasificări elementare:

Kr1 = ([Mo, c1], [M1, M2,...,Mm])
Kr2 = ([Mo, c2], [M1, M2,...,Mn])

având acelaşi classificandum (*Cld*) şi criterii diferite:

$Cld1 = Cld2 = Mo$ (a)
$c1 \neq c2$ (b)

Vom spune că *Kr1* şi *Kr2* sunt două *clasificări alternative.*

Universitatea Spiru Haret

Clasele diferenţiate din *Mo* de cele două clasificări fac uz de criterii diferite şi implicit de proceduri de operaţionalizare şi reguli de încadrare în clase diferite. Inevitabil, clasele rezultate din cele două clasificări *Mi* şi *Mj* vor fi intersectate şi deci va exista pentru orice *x* din *Mo* o clasă *Mi* şi o clasă *Mj* în care acesta va fi inclus.

Problema pe care ne-o punem este ce consecinţe vor rezulta din apartenenţa lui *x* simultan la cele două clase*Mi* şi *Mj*.

Mai întâi, prin relaţia de incompatibilitate (vezi cap.VIII schemele 2a şi 2b), x va fi exclus din toate celelalte clase rezultate din *Kr1* şi din toate celelalte clase rezultate din *Kr2*.

În acelaşi timp, *x* va împărtăşi ,deopotrivă, intensiunea lui *Mi* şi intensiunea lui *Mj* şi va implica intensiunea clasei iniţiale Mo.

Scrierea regulilor de inferenţă asociate acestor observaţii este o problemă de rutină.

Antecedentul acestor reguli ar putea avea forma:

1 *clas-alt (Kr1, Kr2)*
2 $Mi \in Cln1$
3 $Mj \in Cln2$
4 $x \in Mi \cap Mj$

Drept consecinţe din acest antecedent vor putea fi degajate pe rând:

5 $x \notin Cln1 \setminus [Mi]$	*(vezi 2a, cap. 8)*
6 $x \notin Cln2 \setminus [Mj]$	*(vezi 2a, cap. 8)*
7 $Di(x)$	*(vezi 4)*
8 $Dj(x)$	*(vezi 4a def.1, cap.3)*
9 $Di(x) \Rightarrow Do(x)$	*(vezi 1a, 1b, cap.7)*
10 $Dj(x) \Rightarrow Do(x)$	*(vezi Ia, 1b, cap.7)*

Reamintim că *Mi* şi *Mj* sunt clase din clasificări diferite, *Cln* este classificans sau mulţimea claselor rezultate dintr-o clasificare, iar *Di* şi *Dj* sunt descriptorii sintetici ai claselor *Mi* şi *Mj*.

Clasificările alternative sunt relevante metodologic în economie, sociologie, biologie etc. Aşa de exemplu, după ce am clasificat studenţii unei grupe, an de studii etc. şi după criteriul rezultatelor la ultima sesiune, putem cerceta dacă şi cum influenţează căsătoria performanţa şcolară a studenţilor etc.

Departajarea felurită a aceleiaşi mulţimi iniţiale în seturi de clase distincte prezintă interes nu atât din punct de vedere extensional ca repartizare de obiecte în clase, cât prezintă interes din punct de vedere intensional, ca temei pentru inferenţe valide extrase din simplul fapt al

Universitatea Spiru Haret

apartenenței unui individ la două clase terminale sau specii infime, aparținând la două clasificări multinivelare diferite. Dar despre aceasta într-un capitol ulterior, după ce vom fi cercetat mai întâi structura formală a unei clasificări multinivelare.

Două clasificări elementare *Kr1* şi *Kr2* se pot deosebi între ele din punctul de vedere al raporturilor dintre clasele lor inițiale *Mo1* şi *Mo2* şi al criteriilor *c1* şi *c2*.

Putem avea:

1 Mo1 $\subset$ Mo2 şi c1 = c2
2 Mo2 $\supset$ Mo1 şi c1 = c2
3 Mo1 = Mo2 şi c1 = c2
4 Mo1 $\cap$ Mo2 = $\varnothing$ c1 = c2
5 Mo1 $\cap$ Mo2 = $\varnothing$ c1$\neq$ c2
6 Mo1 $\cap$ Mo2 $\neq \varnothing$ cl = c2
7 Mo1 $\cap$ Mo2 $\neq \varnothing$ cl $\neq$ c2

Este uşor de văzut că situațiile 1 şi 2 descriu extinderi ale unei clasificări anterior existente.

Cazul 3 descrie relația de echivalență dintre două clasificări, dacă c1 şi c2 sunt operaționalizate în acelaşi mod.

Cazul 4 descrie o restricție a două clasificări anterioare la o clasificare având ca stare inițială intersecția acestora în timp ce criteriul se menține acelaşi.

Cazul 5 semnalează două clasificări distincte atât în privința mulțimilor inițiale sau clasificările lor, cât şi în privința criteriilor.

Cazul 6 descrie în fond o restricție a două clasificări inițiale distincte la alte două clasificări care au ca mulțime inițială intersecția mulțimilor anterioare, menținându-se aceleaşi criterii distincte.

Cazul 7 descrie două clasificări având mulțimile inițiale intersectate şi criterii diferite.

Tipologia relațiilor dintre clasificări şi evident schemele de inferență asociate acestora se va îmbogăți foarte mult dacă vom admite simultan cu variația mulțimilor de start şi criterii diferite pentru *Kr1* şi *Kr2* sau măcar reguli diferite de secționare a spectrului de valori sau listei de epitete asociate intervalului ce descrie rezultatele unei măsurători sau vom varia condițiile puse asupra rezultatelor unor operații din definițiile operaționale asociate unor clasificări. Lăsăm pentru o altă ocazie această cercetare. În acest moment ne atrage compunerea a două clasificări elementare, ca un pas preliminar pentru definirea clasificărilor multinivelare.

Universitatea Spiru Haret

10. **Compunerea clasificărilor**

Spunem că două clasificări *Kr1* şi *Kr2* se *compun*, în ordinea *Kr1∗Kr2*, dacă şi numai dacă, există între clasele generate de aplicarea criteriului *c1* la *Mo1* (respectiv în mulţimea *classificans Cln1*) o clasă *M1i* şi un criteriu asociat acesteia, *c2*, care să joace rolul de pereche iniţială sau *classificandum* pentru cea de a doua clasificare *Kr2*.

Clasa *M1i* este, figurat vorbind „fiica" lui Mo1 şi în acelaşi timp, „mama" claselor succesoare *M21, M22 şi M23*.

Fie două clasificări cl1 şi cl2 astfel că:

1. cl1 ([M_0, c1], [M_{11}, M_{12}, M_{13}])
2. cl2 ([M_{13}, c2], [M_{21}, M_{22}, M_{23}])

unde M_{13} este o clasă sau un rezultat al clasificării cl1 şi în acelaşi un classificandum sau mulţime iniţială în clasificarea cl2. (vezi fig. 8)

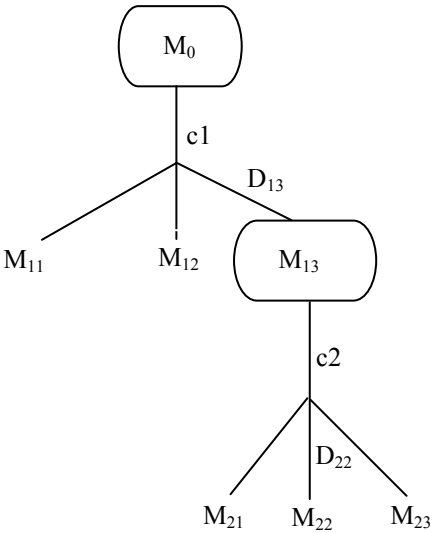


Fig. 8. *Reprezentarea grafică a compunerii a două clase*

Din fig.8 se vede uşor că o clasă generată de criteriul c1, clasa M_{13}, devine clasă iniţială sau *classificandum*, alături de criteriul *c2*, pentru producerea celei de a doua clasificări.

În această opţiune de reprezentare clasificarea este văzută ca o relaţie binară *kr* al cărei prim argument este perechea (mulţime-iniţială,

criteriu) şi al cărei argument secund este mulţimea de clase generate< M_{11}, M_{12}, M_{13}>. Compunerea presupune, aşadar, alegerea din mulţimea de clase *cls1* a unei clase privilegiate *M1i* ce este clasă terminală în clasificarea *kr1* şi clasă iniţială în clasificarea *kr2*.

$kr1 * kr2 =_{df} \exists z(z \in cls1 \wedge kr1([M1,c1], cls1) \wedge kr2([z,c2], cls2))$

Sub raport extensional, o compunere de clasificări înseamnă o scindare a extensiunii asociată mulţimii iniţiale *M1* în cele *m* clase cuprinse din *cls1* şi apoi o scindare a extensiunii clasei *M1i* din *cls1* în cele *n* subclase ale sale. Pentru ilustrare grafică să admitem: m=4, n=3.

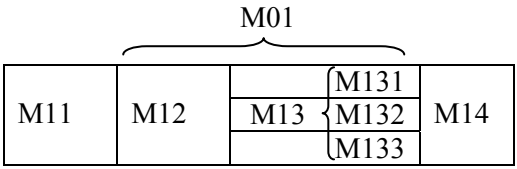


Fig.9. *Reprezentarea extensională a compunerii de clasificări cl1* o*cl2*

Clasificările iterate duc la clase de cardinal din ce în ce mai mic. Limita compunerii iterate a unor clasificări este mulţimea singleton.

Sub raport intensional este interesant să ne întrebăm ce concluzii putem degaja din faptul că un element *x* aparţine unei clase terminale a unei compuneri de clasificări. De exemplu, ne întrebăm ce consecinţe putem degaja din faptul că un obiect b aparţine mulţimii *M22*.

Mulţimea *M22* din fig. 8 are ca descriptor generic pe *D22*, deci *D22(b*). Dar *M22* este o submulţime (specie) din mulţimea *M13*,care este caracterizată de *D13*. Deci, vom conchide *D1i(b*). Mai departe, clasa *D13* este inclusă în M_0 şi în consecinţă obiectul b va satisface şi descriptorul D_0 asociat clasei iniţiale M_0.

Pe scurt, obiectul b va avea drept intensiune specifică conjuncţia tuturor descriptorilor ce etichetează muchiile oblice de deasupra sa în drumul de la M_0 la M_{22}.

$int(b) = D_{22}(b) \wedge D_{13}(b) \wedge D_0(b)$.

Pe de altă parte, vor fi falşi despre obiectul *b*, toţi ceilalţi descriptori ce etichetează muchii divergente cu descriptorii săi.

După aceste exemplificări este uşor să degajăm regulile de inferenţă pe care le ilustrează o compunere de două clasificări.

Universitatea Spiru Haret

Arborele din fig.8 descrie ceea ce noi vom numi drept compunere *parţială* a unei clasificări. Dintre clasele generate din *Mo* de *c1* este transformată în *classificandum* (nou) doar una singură M_{13}, iar dintre clasele generate de M_{13} prin *c2* noi ne-am oprit doar asupra clasei *M22.* Fiecare dintre cele două clasificări poate fi văzută ca o relaţie, iar compunerea lor ca o compunere de relaţii.

$kr1([M_o, c1], M_{13}) = R1$

$kr2([M_{13}, c2], M_{22}) = R2$

$kr1 * kr2 = R1 * R2$

Mai departe, compunerea relaţiilor *R1* şi *R2* poate fi reprezentată printr-un graf:

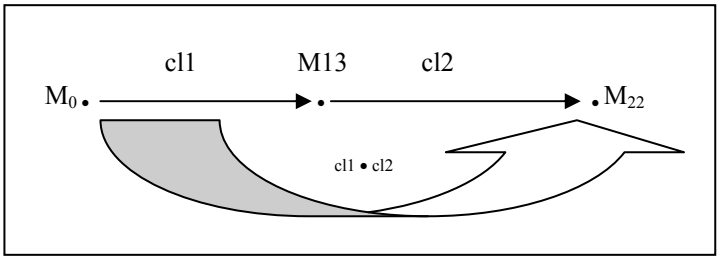


Fig. 10. *Reprezentarea simplificată a compunerilor de două clasificări*

Evident, putem defini şi o *relaţie de compunere completă* a clasificărilor, în care fiecărei clase nou generate de un criteriu anterior săi asociem în pasul următor un criteriu propriu şi mulţimea sa specifică de clase noi generate. Pe această cale putem obţine *clasificări multinivelare complete,* în care fiecare ramură se termină la acelaşi nivel. În acest caz, nu vom avea noduri terminale de nivele diferite.

Teoria clasică a clasificării nu a luat niciodată serios în consideraţie clasificările „asimetrice" având noduri terminale de nivele diferite şi nici clasificările cu mai multe criterii la un nivel dat.

11. **Clasificarea multinivelară**

După cum am observat mai sus (vezi 7, 10), clasificările multinivelare pot fi văzute ca iterări sau compuneri de clasificări elementare.

Definiţia 3. Numim *clasificare multinivelară o structură*

$SC = (R, R^+, niv, sel, T)$

unde:

Universitatea Spiru Haret

1) *R* descrie o clasificare elementară *cle* conform definiției 1sau variantelor relaționale ale acesteia:

a) $R(X,Y) = kr(X,Y)$

2) R^+ este o închidere tranzitivă a lui *R*

a) $R(X,Y) \supset R^+(X,Y)$

b) $(R(X,Y) \wedge R^+(X,Z)) \supset R^+(X,Z))$

3) *niv* este o relație ce defineşte nivelele unei clasificării multinivelare:

$niv: 2^{Mo} \rightarrow N$

a) $niv(Mo, 0)$

b) $(niv(X, N) \wedge R(X, Y)) \supset niv(Y, N+1)$

4) *sel* este funcția ce selectează criteriul de clasificare pentru clasele nou obținute:

sel: cls $\rightarrow$ *C, unde C este mulțimea criteriilor*

a) $(sel(x) = c_i) \supset \forall c_j((c_j \forall c_i) \supset (c_i \forall c_j))$

5) *T* este mulțimea claselor terminale (situate pe frunzele arborelui) rezultate din clasificare Acestea mai pot fi numite şi specii infime.

a) $\forall x(x \in T \rightarrow R^+(Mo,x))$

b) $\rightarrow x(card(x) = 1 \rightarrow x \in T)$

c) $\forall x \forall y((x \in T \wedge y \in T \wedge int(x,D) \wedge int(y,E)) \rightarrow (D \Rightarrow \neg E))$

d) $\forall x \forall y((subcl(x, y) \wedge int(x, D) \wedge int(y, E)) \rightarrow (D \Rightarrow E))$

e) $\forall x \forall y((int(x, D) \wedge int(y,E) \wedge R^+(x,y)) \rightarrow (E \Rightarrow D))$
$i = card(T)$

f) $\cup Xi = Mo$
$i = 1$

Observații

Obs.1. O clasificare multinivelară este, aşadar, o structură ce defineşte o relație de ordine la nivel referențial şi la nivel intensional caracterizată prin cinci parametri:

1) natura clasificării elementare;
2) închiderea tranzitivă a relației de clasificare elementară;
3) nivelurile clasificării multinivelare;
4) funcția de selecție a criteriilor de clasificare;
5) mulțimea claselor terminale.

Obs.2. Condițiile 1) - 5) pot fi transpuse în instrucțiuni Prolog.

Obs.3. Nu am inclus în mod explicit în definiția clasificării multinivelare şi căile de operaționalizare a criteriilor unei clasificări prezentate la nivelul clasificărilor elementare (vezi capitolul 4).

Universitatea Spiru Haret

Obs.4. Numărul de nivel ale unei clasificări multinivelare este definit de cea mai lungă compunere a unei secvențe de clasificări iterate.

$num\text{-}nivele\ (cln) = max(n \in N: R^n(Mo,S) \wedge S \in T)$

Obs.5. Fiecare clasă terminală sau specie a unei clasificări este disjunctă de toate celelalte clase terminale şi reuniunea lor este echivalentă cu mulțimea inițială sau mulțimea univers.

Obs.6. Fiecare clasă nou obținută este extensional inclusă în clasa „părinte" din care a provenit şi fiecare clasă nou obținută conține intensional clasa din care a provenit.

Obs.7. O clasă terminală conține intensional toate clasele ce o preced.

12. **Tipuri de clasificări multinivelare**

Numim *clasificare multinivelară completă* o clasificare multinivelară în care toate clasele terminale au acelaşi nivel (sau sunt toate de nivel maxim).

$$\forall s\, \forall u[(s \in T \wedge u \in T \wedge u \neq s)) \supset (niv(s, N) \wedge niv(u, N))] \quad (10.1)$$

Dimpotrivă, vom numi *clasificări incomplete* sau asimetrice o clasificare în care cel puțin o ramificație a ei nu este de nivel maxim.

O clasificare incompletă ar avea forma:

$$\exists s \exists u\, (s \in T \wedge u \in T \wedge niv(s,N) \wedge niv(u,M) \wedge (N \neq M)) \quad (10.2)$$

Atât clasificările complete cât şi cele incomplete pot fi clasificări logice corecte. Teoria logică tradițională respingea dintr-un început clasificările incomplete ca eronate. Din punctul nostru de vedere o astfel de poziție este excesivă.

Putem diviza clasificările şi din punctul de vedere al numărului de criterii îngăduite la un nivel dat. Dacă vom stipula regula că la un nivel dat al unei clasificări putem face uz în exclusivitate doar de un singur criteriu, atunci vom obține o specie de clasificări multinivelare cu criteriu unic pe un nivel. Această specie poate fi descrisă astfel:

$$crit\text{-}unic\text{-}niv\ (cl) = \forall x\, \forall y[(niv(x, N) \wedge niv\ (y, N))) \supset (sel(X) = sel(Y)) \quad (1o.3)$$

Dimpotrivă, dacă vom înlătura restricția stipulată mai sus, atunci vom admite clasificări în care două clase distincte situate pe acelaşi nivel N vor putea fi scindate după criterii diferite.

$$mult\text{-}cr\text{-}niv(cl) = \exists y\, \exists x\, ((niv(x,N) \wedge niv(y,N) \wedge sel(x) \neq sel(y) \quad (10.4)$$

Universitatea Spiru Haret

Putem avea, deci, clasificări cu criteriu unic pe un nivel şi clasificări cu criterii multiple pe un nivel.

Mai departe, din combinarea celor două criterii obţinem patru specii de clasificări plurinivelare

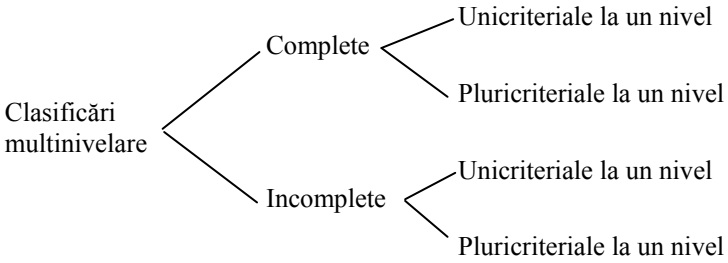


Fig.11 *Tipuri de clasificări multinivelare*

Evident putem lua în considerare şi alte criterii de clasificare a clasificărilor. De exemplu ,unii autori împart clasificările în naturale şi artificiale, după sursa de inspiraţie a criteriilor considerate.

Alţii disting între clasificările teoretice şi cele empirice sau inductive (vezi Gh. Enescu, *Tratat de logică*, Editura Lider, 1997, p. 76)

Un punct de vedere concludent ar putea fi, în plus, modul de dezambiguizare şi operaţionalizare a criteriilor.

O specie distinctă de clasificare este diviziunea sau *clasificarea dihotomică* în care criteriul de scindare îl constituie satisfacerea sau nesatisfacerea de către obiectele din clasa iniţială a exigenţelor unui predicat monadic.

Vom arăta, mai departe, că orice clasificare având un număr de clase mai mare decât 2 poate fi degenerată într-o clasificare dihotomică prin luarea drept criteriu al clasificării a unuia dintre descriptorii unei clase anterioare şi prin comasarea celorlalte clase sub eticheta negaţiei acestuia.

13. Proprietăţile formale ale compunerii clasificărilor

Am fost tentat să aplicăm în teoria clasificărilor unele noţiuni şi metode de logică dinamică cu semantică pe arbori. Ne-am gândit la posibilitatea descrierii compunerilor de clasificări cu ajutorul teoriei arborilor etichetaţi sau cu ajutorul unor acceptoare nedeterministe generatoare de limbaje formale care să descrie compunerile de clasificări.

Universitatea Spiru Haret

O primă întrebare pe care ne-am pus-o din această perspectivă este aceasta. Dacă aplicăm la o mulțime inițială M_0 mai întâi clasificarea cl1 şi apoi clasificarea cl2, respectiv compunem serial cl1;cl2, şi apoi procedăm invers şi aplicăm la mulțimea inițială M_0 secvența de clasificări cl2;cl1 vom obține rezultate diferite pentru cele două secvențe sau vom obține acelaşi set de clase terminale minime sau specii infime.

Surprinzător, dar este adevărată cea de a doua variantă. Secvențele de clasificări sunt *comutative.* Pentru acelaşi M_0 este satisfăcută relația:

cl1;cl2 = cl2;cl1 (13.1)

La fel, se poate arăta că secvențele de clasificări sunt asociative:

(cl1;cl2);cl3 = (cl1;(cl2;cl3) = (cl1;cl2;cl3) (13.2)

Pentru verificarea lui (13.1) să ne imaginăm două clasificări succesive descrise pe unul şi acelaşi arbore de clasificare de forma celor redate în figurile 7 şi 8. Să admitem că mulțimea inițială a clasificărilor noastre este o grupă sau un an de studii. Clasificăm studenții dintr-o grupă după criteriul grupei lor sangvine şi apoi pe studenții din fiecare grupă sangvină sau numai pe cei din grupa 0 îi clasificăm după rezultatele dobândite la învățătură în ultima sesiune de examene. Dacă vom face o clasificare completă şi dacă clasificarea după rezultate va fi cea descrisă în arborele din figura 5, în promovați, restanțieri şi repetenți, atunci în cazul unei clasificări complete după cele două criterii vom avea 12 clase terminale sau specii infime: studenți din grupa 0 promovați, studenți din grupa 0 restanțieri şi studenți din grupa 0 repetenți şi aşa mai departe.

Pentru construirea unei demonstrații formale reprezentăm pe doi arbori distincți, similari celor din figurile 7 şi 8, cele două secvențe de clasificări, cl1;cl2 şi cl2;cl1.

Pornim de la stare inițială M_0 şi aplicăm secvența cl1;cl2. Calculăm mai întâi mulțimile obținute după aplicarea primului criteriu c1 şi apoi aplicăm la fiecare dintre stările rezultate cel de al doilea criteriu c2 şi obțineți speciile terminale. Procedăm apoi invers, clasificând mulțimea inițială M_0 după criteriu c2 şi apoi aplicăm lafiecare dintre clasele rezultate clasificări după criteriul c1.

Mai rămâne să arătăm că prin cele două proceduri alternative cl1;cl2 şi cl2;cl1 identificăm aceiaşi mulțime de specii terminale şi că fiecare dintre speciile terminale obținute prin cele două proceduri alternative au aceiaşi intensiune, aceleaşi proprietăți.

Este important să observăm că în cazul criteriilor procedurale după care încadrăm un obiect într-o clasă, dacă şi numai dacă, aplicând

Universitatea Spiru Haret

asupra acestuia un anumit procedeu obținem un rezultat ce satisface anumite cerințe, în acest caz ordinea procedurilor nu e indiferentă. O procedură de testare presupune o secvență ordonată de operații şi aceasta nu satisface principiul comutativității.

În sfârşit este util să subliniem faptul că procedurile de verificare pot fi descrise cu ajutorul logicii dinamice ca teorie a posibilului acțional sau procedural.

14. **Clasificările multinivelare şi Prologul**

Reducerea teoriei clasificărilor la relații şi compuneri de relații ne sugerează un pas mai departe ce ar putea consta în scrierea unor instrucțiuni în Prolog.

Putem rescrie condițiile definiției 3 din capitolul 11 sub forma unor instrucțiuni Prolog .Convenim să notăm această rescriere prin Definiția 3*

*Definiția 3**. Numim *clasificare multinivelară* o structură

*SC** = *(r, r^+, niv, sel, T)*

unde:

1) *r* este o clasificare elementară *kr* conform definiției 1, reajustate relațional (vezi 6.1-6.3) care satisface:

a) *r (X,Y) :- kr(X,Y)*

2) r^+ este închiderea tranzitivă a lui *r*

a) r^+ *(X,Y) :- r (X,Y).*

b) r^+ *(X,Z) :- r (X,Y),* r^+ *(Y,Z).*

3) *niv* este o relație ce defineşte nivelurile unei clasificări multinivelare:

a) *niv (Mo, 0)*

b) *niv(Y,N+1) :- niv(X,N), r (X,Y).*

4) *sel* este funcția ce selectează criteriul de clasificare pentru clasele nou obținute:

sel: cln $\rightarrow$ *C, unde C este mulțimea criteriilor*

a) *Ci \ = = Cj: - sel (X, Ci), preced (Cj, Ci)* .

5) *T* este mulțimea claselor terminale (situate pe frunzele arborelui) rezultate prin clasificare)

a1) *clasă_terminală (S): -* r^+ *(Mo, S),(card(S, 1); cl([S,λ],[S])).*

a2) *mul_claselor_term (T): - bag of (S, clasă-terminală(S, T)).*

Universitatea Spiru Haret

Întrucât clasificările sunt reprezentate prin arbori, compunerile de clasificări vor putea fi descrise cu ajutorul conceptelor de arc şi drum.

Conceptul de arc a fost definit în capitolul 5, pe baza definiției formale a clasificării elementare (vezi 5.19)

Ne mai rămâne aici introducerea definiției curente a noțiunii de drum.

drum (X, Y): - arc (X, Y).
drum (X, Y): - arc (X, Z), drum (Z, Y).

Cu ajutorul conceptului de drum vom descrie, între altele, intensiunea claselor terminale ale unei clasificări, precum şi intensiunea unor obiecte $x \in Mo$ ce aparțin simultan la două sau mai multe clase terminale ale unor clasificări multinivelare diferite.

Fie *S* o clasă terminală dintr-o clasificare multinivelară *Clm* şi *x* un element al ei. Atunci intensiunea (explicită) a obiectului *x* dezvăluită de clasificarea *Clm* este conjuncția tuturor descriptorilor *Di* ce etichetează drumul de la *Mo* la *S*.

int (S) = ∧ Di: drum (Mo,U, S), subcuvânt (Arc,U))
etichetează (Di, Arc)

De exemplu, în clasificarea descrisă schematic în fig.8, dacă S = M22, intensiunea (explicită) a lui S va fi:

$Int\ (M22) = D_{22}(x) \wedge D_{11}(x) \wedge D_o(x)$

În acest caz drum (Mo,U, S) este alcătuit din două arce:

[[[Mo, c1],[D11, M11]],[[M11, c2],[D22, M22]]]

Putem, eventual căuta forme mai concise de etichetare. Mai întâi, în baza factuală vom urma uzanța Prolog şi vom scrie cu litere mici. Pentru intuitivitate vom putea adopta convenția unei duble etichetări a două noduri extreme:

(mo c1, d11, m11), (m11,c2, d22, m22)

Intensiunea explicită a întregii clasificări multinivelare va fi caracterizată de forma normală disjunctivă ce etichetează drumurile de la *Mo* la clasele terminale.

Intensiunea clasificării multinivelare complete cu criterii multiple pe un nivel redată în fig.7 din cap.7 este definită de forma normală disjunctivă

$Int(clm) = (D_{21}(x) \wedge D_{11}(x)) \vee (D_{22}(x) \wedge D_{11}(x)) \vee (D_{31}(x) \wedge D_{12}(x)) \vee (D_{32}(x) \wedge D_{12}(x)) \vee (D_{41}(x) \wedge D_{13}(x)) \vee (D_{42}(x) \wedge D_{13}(x)) \vee (D_{43}(x) \wedge D_{13}(x))$

Universitatea Spiru Haret

15. **Diagramele Karnaugh şi teoria clasificării**

Raporturile dintre mulțimile şi submulțimile generate într-o clasificare pot fi descrise convenabil şi cu ajutorul unor diagrame Karnaugh. Considerăm la început mulțimea univers M_0 a unei clasificări şi criteriul c1 ce se aplică acesteia. Obținem cele *m* subclase generate de clasificarea elementară rădăcină. Procesul se repetă în raport cu fiecare clasă generată, până când ajungem la speciile ultime.

Putem reda prin diagrame Karnaugh şi descriptorii generici asociați unei clase nou obținute.

Redăm prin diagrama Karnaugh clasificările redate prin arbori în fig.4 şi fig.7.

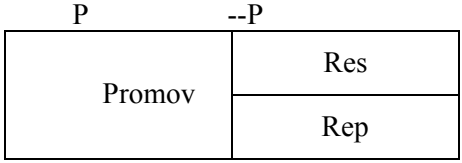


Fig. 12. *Diafragma Karnagh pentru clasificarea redată de fig.3 şi 4*

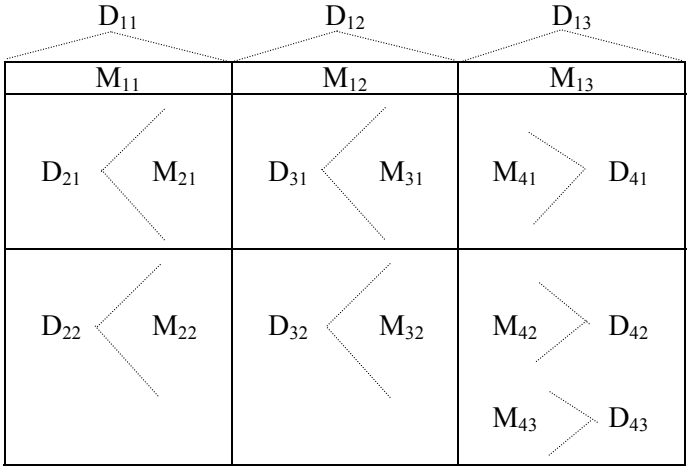


Fig. 13 *Reprezentarea prin diagrame Karnaugh a clasificării redate în fig. 7*

Este uşor de observat că fiecare clasă este descrisă printr-un simbol extensional M şi printr-un simbol intensional D.

Diagramele Karnaugh nu evidenţiază criteriul şi modul cum descriptorii identifică mulţimea de indivizi dintr-o clasă. În plus, diagramele gata constituite, nu evidenţiază procesul prin care, pornind de la mulţimea univers, s-a ajuns la identificarea claselor ultime.

Primul indice din D_{11}, M_{11},..., D_{43}, M_{43} desemnează criteriul ce a fost utilizat, cel de al doilea descrie numărul de ordine al descriptorului sau clasei generate de aplicarea criteriului.

Fig.12 descrie o clasificare cu două nivele, necompletă şi trei specii terminale. Fig.13 descrie o clasificare completă trinivelară, multicriterială pe nivelul doi şi având şapte clase terminale.

În clasificarea descrisă în fig.12 s-au utilizat 4 criterii distincte.

Reprezentarea clasificărilor multinivelare prin diagrame Karnaugh ne permite să identificăm, deopotrivă, intensiunea şi extensiunea claselor în cauză. Aşa, de exemplu, este uşor de observat că un element $x \in M_{42}$ satisface notele sau însuşirile $D_{42}(x)$ şi $D_{13}(x)$, dar nu satisface $D_{41}(x)$ sau $D_{12}(x)$.

Reprezentarea prin diagrame Karnaugh evidenţiază cu pregnanţă proprietăţile extensionale ale unei clasificări (elementare) corecte, evidenţiate de condiţiile 3b, 3c, 3d, şi 3e din definiţia 1 din capitolul 3. Clasele obţinute sunt disjuncte şi reuniunea lor acoperă clasa iniţială etc.

Speciile şi subspeciile obţinute au mereu mai puţine elemente decât clasele gen din care au fost obţinute.

Clasificările iterate sunt identificări de subclase mereu mai restrânse având cardinalii mai mici şi în acelaşi timp identificări de noi proprietăţi prin care membrii unei clase se despart în subclase.

Reprezentarea prin diagrame Karnaugh ne sugerează şi modul cum putem transforma o clasificare ce divide mulţimea iniţială în trei sau mai multe subclase într-o clasificare dihotomică. Dar de aceasta ne vom ocupa într-un capitol următor.

16. **Clasificările, arborii semantici şi formele normale disjunctive**

Am văzut în capitolul 7 mai multe moduri de a reprezenta grafic clasificările. Una dintre cele mai intuitive forme de reprezentare grafică a clasificărilor, este, desigur, cea prin arbori. Căci, aceasta ne permite să arătăm pentru fiecare clasificare elementară care-i este mulţimea iniţială, care-i este criteriul, care sunt clasele obţinute şi care sunt caracteristicile

Universitatea Spiru Haret

sau notele definitorii ale acestora (vezi fig. 7 din cap.7). În această reprezentare, nodurile desemnează clase, iar etichetele arcelor desemnează proprietăți sau note caracteristice ale claselor. Reprezentarea prin arbori pune în lumină şi modul de compunere a clasificărilor, ilustrând, deopotrivă, posibilitatea construirii unor clasificări complete sau incomplete, ca şi posibilitatea construirii unor clasificări unicriteriale sau pluricriteriale la un nivel.

Să revenim pentru moment la fig.7 din capitolul 7.

Câteva observații se impun:

1. La nivelul fiecărei clasificări elementare, predicatele ce etichetează arcele clasificării sunt mutual incompatibile iar disjuncția lor este o tautologie:

$$D1i \wedge D1j = 0 \qquad (16.1)$$

$$D_{11}(x) \vee D_{12}(x) \vee D_{13}(x) \qquad (16.2)$$

Formulele de mai sus redau prima clasificare descrisă în fig.7**.**

2. Clasele obținute sunt disjuncte şi reuniunea lor este echivalentă cu clasa inițială sau mulțimea de clasificat. (Vezi în acest sens condițiile 3) c) şi b) din Definiția 1 din capitolul 3). Formulele *(16.1)* şi *(16.2)* date la punctul 1 de mai sus reprezintă analogul intensional sau logic propozițional al caracterizării extensionale a cerințelor unei partiții (vezi Definiția 1 din cap 3, punctele b) şi c)).

3. O clasificare multinivelară poate fi interpretată ca o compunere de clasificări elementare, potrivit definiției date în 11.

4. În orice clasificare multinivelară reprezentată prin arce (vezi fig 7, în 7) conjuncția predicatelor ce etichetează intensiunea claselor descendente succesive dintr-un drum, pornind de la mulțimea inițială la clasele terminale, descrie intensiunea unei clase terminale iar disjuncția tuturor acestora descrie o forma normală disjunctivă.(De reținut că predicatele criterii nu sunt selectate, când parcurgem un drum pentru a identifica descriptorii unei clase terminale). În exemplul schematic, dat în fig.7 din 7 disjuncția etichetelor claselor terminale este redată in formula:

$$Int(clm) = (D_{21}(x) \wedge D_{11}(x)) \vee (D_{22}(x) \wedge D_{11}(x)) \vee (D_{31}(x) \wedge D_{12}(x)) \vee (D_{32}(x) \wedge D_{12}(x)) \vee (D_{41}(x) \wedge D_{13}(x)) \vee (D_{42}(x) \wedge D_{13}(x)) \vee (D_{43}(x) \wedge D_{13}(x))$$

5. Analiza semantică a formulei de mai sus pune în evidență faptul că aceasta este o tautologie.

6. Forma normală disjunctivă construită pe cale menționată mai sus (vezi, în special, exigențele redate în formulele menționate în observația 1) poate fi testată prin metoda rezoluției duale.

Universitatea Spiru Haret

7. Orice clasificare elementară ce scindează mulțimea inițială în n clase disjuncte caracterizate de tot atâția descriptori, poate fi redusă la un număr de n-1 diviziuni succesive prin care se obțin aceleaşi clase terminale, cu aceiaşi descriptori.

Dorim să ilustrăm enunțul din observația 7 printr-un exemplu banal. Presupunem că dorim să clasificăm rezultatele la învățătură ale unei clase de elevi sau grupe de studenți. Mulțimea Univers sau clasa inițială o constituie elevii din clasă sau studenții dintr-o grupă sau an de studiu. Criteriul pe care îl luăm este numărul de discipline „picate" de către un elev sau student. Fixăm prin procedeul de operaționalizare a criteriului următoarele puncte „nodale": 0, 3, n şi respectiv intervalele: [0,0],[o,3], [3,n].Obținem astfel clasificarea:

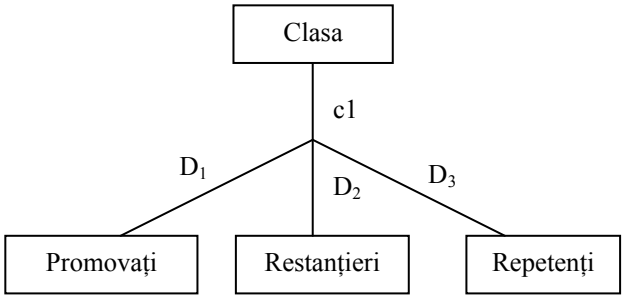


Fig.14. *O clasificare elementară cu 3 clase terminale*

Operaționalizarea criteriului nr de examene „picate" poate fi făcută în mai multe feluri:

D1(x) = x are_zero_examene_picate(x), i.e. x = 0

D2(x)= x are_intre_ 1 _şi_3_examine_picate, i.e. $0< x \leq 3$

D3(x)= x are_mai_mult_de_3_examene_picate, i.e. $3< x$

Putem opta pentru o altă cale de a descrie operaționalizarea criteriului de clasificare, luând ca primitiv predicatul binar 'examene_nereuşite(x, y)' şi apoi să definim notele definitorii ale celor 3 clase prin precizarea intervalelor între care poate varia variabila y:

$D1^{\#}(x)$ = nr._ examene_nereuşite(x, y) $\wedge$ y = 0

$D2^{\#}(x)$ = nr._ examene_nereuşite(x, y) $\wedge$ $0 < y \leq 3$

$D3^{\#}(x)$ = nr._examene_nereuşite(x, y) $\wedge$ $3 < y \leq$ n, unde n este numărul examenelor din sesiune.

Universitatea Spiru Haret

În sfârşit, putem lua ca predicat primitiv formula 'examene_susținute (Stud, Discipl, Nota) şi apoi prin definiții adecvate să obținem aceleaşi clase terminale:

D1(x) =$\forall$y(examene susținute (x,y,z) $\supset$ z $\geq$ 5

D2(x) =$\exists$y$\exists$z(examene susținute (x,y,z) $\wedge$ z $\leq$ 4 $\wedge$ 1$\leq$ card(y)$\leq$ 3)

D3(x) =$\exists$y$\exists$z(examene susținute (x,y,z) $\wedge$ z $\leq$ 4 $\wedge$ 1$\leq$ card(y)$\geq$ 4.

17. **Relaţia dintre clasificări şi diviziuni**

Clasificarea de mai sus poate fi redusă la o compunere de două clasificări dihotomice sau la o compunere de două diviziuni, descrise în detaliu în capitolul 7.

Pentru transformarea unei clasificări cu n clase terminale într-o suită de diviziuni cu aceleaşi clase terminale vom proceda în felul următor:

1. Identificăm descriptorul primei clase pe care îl declarăm drept criteriu al primei diviziuni. Obținem astfel o diviziune a mulțimii inițiale în prima clasă, ce satisface criteriul şi într-o a doua clasă, ce va cuprinde restul claselor, ce nu satisfac criteriul primei diviziuni;

2. La rândul lui, „restul" va deveni mulțime inițială pentru o nouă diviziune, care va lua drept criteriu predicatul ce caracterizează intensiunea celei de a doua clase terminale din clasificarea inițială.

3. Procedeul se repetă până la obținerea ultimei clase terminale.

Raționamentul urmat mai sus este similar cu cel utilizat în Prolog, când scindăm succesiv o listă în „cap" şi „rest" şi apoi „rest"-ul într-un nou „cap" şi un nou rest.

Propunem cititorului interesat să considere noi exemple de clasificări care vizează rezultate ale unor activități umane, cum ar fi, de exemplu, rentabilitatea unei firme, nivelul de performanță al unor atleți, sau nivelul de performanță al unor echipe. Un bun şi instructiv exemplu l-ar putea constitui clasificarea nivelului de randament al unor maşini.

Este evident că în toate aceste cazuri teoria clasificărilor se dezvoltă în vecinătatea unei teorii a judecăților de valoare. De unde concluzia noastră după care teoria clasificărilor este intim corelată cu teoria judecăților de valoare. Vom vedea mai departe că teoria judecăților de valoare relativizate la agenți, situații acționale, abilități şi criterii de selecție va putea fi descrisă în cadrul logicii acceptării ca o variantă de logică trivalentă sau ca o variantă de logică modală.

Universitatea Spiru Haret

18. **Diviziunea, expandarea şi rezoluţia dual simetrică**

Diviziunea este o operaţie logico-semantică analitică prin care se scindează domeniul de referinţă al unui concept descris printr-un predicat, in doua mulţimi distincte după modul in care elementele acesteia satisfac sau nu cerinţele predicatului având rolul de criteriu.

Definiţia 18.1. Numim *diviziune* o structură:

$D = < p, M, c, M_1, M_2 >$ (18.0)

unde:

1) p este un predicat;

2) M este o mulţime reprezentând domeniul de referinţă al predicatului p;

3) c este un predicat jucând rolul de criteriu;

4) M_1, M_2 sunt submulţimi din M;

a) $M_1 = \{ x \in M: c(x)\}$

b) $M_2 = \{ x \in M: \sim c(x)\}$

5) $\forall x (x \in M \supset p(x) \wedge (c(x) \vee \sim c(x)))$

Se observă că din 4) a) şi 4) b) rezultă:

$M_1 \cap M_2 = \phi$ (b)

$M_1 \cup M_2 = M$ (c)

care arată că submulţimile obţinute prin diviziune sunt disjuncte şi că reuniunea acestora acoperă mulţimea iniţială sau domeniul de referinţă.

Într-adevăr, un element $x \in M_1 \cap M_2$ ar trebui să satisfacă in acelaşi timp c(x) şi ~c(x), ceea ce este logic imposibil. Prin urmare, M_1 şi M_2 vor fi mulţimi disjuncte, căci intersecţia lor este vidă.

În mod analog, un element $x \in M_1 \cup M_2$ va trebui sa satisfacă condiţia tautologica $q(x) \vee \sim q(x)$, ceea ce înseamnă absenţa oricărei restricţii.

Condiţia 5) descrie o expandare a predicatului p in raport cu o pereche opusă de literali proveniţi din predicatul c, pe post de criteriu al diviziunii. Orice diviziune, aşadar, înseamnă o determinare suplimentară la nivel intensional.

Particularitatea unei diviziuni rezidă in scindarea in doua a domeniului de referinţă al unui predicat ce caracterizează un concept. Astfel extensiunea predicatului student(x), divizată după criteriu sex se scindează in doua mulţimi distincte: studenţi bărbaţi si studenţi femei (studenţi nonbărbaţi). Mai departe, dacă subdiviziunile obţinute „bărbaţi" şi „nonbărbaţi" sau „femei" se vor diviza, la rândul lor, după criteriul „student în an terminal" vom obţine speciile: bărbaţi_în_an_terminal, bărbaţi_în_an_nonterminal, nonbărbaţi_în_an_terminal,

Universitatea Spiru Haret

nonbărbați_în_an_nonterminal. Putem lua în considerare pentru speciile sau subdiviziunile obținute mai sus şi alte criterii de divizare. De exemplu, un criteriu următor ar putea fi „student la o facultate cu profil umanist" sau „student la o facultate cu profil neumanist"; alt criteriu ar putea fi predicatul bursier(x) sau nebursier(x).

Definiția18.2. Numim *diviziune multinivelară* (cu criteriu unic pe fiecare nivel) o structură

$MD = < p, M, C, \{ (M_{i1}, M_{i2}) \mid 1 \le i \le n\} >$

unde:

1) p este un predicat;

2) M este o mulțime reprezentând domeniul de referință al predicatului p;

3) $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ criteriile diviziunii, câte unul pe fiecare nivel;

4) (M_{i1}, M_{i2}) perechi de submulțimi din M obținute la nivelul i al diviziunii multinivelare;

a) i cu $1 \le i \le n$, nivelul curent al diviziunii, având drept criteriu pe c_i;

b) $M_{i1} = \{ x \in M: c_i(x)\}$

c) $M_{i2} = \{ x \in M: \sim c_i(x)\}$

5) $\forall x (x \in M \supset p(x) \wedge ((c_1(x) \vee \sim c_1(x)) \wedge (c_2(x) \vee \sim c_2(x)) \wedge ... \wedge (c_n(x) \vee \sim c_n(x)))$

6) Nivelurile unei diviziuni sunt i = 0,1, ..., n iar numărul subdiviziunilor unui nivel $sd(i) = 2^1$

Observații

Obs. 1. O diviziune multinivelară cu criteriu unic pe fiecare nivel poate fi văzută, in esență, ca un şir de perechi opuse de literali cărora li se asociază perechi disjuncte de mulțimi. Mulțimea inițiala M este descrisă de predicatul p. În continuare, fiecare nivel are un criteriu exprimat printr-o pereche de literali $(c_i, \sim c_i)$, căreia i se asociază doua mulțimi disjuncte (M_{i1}, M_{i2}), unde prima satisface predicatul c_i, iar cea de a doua predicatul $\sim c_i$.

Obs. 2 Cel de al doilea termen din consecventul condiției 5), $((c_1(x) \vee \sim c_1(x)) \wedge (c_2(x) \vee \sim c_2(x)) \wedge ... \wedge (c_n(x) \vee \sim c_n(x)))$ este o conjuncție de iterări ale principiului terțului exclus. Aceasta descrie principiul expandării unei expresii exprimat curent prin legea logică:

$A \equiv A \wedge (B \vee \sim B) \equiv AB \vee A\sim B$.(18.4)

Obs. 3 Aplicarea legilor de distributivitate la principiul expandării exprimat în consecventul condiției 5) duce la obținerea formei normale

Universitatea Spiru Haret

disjunctive perfecte pentru perechile de literali (c_i, $\sim c_i$) care alcătuiesc criteriile diviziunii multinivelare.

Obs. 4 Fiecare termen al formei normale disjunctive perfecte caracterizează intensiunea unei specii ultime rezultate din aplicarea tuturor celor n criterii de divizare. Ea este o conjuncţie de literali ce caracterizează un model sau o situaţie alternativă.

Obs. 5 Intensiunea unei diviziuni şi forma normală disjunctivă perfectă asociată acesteia poate fi redată intuitiv printr-un arbore binar etichetat prin perechi opuse de literali. Din fiecare nod al unui astfel de arbore pleacă doua arce etichetate prin c_i si $\sim c_i$.

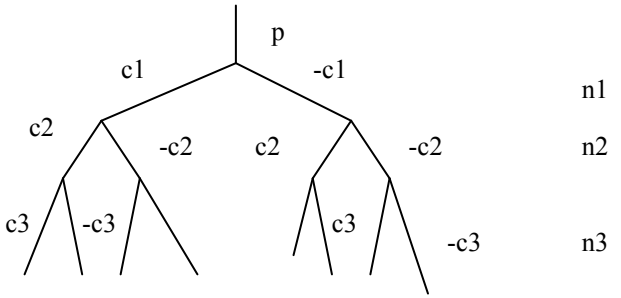


Fig. 15. *Reprezentarea prin arbori binari etichetaţi a unei diviziuni multinivelare utilizând un singur criteriu pe un nivel*

Se observa ca fiecare drum in arbore descrie un termen al formei normale disjunctive perfecte: $pc_1c_2c_3$, $pc_1{\sim}c_2c_3$, ..., $p{\sim}c_1{\sim}c_2{\sim}c_3$. Predicatul p, ce descrie proprietatea mulţimii univers M, apare in fiecare specie.

Obs. 6 Diviziunile multinivelare pot fi redate grafic şi prin diagrame Karnaugh.

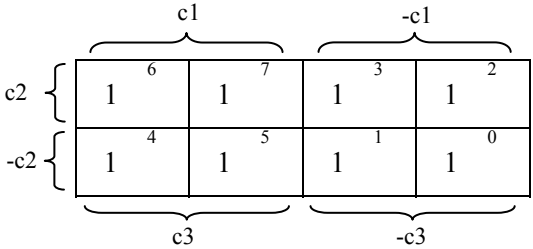


Fig. 16 *Reprezentarea prin diagrame Karnaugh a diviziunilor multinivelare*

Universitatea Spiru Haret

Fiecare dreptunghi marcat prin 1 descrie un constituent de 1 (conjuncție elementară sau termen al formei normale disjunctive). Fiecare pătrat a fost notat in coltul din dreapta sus prin numărul natural ce corespunde descrierii in binar a conjuncției elementare ce descrie specia. Aşa, de exemplu, pătratul 5 descrie $c_1 \wedge \sim c_2 \wedge c_3$, respectiv $c_1 \sim c_2 c_3$, 101, 4+0+1=5.

Obs. 7 Rezultatul unei diviziuni, mulțimea speciilor terminale şi atributele acestora nu depinde de ordinea aplicării pe nivele a criteriilor. Aceasta deoarece descripția speciilor se face prin conjuncții de literali sau prin intersecții de mulțimi şi ambele sunt simetrice şi asociative.

Obs. 8 Atât in definiția 18.1, cât şi in definiția 18.2, putem face abstracție de predicatul p ce descrie proprietățile mulțimii de referință M. În acest caz, o diviziune elementară este descrisă de o structura cu trei componente: o mulțime M, un criteriu c şi o pereche (M_1, M_2) rezultată din scindarea lui M după criteriul c. Definiția18.2, la rândul ei, se reduce la o structură de trei componente, $(M, C, \{ (M_{i1}, M_{i2}) \mid 1 \leq i \leq n\})$, respectiv la o mulțime de referință M, o lista de criterii şi o listă de perechi de mulțimi rezultate din aplicarea la fiecare nivel a unui criteriu unic.

Am afirmat mai sus că există o legătură intre operația de expandare a unei formule prin introducerea unor noi variabile şi operația de divizare multinivelară. Numim *expandare* sau dezvoltare a unei conjuncții elementare o formula echivalentă cu aceasta in structura căreia intră, in plus, o pereche opusă de literali.

Sunt bine cunoscute in algebra logică legile:

$A \equiv A \wedge 1$ (a)

$1 \equiv B \vee \sim B$ (b)

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (c)

Pe baza acestor legi putem expanda o formulă prin adăugarea unei perechi opuse de literali ce descrie un criteriu de divizare:

$p \equiv p \wedge 1 \equiv p \wedge (c_i \vee \sim c_i) \equiv p \wedge c_i \vee p \wedge \sim c_i$ (d)

Mai departe, formulele obținute pot fi extinse printr-un nou criteriu c_{i+1}:

$p \wedge c_i \wedge (c_{i+1} \vee \sim c_{i+1}) \equiv (p \wedge c_i \wedge c_{i+1}) \vee (p \wedge c_i \wedge \sim c_{i+1})$

$p \wedge \sim c_i \wedge (c_{i+1} \vee \sim c_{i+1}) \equiv (p \wedge \sim c_i \wedge c_{i+1}) \vee (p \wedge \sim c_i \wedge \sim c_{i+1})$ (e)

Deci:

$p \equiv p \wedge c_i \wedge c_{i+1} \vee p \wedge c_i \wedge \sim c_{i+1} \vee p \wedge \sim c_i \wedge c_{i+1} \vee p \wedge \sim c_i \wedge \sim c_{i+1}$ (f)

Pe această cale, diviziunea iterată poate fi corelată cu operația de expandare. Mai departe, legile de expandare duc la construirea unei forme normale disjunctive perfecte asociate unei diviziuni multinivelare.

Universitatea Spiru Haret

Teorema 17. A. Oricărei diviziuni multinivelare cu n nivele şi având criteriu unic pe un nivel putem să-i asociem o formă normală disjunctivă perfectă având 2^n termeni ce descriu speciile ultime rezultate din diviziune.

Demonstraţie

Fie MD o diviziune multinivelară cu criteriu unic pe fiecare nivel:

$MD = < p, M, \{c_1, c_2, ..., c_n\}, \{ (M_{i1}, M_{i2}) \mid 1 \le i \le n\} >$

Atunci, potrivit condiţiei 5) din definiţia18.2), pentru orice $x \in M$ avem:

$$p(x) \wedge ((c_1(x) \vee \sim c_1(x)) \wedge (c_2(x) \vee \sim c_2(x)) \wedge ... \wedge (c_n(x) \vee \sim c_n(x))) \quad (1)$$

Din (1), utilizând legile algebrei logicii (a), (b) şi (c), obţinem:

$$p(x)c_1(x)c_2(x)...c_n(x) \vee p(x)c_1(x)c_2(x)...\sim c_n(x) ... \vee p(x)\sim c_1(x) \sim c_2(x)... \sim c_n(x), \quad (2)$$

care este forma normala disjunctiva perfecta (scrisa fără semnul conjuncţiei) care repetă predicatul p(x), descriptorul mulţimii de referinţă M.

Dacă, potrivit observaţiei 7, excludem din definiţia 7 pe p(x), descriptorul mulţimii de referinţă, atunci formula (2) va conţine, in exclusivitate, forma normală disjunctivă perfectă obţinută prin expandarea criteriilor $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$c_1(x)c_2(x)...c_n(x) \vee c_1(x)c_2(x)...\sim c_n(x) ... \vee \sim c_1(x) \sim c_2(x)... \sim c_n(x) \quad (3)$$

Teorema de mai sus ne arată că pornind de la o diviziune multinivelară cu n nivele putem întotdeauna construi o formă normală disjunctivă perfectă având 2^n termeni (adică o tautologie) care caracterizează speciile ultime rezultate din divizarea iterativă după o lista de criterii.

Este legitim sa ne întrebam daca, fiindu-ne dată o formă normală disjunctivă perfectă ce conţine un număr n de atomi, putem, reciproc, identifica diviziunea multinivelară ipotetică pe care o caracterizează acea formă normala disjunctivă perfectă.

Teorema 17. B. Fiind dată o formă normală disjunctivă perfectă tautologică putem identifica o diviziune binară multinivelară ale cărei specii ultime sunt descrise de termenii formei normale disjunctive perfecte.

Demonstraţie

Fie F o formă normală disjunctivă perfectă in care apar n variabile sau n atomi predicativi. Atunci:

$$i = 2^n$$

$$F = \vee_{i=1} k_i$$

Universitatea Spiru Haret

unde $k_i = l_1 \wedge ... \wedge l_j \wedge ... l_n$ iar l_j este un literal provenit dintr-o lista de variabile propoziţionale $V= x_1, x_2, ..., x_n$ sau dintr-o lista de atomi predicativi $A = A_1, A_2, ..., A_n$.

Întrucât F este o formă normală disjunctivă perfectă tautologică, F va avea 2^n termeni sau conjuncţii elementare. Dacă lista de variabile sau de atomi cuprinde n variabile sau atomi, atunci fiecare variabilă sau atom va apare de $2^n/2$ ori ca literal pozitiv şi tot de atâtea ori ca literal negativ. Fie x_i, $1 \le i \le n$ o astfel de variabila. Atunci putem scinda mulţimea de conjuncţii F în doua mulţimi complementare:

$$F = x_i \wedge tau(n-1, V \setminus \{x_i\}) \vee \sim x_i \wedge tau(n-1, V \setminus \{\sim x_i\}) \quad (3)$$

una care conţine variabila x_i conjugată cu o tautologie având n-1 variabile şi anume toate celelalte variabile din care s-a exclus variabila x_i, atât in aparitiile sale pozitive, cât şi in aparitiile sale negative.

Printr-o lege de distributivitate sau „factor comun", (3) poate fi scrisa ca:

$$F = (x_i \vee \sim x_i) \wedge tau(n-1, V \setminus \{x_i\} \cup \{\sim x_i\}) \quad (4)$$

Mai departe, expresia $tau(n-1, V \setminus \{x_i\} \cup \{\sim x_i\})$ poate fi, la rândul ei, redusă, în aceeaşi manieră, prin scindarea tautologiei rămase în funcţie de o alta variabilă x_j, ajungându-se la:

$$F = (x_i \vee \sim x_i) \wedge (x_j \vee \sim x_j) \wedge tau(n-1, V \setminus \{x_i\} \cup \{\sim x_i\} \cup \{x_j\} \cup \{\sim x_j\}) \quad (5)$$

Procesul se repeta până când ajungem la $tau(n-(n-1))$, respectiv la o tautologie cu termeni ai formei normale disjunctive perfecte alcătuiţi dintr-un singur literal. În această situaţie:

$$F = (x_1 \vee \sim x_1) \wedge (x_2 \vee \sim x_2) \wedge ... \wedge (x_n \vee \sim x_n) \quad (6)$$

Ilustram printr-un caz concret cursul demonstraţiei de mai sus. Fie o forma normală disjunctivă perfectă tautologică cu V= {p,q,r.} Atunci:

$F = pqr \vee pq\sim r \vee p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim pqr \vee \sim pq\sim r \vee \sim p\sim qr \vee \sim p\sim q\sim r$ (a)

$F = p(qr \vee q\sim r \vee \sim qr \vee \sim q\sim r) \vee \sim p(qr \vee q\sim r \vee \sim qr \vee \sim q\sim r)$ (b)

$F = p \vee \sim p\ (qr \vee q\sim r \vee \sim qr \vee \sim q\sim r)$ (c)

$F = (p \vee \sim p)\ [q(r \vee\sim r) \vee \sim q(r \vee \sim r)]$ (d)

$F = (p \vee \sim p)(q \vee \sim q)(r \vee \sim r)$ (e)

Pentru cazul când avem de a face cu atomi predicativi intervine in plus problema substituţiei unificatoare şi instanţiatoare care să transforme un predicat sau o propoziţie potenţială intr-o propoziţie factuală.

Formulele (6) şi (e) de mai sus ne arată cum putem obţine satisfacerea condiţiilor (3) şi (5) din definiţia 18.1, respectiv cum putem

Universitatea Spiru Haret

obţine criteriile diviziunii implicate in orice formă normală disjunctivă perfectă tautologică. Condiţia (3) din demonstraţia noastră ilustrează operaţia de divizare a unei mulţimi de obiecte M după un criteriu x_i. Primului termen al disjuncţiei îi vom asocia mulţimea M_{i1} care satisface criteriul x_i iar celui de al doilea termen mulţimea M_{i2} care nu satisface criteriul x_i. Prin aceasta vor fi satisfăcute şi criteriile 4), 6) si 7) din definiţia 18.1.

Teorema 17. C. Fie $V = p_1, ..., p_n$ o lista de variabile propoziţionale sau $A = A_1, A_2, ..., A_n$ o lista de atomi predicativi cu 2^n termeni în logica propoziţiilor sau în logica predicatelor. Atunci din F derivă rezolutiv dual simetric clauza tautologică, i.e. $F \vdash_{sdr} \blacksquare$.

Demonstraţie

Fie F o formă normală disjunctivă perfectă cu 2^n termeni şi $V = p_1, ..., p_n$. Atunci:

$i = 2^n$

$F = \vee k_i$

$i = 1.$ (1)

şi unde un termen k_i este:

$k_i = \wedge l_j$ cu $1 \leq j \leq n$ (2)

este o conjuncţie consistentă de literali distincţi de rang n. Fie p_i, $1 \leq i \leq n$ o variabila din V. Atunci într-o conjuncţie oarecare k_i, variabila p_i va apare o singura data, fie sub forma p_i, fie sub forma $\sim p_i$. Vom avea in F $2^n/2$ apariţii pozitive ale lui p_i şi tot atâtea apariţii negative.

Alegem o variabila p_i din V sau un atom A_i din A şi calculăm toţi rezolvenţii duali simetrici in literalul p_i sau A_i din setul F. Obţinem pe aceasta cale un număr de $2^n/4$ rezolvenţi duali simetrici, respectiv conjuncţii elementare de rang n-1 din care au dispărut literalii p_i, $\sim p_i$. Selectăm apoi din $V\backslash\{p_i\}$ un alt literal, să zicem l_j, şi calculăm rezolvenţii duali simetrici in l_j din mulţimea conjuncţiilor elementare de rang n-1.

Procedeul se repetă de n ori, până când dispar toţi cei n literali opuşi şi obţinem ca rezolvent dual simetric clauza tautologică.

Exemplu

$F = pqr \vee pq\sim r \vee p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim pqr \vee \sim pq\sim r \vee \sim p\sim qr \vee \sim p\sim q\sim r$

1 2 3 4 5 6 7 8

$V = \{p, q, r\} n = 3, 2^n = 8$ $rn(k_i) = 3$

Alegem drept literal de rezoluţie dual simetrică literalul p şi obţinem rezolvenţii duali simetrici:

Universitatea Spiru Haret

9. qr (1,5)10. q~r (2,6)11. ~qr (3,7)12. ~q~r (4,8)

V1 = V \ {p}

Conjuncțiile elementare 9, 10, 11, 12 sunt de rang 2 şi sunt scrise in alfabetul V1. Alegem din V1 un nou literal de rezoluție, pe q. Calculăm rezolvenții duali simetrici in literalul q din clauzele de rang 2.

13. r (9,11)14. ~r (10,12)

V2 = V1 \ {q} = {r}

Calculăm rezolvenții duali simetrici din clauzele 13 si 14 şi obținem clauza tautologică ■

15. ■ (13,14)

Observații

Obs. 1 Rezoluția duală simetrică poate fi înțeleasă ca o operație de abstractizare şi generalizare. Facem pe rând abstracție de câte un descriptor sau criteriu şi reținem numai notele comune. Mai exact, a *face o rezoluție duală simetrică din clauzele k_1 şi k_2 în literalul p înseamnă a face abstracție de p şi a reține descriptorii comuni din clauzele k_1 şi k_2. Abstractizarea* vizează abandonarea unor note, descriptori sau predicate şi *ține de intensiunea conce*ptelor. Generalizarea vizează extinderea domeniului de referință şi priveşte extensiunea conceptelor. *Determinarea este opusă abstractizării şi poate fi asociată cu diviziunea.*

Obs. 2 Şi in teoria logico-matematică a diviziunii pe care o propunem aici se conservă legea raportului invers dintre conținutul sau intensiunea unui concept şi extensiunea acestuia. Cu cât un concept este intensional mai bogat, i.e. are mai multe predicate ce-l caracterizează sau se formulează restrictiv mai multe criterii ce trebuie satisfăcute, cu atât extensiunea sa este mai restrânsă. În teoria diviziunii conținutul cel mai bogat îl au speciile ultime ale unei diviziuni, care cumulează consistent notele diviziunilor anterioare.

Obs. 3 Formele normale disjunctive perfecte pot fi interpretate ca explorări de etichetări posibile după anumite criterii date, ca lumi posibile sau mulțimi de modele semantice ce satisfac formula inițială sau setul de formule inițiale din care au fost obținute. Evident, ele pot fi folosite şi pentru evaluarea raporturilor dintre datele sau ipotezele unei probleme şi soluția acesteia sau bazele de cunoştințe asociate acestora.

Am încercat în acest capitol o regândirea a teoriei clasificărilor şi diviziunilor din perspectiva teoriei inferențelor şi din perspectiva bazelor de cunoştințe şi a programării logice.

Universitatea Spiru Haret

Teoria clasificărilor, ca şi teoria definiţiilor, a fost pe nedrept exclusă din tratatele de logică modernă. Am încercat să înlăturăm unele prejudecăţi susţinute în logica tradiţională despre clasificări, cum ar fi cerinţa de a folosi un singur criteriu pe un nivel. Dar mai importante decât corecturile aduse tradiţiei credem că sunt dezvăluirea corelaţiilor subtile dintre teoria diviziunilor şi formele normale disjunctive perfecte sau dintre rezoluţia dual㠄 simetrică şi teoria diviziunii.

Am prezentat trei formalisme alternative pentru descrierea clasificărilor elementare care permit descrierea proprietăţilor formale ale acestora. Primul prezintă clasificarea ca o operaţie, al doilea o înfăţişează ca o relaţie ternară şi ultimul ca o relaţie binară. Ultimul formalism l-a folosit pentru a descrie uniform clasificările multinivelare în ipostaza de compuneri ale clasificărilor elementare văzute ca relaţii binare.

Am încercat să privim clasificările, nu doar extensiv, ca nişte partiţii, ci ca nişte operaţii intensionale care angajează relaţiile de ordine şi operaţiile de inferenţă.

Am făcut, totodată, unii paşi în direcţia legării teoriei clasificărilor şi diviziunilor de teoria inferenţelor şi de teoria demonstraţiei automatizate. Clasificarea nu este doar o operaţie materială de repartizare a unei mulţimi de obiecte în clase distincte, după gradul lor de asemănare, ci şi un demers intelectual analitic, abstract, de explorare a lumii reale, dar şi a posibilului logic. Conexiunea teoriei clasificărilor şi diviziunilor cu formele normale disjunctive şi cu arborii semantici, cu rezoluţia dual㠄, cu teoria abstractizării şi determinării claselor de obiecte ne pare una promiţătoare, care poate face studiul unor cercetări ulterioare.

Am făcut unii paşi înainte în problema subtilă a criteriilor de clasificare şi mai ales în problema operaţionalizării criteriilor de clasificare prin procedurile de măsurătoare, prin definiţii operaţionale şi prin procedee logice sau algoritmi de decizie.

Intenţia noastră principală a fost de a reintroduce studiul definiţiilor şi al clasificărilor în logica matematică computaţională, de a resuscita interesul pentru teoria modernă a conceptului.

Probleme de teoria clasificării

1. La ce nivel operează clasificarea: ontic, lingvistic sau conceptual?
2. Relaţia dintre definiţii şi clasificări
3. Partiţii şi clasificări
4. Teoria laticelor şi clasificările

Universitatea Spiru Haret

5. Elementele unei clasificări. Mulțimi de clasificat, criterii şi clase. Clasificări uninivelare şi clasificări multinivelare
6. Criterii, măsurători şi definiții operaționale
7. Descrierea funcțională a clasificărilor
8. Interpretarea relațională a clasificărilor
9. Interpretarea clasificărilor elementare ca relații binare
10. Reprezentarea grafică a clasificărilor
11. Clasificările elementare şi schemele de inferență
12. Clasificările alternative şi schemele de inferență
13. Compunerea clasificărilor
14. Clasificările multinivelare
15. Tipuri de clasificări multinivelare
16. Proprietățile formale ale compunerii clasificărilor
17. Clasificările multinivelare şi programarea logică
18. Diagramele Karnaugh şi teoria clasificării
19. Clasificările, arborii semantici şi formele normale disjunctive
20. Relația dintre clasificări şi diviziuni
21. Diviziunea, expandarea şi rezoluția duală simetrică.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 6. **LOGICA MODALĂ ALETICĂ**

1. **Geneza logicii modale moderne. Implicaţia materială şi implicaţia strictă**

Termenul de logică modală se foloseşte în sens restrâns pentru logica modală aletică, care descrie implicaţia strictă sau inferenţa logică care conservă adevărul şi logica modală în sens larg care dă seama şi de alte specii de logică modală, cum sunt logicile epistemice, doxastice, temporale, dinamice, deontice, teleologice, logica acceptării, etc.

După Melvin Fitting, logicile modale au ca obiect adevărul calificat ca necesar, posibil, adevărat după o anumită acţiune, sau calificat ca: obligatoriu, cunoscut, cognoscibil, credibil, demonstrabil, de acum încolo *(from now on),* începând de la data, până la data.

Putem lua în considerare şi modalităţi procedurale sau dinamice.

$[\pi]p$ = „p va fi întotdeauna adevărat după executarea programului π”

$<\pi>p$ = „p va fi cel puţin o dată adevărat după executarea programului π”

Pe de altă parte, atât necesarul cât şi posibilul pot avea sensul de necesar logic, fizic sau acţional şi pot fi relativizate la circumstanţe sau agenţi.

Au fost propuse şi alte specii de modalităţi, cum ar fi cele intenţionale sau teleologice, axiologice.

Dar să revenim puţin la apariţia sistemelor de logică modală în deceniul al doilea din secolul 20. Creatorul logicii modale moderne a fost americanul Clarence Irving Lewis.

Prima versiune de logică modală modernă este logica modală aletică creată de C.I. Lewis în A Survey of Symbolic Logic, 1918 şi reluată mai târziu, în 1932, în Symbolic Logic, scrisă în colaborare cu C.H. Langford.

Apariţia lucrării lui A.N. Whitehead şi B. Russell Principia Mathematica a pus în circulaţie idea de implicaţie materială $p \supset q$, dacă

Universitatea Spiru Haret

p atunci q, care descrie relații de condiționare între diferite clase de evenimente şi acțiuni, dar care nu descrie satisfăcător relația consecință logică, cercetată de peste 3 milenii de către logicieni.

Implicația materială, după cum se ştie, este adevărată ori de câte ori antecedentul este fals. Or, aceasta nu convine relației de implicație logică sau consecință logică, căci relația de decurgere logic necesară nu are loc când premisele sunt false. Trebuia, aşadar, stipulată condiția adevărului premiselor, menținută şi întărită ideea implicației materiale pentru a putea conchide, în mod necesar, asupra adevărului consecinței. Or, aceasta ne duce la un *Modus Ponens* „întărit" de tipul axiomei specifice sistemului K.

$p \supset q$	$L(p \supset q)$	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$	(L MP)
p	Lp	*Modus Ponens*	
----------	----------		
q	Lq		

Pe prima coloană apare schema de inferență *Modus Ponens*. Pe a doua coloană apare *Modus Ponens* „întărit", respectiv un *Modus Ponens* între formule logic necesare, care conservă, în trecerea de la premise la concluzie, validitatea. Pe a treia coloană, am scris *Modus Ponens* „întărit" ca formulă logic modală (axioma specifică lui K).

O interpretare majoră a logicii modale aletice este ca teorie a demonstrabilității *(provability theory)*.

La originea cercetărilor moderne de logică modală a stat cercetarea lui C.I. Lewis despre implicația strictă. Nesatisfăcut de implicația materială, care descria raporturile de dependență şi condiționare, şi nu punea în evidență particularitățile relației de consecință logică, C.I. Lewis a căutat o accepție a termenului de implicație care să dea seama de relația de derivabilitate logică. Autorul american căuta „un calcul bazat pe o implicație în care p implică q să fie sinonim cu q este deductibil din p" [37, p122]

Dar să revenim la concepția lui C.I. Lewis. Dacă q se deduce din p, atunci este imposibil ca p să fie adevărat şi q să fie fals. Convenim să notăm derivarea logică sau implicația strictă a lui Lewis prin simbolul $\Rightarrow$, în absența simbolului utilizat de Lewis, litera γ aşezată orizontal cu „coarnele" la dreapta. Atunci, în accepția lui C.I. Lewis implicația logică este definită:

DL $p \Rightarrow q \equiv -M(p \wedge -q) \equiv L(p \supset q)$

Teza despre imposibilitatea admiterii, într-un raționament valid, a premiselor sau ipotezelor considerate, fără admiterea concluziei sau

Universitatea Spiru Haret

consecinței degajate din acestea, concordă cu viziunea aristotelică asupra silogismelor corecte. Şi Aristotel afirma că fiind date premisele, concluzia rezultă în mod necesar „prin chiar aceasta".

Dacă considerăm echivalența definițională $p \Rightarrow q \equiv L(p \supset q)$ putem spune că implicația strictă a lui Lewis sau implicația logică (denumită şi consecință logică) este o implicație materială logic necesară.

Nu toate implicațiile materiale descriu relații de consecință logică. Cele mai multe implicații materiale descriu relații de dependență, de cauzalitate, condiționare între clase de evenimente, acțiuni sau stări generice. În logica predicatelor de ordinul întâi implicațiile descriu legi fizice, relații de incluziune sau excluziune dintre clase de obiecte. De regulă, implicația materială descrie raporturi empirice de dependență, care intervin ca material de construcție în alcătuirea ipotezelor sau bazelor de cunoştințe asupra cărora se plică schemele de inferență.

Dar implicația materială devine implicație logică numai în cazurile când stă pentru particulele „deci" sau „prin urmare" şi leagă într-un raționament valid premisele de concluzie.

Atunci şi numai atunci, ea descrie relații logic necesare, care pot fi prefixate de operatorul modal L. Pot fi prefixate de operatorul modal formulele care descriu legi logice sau tautologii. Acestea nu au contramodele, nu pot fi infirmate. Sunt adevărate în toate atribuirile de valori ce pot fi date variabilelor propoziționale sau atomilor predicativi ce intră în alcătuirea formulelor. Legile din logica propozițiilor sau din logica predicatelor aplicate adesea spontan în discursul vorbitorului şi scriitorului într-o limbă naturală descriu necesități logice ale prelucrării valide a datelor din premisele sau ipotezele unei probleme.

Consecința logică înseamnă, aşadar, adevărul logic necesar al implicației materiale. Vom vedea, mai departe, când vom studia sistemul T, că implicația logică $L(p \supset q)$ este mai tare decât implicația materială $p \supset q$ şi o presupune pe aceasta (Formula $L(p \supset q) \supset (p \supset q)$ este teoremă în T).

Se poate da o interpretare semantică implicației logice sau consecinței logice. Cu peste trei sute de ani în urmă Leibniz afirma că o propoziție este logic necesară dacă este adevărată în toate lumile posibile.

Pentru o formulă din limbajul logicii propozițiilor „lumile posibile" ale lui Leibniz se reduc la mulțimea atribuirilor de valori ce pot fi construite cu cele n variabile distincte care apar într-o formulă considerată. Fiecare atribuire descrie o situație sau caz sau lume posibilă. Cardinalul lumilor posibile pentru formula sau formulele în cauză este dat de 2^n, unde n este numărul variabilelor distincte. Interpretarea poate fi extinsă firesc şi la limbajul logicii predicatelor.

Universitatea Spiru Haret

De exemplu, dacă F este o formulă logic propoziţională de două variabile p şi q, atunci cardinalul lumilor posibile $|W| = 2^2 = 4 = \{pq, p\text{-}q, \text{-}pq, \text{-}p\text{-}q\}$, unde pq este o lume w1 în care p=1 şi q =1. Similar, pentru celelalte trei atribuiri. Identificăm, deci, lumile sau situaţiile posibile cu mulţimea atribuirilor de adevăr posibile pentru cele 2 variabile.

Cum însă, în logica propoziţiilor numai tautologiile sau legile logice sunt adevărate în toate atribuirile de valori, respectiv în toate lumile posibile, rezultă că numai acestea descriu adevăruri logic necesare. Tautologiile sunt propoziţii logic necesare.

De aici regula necesitării formulată de K. Gödel:

$\models\alpha \Rightarrow^* L\alpha$, care spune că dacă α este o lege logică, atunci α este logic necesară.

Pe această cale, trecerea de la logica clasică la logica modală se face oarecum firesc, ca o supraetajare a logicii clasice.

Pentru caracterizarea conexiunilor dintre logica matematică clasică constând din logica propoziţiilor şi logica predicatelor şi arhipelagul logicilor modale putem spune următoarele:

1. Logica modală aletică descrie relaţia de consecinţă logică sintactică, dar şi relaţia de consecinţă logică semantică.

2. Logica modală aletică este o teorie despre adevărurile logic necesare şi despre cele logic posibile.

3. Toate formulele valide din logica propoziţiilor sunt logic necesare şi pot deveni prin regula necesitării, Nec. formule necesare în logica modală.

4. Toate formulele realizabile pot fi calificate din punct de vedere modal ca formule de descriu lumi sau situaţii posibile.

5. Formulele irealizabile sau contradictorii sunt logic imposibile. Prin urmare, pot fi şi ele rescrise ca formule de logică modală.

6. Formulele realizabile şi infirmabile („empirice") sunt logic contigente, adică nu sunt nici logic necesare, nici logic imposibile. Ele au şi modele şi contra-modele.

7. Implicaţia materială este mai generală decât implicaţia logică. Ea descrie relaţiile de condiţionare între obiecte şi fenomene din lumea fizică, din viaţa socială şi din activităţile umane.

8. Implicaţia materială cuantificată universal descrie în ştiinţele empirice legi fizice sau raporturi de dependenţă, care formalizate în logica predicatelor nu sunt legi logice, ci doar clauze generice. Acestea împreună cu unele seturi de atomi instanţiaţi, prin „unificare" pot genera scheme valide de inferenţă.

Universitatea Spiru Haret

Logicile modale sunt construite, de regulă, ca supraetajări ale logicii propoziţiilor sau ale logicii predicatelor. Se admite ca platformă de susţinere logica propoziţiilor, axiomatica şi semantica acesteia. La limbajul acesteia se adaugă un operator modal primitiv L sau M, stând pentru necesar şi respectiv pentru posibil. L şi M sunt văzuţi ca operatori ce formează din propoziţii alte propoziţii, propoziţii modale.

Modalitatea este văzută astfel ca o manieră sau specificare suplimentară a modului în care un enunţ poate fi adevărat.

Putem lua pe Lp ca implicând pe p, Lp $\supset$ p. Dacă ceva este în mod necesar adevărat, atunci este adevărat. (Aceasta se întâmplă în sistemul T, dar nu şi în sistemul D, deontic). Dar dacă interpretăm pe Lp ca o necesitate sau constrângere morală, atunci Lp nu implică neapărat p, cineva poate avea ceva impus ca necesar sau obligatoriu, fără ca în realitate el să facă ce ar trebui să facă. Obligaţiile sau constrângerile morale sau juridice pot fi şi încălcate. Op$\supset$p nu este neapărat adevărat. Obligaţiile nu devin întotdeauna stări de fapt. Dar obligaţiile implică întotdeauna permisiunea de a efectua ceea ce eşti obligat.

Axioma sistemului S4 Lp$\supset$LLp este interpretată de Dov Gabbay şi colab.[13] ca „fiind dată o demonstraţie a lui p (Lp), putem demonstra, într-adevăr, că aceasta este o demonstraţie (LLp)". Dar, după cum a arătat K. Gödel, această interpretare nu este valabilă pentru aritmetica lui Peano, căci în S4 este demonstrabilă teoremaL-L$\perp$, ceea ce ar însemna că în aritmetica lui Peano s-ar putea demonstra propria ei consistenţă, ceea ce contravine celei de a doua teoreme de incompletitudine a lui K. Gödel.

Tentativele de a satisface remarca lui K. Gödel au condus la construirea sistemului modal Gödel Löb. Acesta poate fi obţinut prin înlocuirea în S4 a axiomei specifice lui T, Lp $\supset$ p, prin axioma:

L(Lp $\supset$ p) $\supset$ Lp

Formula L-L$\perp$ afirmă că este necesar să poată fi evitată contradicţia, i.e. LM-$\perp$, ceea ce revine la cerinţa ca orice argument al unei formule modale să fie realizabil cel puţin într-o situaţie sau să aibă cel puţin o stare în care acesta devine adevărat.

2. **Limbajul logicii modale propoziţionale. Sistemul K**

Admitem alfabetul A = [p, q, r, -, L, $\vee$, (,)] stând pentru variabile propoziţionale, negaţie, necesitate, disjuncţie şi semne de grupare.

Universitatea Spiru Haret

Negaţia, „-„ şi necesitarea „L” sunt operatori monadici care fac dintr-o propoziţie o altă propoziţie. Dimpotrivă, semnul disjuncţiei „∨„ este un operator binar, ce presupune două argumente.

Nu mai introducem ca primitive celelalte conective logice, conjuncţia, implicaţia, echivalenţa, etc. Acestea pot fi introduse prin definiţie, după procedurile bine cunoscute.

Presupunem dat limbajul logicii propoziţiilor. Mai mult presupunem date toate legile logicii propoziţiilor.

Dacă A este o formulă din logica propoziţiilor, atunci LA va fi o formulă de logică modală care se citeşte: „Este necesar A”.

Limbajul sistemului K este limbajul logicii propoziţiilor la care se adaugă Regula: Dacă α este o formulă în logica propoziţiilor, atunci $L\alpha$ este formulă în logica modală aletică.

Axiomele sistemului K

1. Axiomele logicii propoziţiilor
2. $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$(K , axioma specifică)
3. Definiţie

   Def1. $Mp =_{df} -L-p$
4. Reguli de inferenţă

4.1. Regula substituţiei. $\alpha(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow \alpha(\beta_1/p_1,\ldots, \beta_n/p_n)$ (RS)

4.2. Regula Modus Ponens $\alpha, \alpha \supset \beta \Rightarrow \beta$ (MP)

4.3. Regula substit. echivalentelor: $\alpha(\ldots\beta\ldots), \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha(...\gamma\ldots)$ (RE)

4.4. Regula necesităţii: $\vdash_{LP}\alpha \Rightarrow \vdash_{M} L\alpha$ (Nec)

Putem acum da o definiţie inductivă acoperitoare pentru orice teorie logică modală normală.

Numim *logici modale* normale o mulţime de formule din limbajul logicii modale Lmod (vezi ante) care:

1. conţine axiomele logicii propoziţiilor;
2. conţine axioma sistemului K, $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$;
3. şi este închisă faţă de regulile de inferenţă :

3.1. RS, regula substituţiei,

3.2. MP, Modus Ponens,

3.3. RE, regula substituirii echivalentelor şi

3.4. Nec. , regula necesităţii.

Toate sistemele de logică modală normale conţin ca infrastructură teoremele logicii propoziţiilor, fac uz de regula necesităţii şi conţin axioma sistemului K, respectiv o „întărire” a schemei de inferenţă *Modus*

Universitatea Spiru Haret

Ponens. În plus sunt „închise" față de schemele de inferență 3.1-3.4, substituție, Modus Ponens, substituirea echivalentelor şi regula necesitării.

Definițiile celorlalte sisteme mai complexe se obțin prin postularea de noi axiome şi de noi reguli de inferență în plan sintactic şi prin postularea de noi proprietăți ale relației de alternativitate definită pe frame-urile sau grafurile ce descriu înlănțuirea sau accesibilitatea dintre lumile posibile.

Sistemul K (de la *know*). Axioma acestuia este o reinterpretare a schemei *Modus Ponens*.

$p \supset q$	$K(p \supset q)$	$K(p \supset q) \supset (Kp \supset Kq)$ (K MP)
p	Kp	*Modus Ponens*
---	---	
q	Kq	

„Dacă cineva cunoaşte ca adevărată o implicație şi cunoaşte ca adevărat antecedentul acesteia, atunci cunoaşte ca adevărat consecventul acesteia."

NB Am putea interpreta modal epistemic toate schemele de inferență din logica stoică şi, mai mult, toate schemele de inferență din logica propozițiilor sau din logica predicatelor, chiar şi principiul rezoluției.

$p \supset q$	$K(p \supset q)$	$K(p \supset q) \supset (K\text{-}q \supset K\text{-}p)$ (K MT)
-q	K-q	*Modus Tollens*
---	---	
-p	K-p	
$p \vee q$	$K(p \vee q)$	$(K(p \vee q) \wedge K\text{-}p) \supset Kq$
-p	K-p	*Principiul alternativei*
---	---	
q	Kq	
$-p \vee -q$	$K(-p \vee -q)$	$(K(-p \vee -q) \wedge Kp) \supset K\text{-}q$
p	Kp	*Principiul incompatibilității*
---	---	
-q	K-q	
$p \supset q$	$K(p \supset q)$	$(K(p \supset q) \wedge K(q \supset r)) \supset K(p \supset r)$
$q \supset r$	$K(q \supset r)$	*Principiul tranzitivității*
---	---	
$p \supset r$	$K(p \supset r)$	

Universitatea Spiru Haret

$\lambda \vee A$	$K(\lambda \vee A)$	$(K(\lambda \vee A) \wedge K(-\lambda \vee B)) \supset K(A \vee B)$
$-\lambda \vee B$	$K(-\lambda \vee B)$	*Principiul rezoluției*
---	---	
$A \vee B$	$K(A \vee B)$	

Mai departe aceste principii ale logicii epistemice scrise pe ultima coloană din dreapta ar putea fi „traduse" pe baza schemelor de inferență R3 şi R4 (vezi cap. 10 despre logica acceptării), dacă ceva este cunoscut sau crezut, atunci este acceptat în scheme de inferență ale logicii acceptării. Aceasta înseamnă că peste tot aceste scheme pot fi rescrise ca reguli de logica acceptării.

Sistemul K conține axioma K şi infrastructura logic-propozițională.

În plus, acesta conține regula necesitării.

$$\frac{\models \alpha}{\models L\alpha}$$

Regula necesitării poate transforma orice formulă validă din logica propozițiilor într-o teoremă sau lege de logică epistemică .

Admitem în sistemul axiomatic K , de asemenea, regulile substituției uniforme, regula *Modus Ponens*, MP şi regula substituirii echivalentelor, RE.

În sistemul K pot fi demonstrate teoremele:

K1 $L(p \wedge q) \supset (Lp \wedge Lq)$

1. $(p \wedge q) \supset q$	(LP),
2. $L((p \wedge q) \supset p)$	(Nec, 1),
3. $L((p \wedge q) \supset p) \supset (L(p \wedge q) \supset Lp)$	(RS, K, $p \wedge q$ /p , p /q)
4. $L(p \wedge q) \supset Lp$	(MP, 2, 3.),
5. $(p \wedge q) \supset q$	(LP)
6. $L((p \wedge q) \supset q)$	(Nec, 5.),
7. $L((p \wedge q) \supset q) \supset (L(p \wedge q) \supset Lq)$	(RS,6, $p \wedge q$/ p)
8. $L(p \wedge q) \supset Lq$	(MP, 6. 7.)
9. $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset (q \wedge r)))$	(LP)
10. $L(p \wedge q) \supset Lp) \supset ((L(p \wedge q) \supset Lq) \supset (L(p \wedge q) \supset (Lp \wedge Lq)))$	(RS,9, $L(p \wedge q)$/p, Lp/q, Lq/r),
11.$(L(p \wedge q) \supset Lq) \supset (L(p \wedge q) \supset (Lp \wedge Lq))$	(MP, 4.,10.)
12. $(L(p \wedge q) \supset (Lp \wedge Lq)$	MP,8., 11.)

K2 $(Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q)$

1. $p \supset (q \supset (p \wedge q))$	(LP, import.)

Universitatea Spiru Haret

2. $L(\ p \supset (q \supset (p \wedge q)))$ (Nec., 1)
3. $L\ (p \supset (q \supset (p \wedge q))) \supset (Lp \supset L(q \supset (p \wedge q)))$ (K, 2, RS).
4. $Lp \supset L(q \supset (p \wedge q))$ (MP, 2,3)
5. $L(q \supset (p \wedge q)) \supset (Lq \supset L(p \wedge q))$ (RS, Ax K)
6. $Lp \supset (Lq \supset L(p \wedge q))$ (Tranz., 4,5)
7. $(q \supset (r \supset s)) \supset (q \wedge r) \supset s))$ (LP)
8. $Lp \supset (Lq \supset L(p \wedge q)) \supset (Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q))$ (LP, RS, 7)
9. $(Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q))$ (MP, 8, 6)

K3. $L(p \wedge q) \equiv (Lp \wedge Lq)$

1. $p \supset q) \supset ((q \supset p) \supset (p \equiv q))$ (LP)
2. $L(p \wedge q) \supset (Lp \wedge Lq)$ (K1)
3. $(Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q)$ (K2)
4. $L(p \wedge q) \equiv (Lp \wedge Lq)$ (RS, 1, MP de 2 ori)

Teorema K3 enunță distributivitatea operatorului L față de conjuncție. Vom vedea mai târziu că dualul său M este distributiv față de disjuncție.

Demonstrarea unor teoreme permite frecvent producerea unor reguli de inferență derivate.

$\alpha \supset \beta \Rightarrow^* L\alpha \supset L\alpha$ (DR1)

Demonstrație

1. $\alpha \supset \beta$ ip.
2. $L(\alpha \supset \beta)$ Nec, 1.)
3. $L(\alpha \supset \beta) \supset (L\alpha \supset L\beta)$ (Ax. K)
4. $L\alpha \supset L\beta$ (MP, 2, 3)

Regula DR1 afirmă că dintr-o implicație materială poate fi derivată implicația dintre necesitatea antecedentului şi necesitatea consecventului.

În mod analog poate fi obținută regula derivată:

$\alpha \equiv \beta \Rightarrow^* L\alpha \equiv L\alpha$ (DR1)

Demonstrație

1. $\alpha \equiv \beta$ ip
2. $\alpha \supset \beta$ (E ≡, 1)
3. $\beta \supset \alpha$ (E ≡, 1)
4. $L\alpha \supset L\beta$ (DR1, 2)
5. $L\beta \supset L\alpha$ (DR1, 3)
6. $L\alpha \equiv L\alpha$ (I≡, 4, 5)

Revenim la demonstrarea unor teoreme:

Universitatea Spiru Haret

K4(Lp ∨ Lq) ⊃L(p∨ q)

1. p ⊃ (p∨ q)	(LP)
2. L p ⊃ L(p∨ q)	(DR1, 1)
3. q ⊃ (p∨ q)	(LP)
4. Lq ⊃ L(p∨ q)	(DR1, 3)
5. (Lp ∨ Lq) ⊃ L(p∨ q)	(LP, (p⊃r) ⊃((q⊃r) ⊃((p∨q) ⊃r))), 2, 4)

Teorema K5 exprimă raportul dintre L şi M

K5. Lp≡ -M-p

1. p ≡ --p	(LP)
2. Lp≡ --Lp	(RS, 1, Lp/p,)
3. Lp≡ --L--p	(RE,2, --p/ p)
4. Lp≡ -M-p	(RE, 3, Def1).
K5.1 L-p≡ -Mp	(RS,K5, LP)
K5.2 -Lp≡ M-p	(LP, K5)

K6 M(p∨q) ≡ (Mp∨Mq)

1. L(-p∧-q) ≡ (L-p∧L-q)	(RS, T3,)
2. L-(p∨q) ≡ (L-p∧L-q)	(LP, De Morgan, 1)
3. -L-(p∨q) ≡ -(L-p∧L-q)	(LP Neg ≡ , 2)
4. -L-(p∨q) ≡ -L-p∨ -L-q	(LP, De Morgan, 3)
5. M(p∨q) ≡ (Mp∨Mq)	(LP, RE, 4)

Făcând uz de Def1 care defineşte posibilitatea ca negație a necesității adevărului propoziției contrare putem deriva o nouă schemă de inferență: Fiind dată o implicație materială α ⊃ β rezultă că posibilitate antecedentului duce la posibilitatea consecventului.

D3. α ⊃ β ⇒* Mα ⊃ Mα	(DR3)
1. α ⊃ β	ip.
2. -β⊃-α	(LP, contrapoz., 1)
3. L-β ⊃ L-α	(DR1, 2)
4. -L-α ⊃ -L-β	(LP, contrapoz., 3)
5. Mα ⊃ Mβ	(RE,4, Def 1)

K7 M(p ⊃ q) ≡(Lp ⊃ Mq)

1. M(-p∨q) ≡ (M-p∨Mq)	(RS,K7,-p/p)
2. M(-p∨q) ≡ (-Lp∨Mq)	(RE, 1, K5)
3. M(p⊃q) ≡ (Lp⊃Mq)	(RE, 2, LP, Def. Impl.)

K8. M(p∧ q) ⊃ (Mp ∧ Mq)

1. p∧q ⊃ p	(LP)

2. $p \wedge q \supset q$ (LP)
3. $M(p \wedge q) \supset Mp$ (DR3,1)
4. $M(p \wedge q) \supset Mq$ (DR3,2)
5. $M(p \wedge q \supset (Mp \wedge Mq)$ (LP,3, 4)

K9. $L(p \vee q) \supset (Lp \vee Mq)$
1. $L(-q \supset p) \supset (L-q \supset Lp)$ (RS, Ax K)
2. $L(q \vee p) \supset (-L-q \vee Lp)$ (RE,1, LP)
3. $L(p \vee q) \supset (Mq \vee Lp)$ (RE, 2, Def1, LP)

3. **Sistemul T**

Dacă la axiomele sistemului K adăugăm axioma:

Ax $Lp \supset p$, (Ax. specifică lui T)

după care adevărul necesar al unei propoziții implică adevărul pur şi simplu al acesteia, obținem sistemul T.

Putem, de asemenea, să adăugăm două definiții suplimentare, pentru implicația strictă şi pentru echivalența strictă.

D2. $p \Rightarrow q =_{df} L(p \supset q)$

D3. $p = q =_{df} p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

De reținut că două formule strict echivalente sunt deductiv echivalente.

Sistemul T este unul dintre cele mai importante sisteme de logică modală standard.

Sistemul T este deductiv echivalent cu sistemul M creat de Georg H von Wright. Acest rezultat îl datorăm lui Sobocinski.

Sistemul M creat de von Wright are ca axiome:

K6 $M(p \vee q) \equiv (Mp \vee Mq)$ şi pe M $p \supset Mp$.

Şi el presupune ca infrastructură logica propozițiilor, iar ca reguli de inferență pe RS, RE, MP şi Nec, necesitarea .

Demonstrația în T a lui

T1. $p \supset Mp$ este următoarea:
1. $L-p \supset -p$ (RS,$Lp \supset p$, $-p / p$)
2. $p \supset -L-p$ (Contrapoz 1.)
3. $p \supset Mp$ (RE, 2., Def. 1 $Mp= -L-p$)

T2. $M(p \supset Lp)$
1. $Lp \supset MLp$ (RS,T1, Lp / p)
2. $M(p \supset Lp) \equiv (Lp \supset MLp)$ (RS, K7, Lp/ q)
3. $M(p \supset Lp)$ (RE, 1., 2., $\equiv$)

Universitatea Spiru Haret

T3. Lp ⊃ Mp (Tranz. Ax Lp ⊃ p, T1)

T4. p = q ⊃(Lp=Lq)

1. (p⇒q) ⊃ (Lp ⊃ Lq) (RE, AxK, D2)
2. q⇒p ⊃ (Lq ⊃ Lp) (RS,RE, AxK, D2)
3. (p = q) ⊃ (Lp = Lq) (LP,1,2, RE, D3)

Între altele, am folosit teorema logic propoziţională: (p⊃q)⊃((r⊃s) ⊃((p∧r) ⊃(q∧s))).

O demonstraţie alternativă pentru T4 este una din ipoteze. Presupunem că este adevărat antecedentul sau ipoteza teoremei de demonstrat, apoi făcând uz de regulile de inferenţă şi de legile logicii încercăm să derivăm consecventul. Dacă aceasta reuşeşte aplicăm teorema deducţiei şi obţinem teza de demonstrat.

1. p = q ip.
2. p⇒q ∧ q⇒p (RE, 1, D3)
3. p⇒q (E∧, 1)
4. q⇒p (E∧, 1)
5. L(p⊃q) (RE, 3, D2)
6. L(q⊃p) (RE, 4, D2)
7. Lp ⊃Lq (MP, K, 5)
8. Lq ⊃Lp (MP, K, 6)
9. L(Lp ⊃Lq) (Nec., 7)
10. L(Lq ⊃Lp) (Nec., 8)
11. Lp⇒Lq (RE,DR2, 9)
12. Lq⇒Lp (RE, DR2,10)
13. Lp⇒Lq ∧ Lq⇒Lp (I∧, 11, 12)
14. Lp = Lq (RE, 13, D3)
15 {1-14}⇒ Lp = Lq
16. ϕ ⇒ p = q ⊃ Lp = Lq (TD,15)

T5. (p⇒q) ⊃ (p⊃q)

1. L(p⊃q) ⊃ (p⊃q) (RS, AxT)
2. (p⇒q) ⊃ (p⊃q) (RE, 1.,D2)

T5 afirmă că implicaţia strictă implică implicaţia materială. Implicaţia strictă este o specie de implicaţie materială .Teorema 5 spune doar că implicaţia strictă sau consecinţa logică este mai bogată în conţinut decât implicaţia materială. Care este semnificaţia implicaţiei stricte am văzut în capitolul 1.

Universitatea Spiru Haret

T6. (p⇒q) ⊃(Mp⊃Mq)

1. L(-q⊃-p) ⊃ (L-q ⊃L-p)	(RS, K)
2. L(-q⊃-p) ⊃(-L-p ⊃ -L-q)	(Contrapoz, 1)
3. L(p ⊃q) ⊃(Mp ⊃ Mq)	(Contrapoz,2, RE, D1)
4. (p⇒q) ⊃ (Mp ⊃ Mq)	(RE, 3, D2)

T7. (-p⇒p) ≡Lp

1. (–p ⊃ p) ≡ p	
2. L(–p ⊃ p) ≡ Lp	(DR2, 1)
3. (-p⇒p) ≡ Lp	(RE,2,D2)

T8. (p⇒-p) ≡L-p

1. p ⊃ -p ≡ ⊥(LP)	
2. L (p ⊃ -p) ≡ L⊥	(DR2, 1)
3. (p⇒-p) ≡ L-p	(RE, 2)

T9. (q⇒p) ∧ (-q⇒p)≡Lp

1. ((q⊃p) ∧(-q⊃p)) ≡ p	(LP)
2. L((q⊃p) ∧(-q⊃p)) ≡ Lp	(DR2)
3. (L(q⊃p) ∧L(-q⊃p)) ≡ Lp	(RE, 2, K3)
4. (q⇒p) ∧(-q⇒p) ≡ Lp	(RE, 3, D2)

T10. (p⇒q) ∧ (p⇒-q)≡L-p

Lăsăm demonstrația pe seama cititorului. Punctul de plecare este formula: (p⊃q) ∧(p⊃-q) ⊃⊥, unde ⊥ este contradicția care se redă prin L-p.

T11. Lp⊃(q⇒p)

1. p⊃(q⊃p)	(LP)
2. Lp⊃L(q⊃p)	(DR2, 1)
3. Lp⊃(q⇒p)	(RE,2, D2)

T12. L-p ⊃(p⇒ q)

1. ⊥ ⊃ (p⊃ q)	(LP)
2. L⊥ ⊃ L(p ⊃ q)	(DR1)
3. L-p ⊃ (p ⇒ q)	(RE,2)

De reținut că ⊥ desemnează contradicția sau irealizabilul. În logica modală aceasta poate fi redată prin imposibil, respectiv prin L-p sau -Mp.

Universitatea Spiru Haret

4. **Sistemul D**

Dacă la axioma K adăugăm axioma:

(D) Lp ⊃ Mp i.e. Op ⊃ Pp,

axiomă demonstrabilă în T, atunci obţinem sistemul deontic standard, echivalent cu sistemul deontic creat de Georg von Wright.

Teoremele acestui sistem sunt prezentate amănunţit în cartea noastră *Teoria acţiunii şi logica formală*.

Teoremele K1 –K9 sunt teoreme şi în sistemul D.

În sistemul D avem, între altele teoremele:

Mp ∨ M-p i.e. Pp ∨ P-p

şi

-(Lp∧ L-p) i.e. –(Op∧O-p)

Metode de decizie în logica deontică sunt metoda matricială, metoda O-constituenţilor şi metoda P-constituenţilor propusă de von Wright. Noi am propus duala acesteia, metoda O-constituenţilor. În acestea se utilizează legile de distributivitate faţă de P şi faţă de O , respectiv faţă de L şi faţă de M

Este uşor de demonstrat faptul că sistemul D este conţinut în sistemul T, căci axioma specifică lui D a fost demonstrată ca teorema T3 în T.

Asupra logicilor deontice astăzi vom reveni într-un capitol următor.

5. **Sistemul S4**

Sistemul S4 se obţine din sistemul T prin adăugarea axiomei:

(Ax S4) Lp⊃LLp

G. M. Hughes şi J. M Cresswell s-au întrebat dacă „Este întotdeauna ceea ce este necesar în mod necesar sau ceea ce este uneori necesar s-ar putea să nu fie în mod necesar ?”.

Pentru cititorul care nu a luat cunoştinţă de geneza logicii, întrebarea de mai sus pare mai curând un calambur sau un joc de cuvinte decât o întrebare serioasă. Noi declarăm că este o întrebare serioasă care merită toată atenţia.

Presupunem că p din Ax S4 descrie un raţionament valid căruia îi corespunde o tautologie. Admitem, deci, într-o demonstraţie prin ipoteză, secvenţa:

1. p	ip.
2. p≡q∨-q	ip.
3. q∨-q	(RE, 1., 2.)

Universitatea Spiru Haret

Deoarece formula 3 este o tautologie, aplicăm asupra ei regula necesitării Nec., o regulă valabilă în toate sistemele modale. Obținem:

4. L(q∨-q)

Potrivit echivalenței 2, obținem prin RE în 4 formula 5:

5. Lp

la care aplicând, din nou regula necesitării, Nec., obținem:

6. LLp.

Din 5 şi 6 prin teorema deducției, TD, rezultă:

7. Lp ⊃ LLp (Ax S4)

Sintactic, totul e în regulă, dar rămânem, sub raport semantic, cu o umbră de îndoială. Pentru a şterge orice umbră de îndoială, revenim la pasul 3 şi urmăm alt curs de gândire. Cum 3 este o tautologie şi noi am demonstrat în capitolul 3 despre axiomatica logicii propozițiilor teorema T4 p∨-p, care prin substituție poate deveni q∨-q .

Axiomele 2.4.1 – 2.4.4 implică logic teorema T4 din sistemul axiomatic Hilbert –Ackermann.

Putem, deci, scrie:

9. (Ax2.4.1∧…∧Ax2.4.4) ⇒ T4

Aplicând la 9 regula derivată DR2, obținem:

10. L(Ax2.4.1∧…∧Ax2.4.4) ⊃LT4

Dar (Ax2.4.1∧…∧Ax2.4.4) sunt toate tautologii (vezi demonstrația de noncontradicție a sistemului Hilbert- Ackermann pag. 48-51). Putem, deci, aplica asupra lor regula Nec. şi obține:

11. L(Ax2.4.1∧…∧Ax2.4.4)

Din 10 şi 11 rezultă prin *Modus Ponens*:

12. LT4.

Dar T4 era ea însăşi o lege logică şi anume principiul terțului exclus şi a fost scrisă la punctul 4 ca L(q∨-q), respectiv LT4. În consecință, 12 devine:

13. LLT4.

Cum T4 a fost prin ipoteza 2 prescurtat prin p din 13 obținem:

14 LLp.

Pe scurt, dacă p este o tautologie, atunci p este logic necesar. Aceasta rezultă prin regula necesitării propusă de K. Gödel. Pe de altă parte, prin teorema completitudinii (de fapt o metateoremă) orice tautologie este demonstrabilă ca teoremă în sistemul axiomatic Hilbert Ackerman. Prin aceasta devine logic necesară o formulă care era deja logic necesară.

Universitatea Spiru Haret

Orice demonstrație făcută la nivelul limbajului obiect unei formule o atestă ca logic necesară. Dacă ulterior, demonstrăm la nivel metateoretic, că toate tautologiile sunt teoreme, am demonstrat că un enunț logic necesar este necesar să fie necesar.

Sistemul S4 este un sistem cu operatori iterați. Formulele LLp ⊃ Lp, şi LMp ⊃Mp, deşi cu operatori iterați, nu ridică probleme, deoarece ele se obțin direct, prin substituții din axioma lui T.

Din Ax S4 şi din axioma lui T, Lp ⊃ p, rezultă lesne:

Lp ≡ LLp

1. Lp⊃ p
2. LLp ⊃ Lp
3. Lp ⊃ LLp
4. Lp ≡ LLp (LP, 2-3)

Teorema de mai sus poate fi văzută şi ca o regulă de reducere. Modalitățile iterate se reduc la modalități neiterate.

La fel pot fi demonstrate ca modalități iterate

R1. Mp ≡ LMp } S5
R2. Lp ≡ MLp }

În sistemul S5 posibilul este necesar să fie posibil şi necesarul este posibil să fie necesar. Cel puțin aceasta pare a spune cele două reguli de reducere.

În sistemul S4 sunt 4 reguli proprii de reducere pe care le reproducem ceva mai jos. Mai întâi cele două cu operatori iterați R3 şi R4:

R3. Mp ≡ MMp } S4
R4. Lp ≡ LLp }

Nici una dintre regulile R1-R4 nu sunt teoreme în sistemul T. T nu conține reguli de reducere.

Teoreme în S4

T1 MMp ⊃ Mp

1. Lp ⊃ LLp
2. L-p ⊃ LL-p
3. -Mp ⊃ -MMp
4. MMp ⊃ Mp

T2. Lp ≡ LLp

1 Lp ⊃ p
2. LLp ⊃ Lp (RS, 1)
3. Lp⊃ LLp (Ax S4)
4. Lp ≡ LLp (LP)

Universitatea Spiru Haret

T3 Mp≡MMp
1. p ⊃ Mp (în T)
2. Mp ⊃ MMp
3. MMp ⊃ Mp (T1 în S4)
4. Mp ≡ MMp

T4. MLMp ⊃ Mp
1. Lp ⊃ p (Ax T)
2. LMp ⊃ Mp (RS, 1)
3. MLMp ⊃ MMp DR3 A ⊃ B ⊨ MA ⊃ MB, 2
4. MMp ⊃ Mp (T1)
5. MLMp ⊃ Mp (Tranz 3, 4)

T5. LMp ⊃ LMLMp
1. p ⊃ Mp (T1)
2. LMp ⊃ MLMp RS,1 , p /LMp
3. LLMp ⊃ LMLMp, DR1 A ⊃ B ⊢ LA ⊃ LB, 2
4. LMp ⊃ LMLMp Regula reducției, 3

T6. LMp ≡ LMLMp
1. MLMp ⊃ Mp
2. LMLMp ⊃ LMp (DR1 , 1)
3. LMp ⊃ LMLMp (T5)
4. LMp ≡ LMLMp

T7. MLp ≡ MLMLp
1. LMp ≡ LMLMp (T6)
2. LM-p ≡ LMLM-p
3. –MLp ≡ -MLMLp Reg LMI (LM –interchange la 2)
4. MLp ≡ MLMLp (prop a echivalentei)

În S4 orice modalitate se reduce la una din următoarele şapte modalități elementare: -, L, M, LM, ML,LML,MLM:

Sistemul S4 are de fapt 7 modalități. Cum variabila p poate fi şi negată, vom avea 14 modalități distincte.

Modalitățile pot fi redate în notația standard pozitive sau cu negația numai la începutul secvenței de operatori modali.

Semantica sistemului S4 presupune relații de alternativitate reflexive ca în T şi tranzitive.

Universitatea Spiru Haret

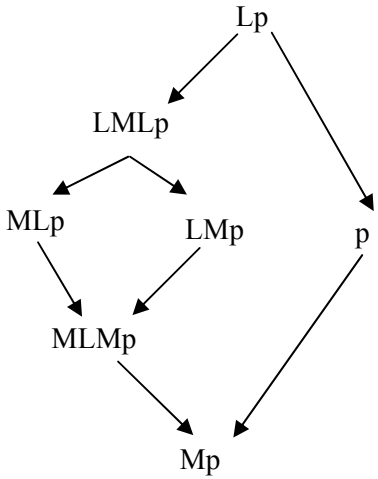


Fig. 1. *Modalități elementare în S4*

6. **Sistemul S5**

S5 = T + E = Mp ⊃ LMp,
T = K + Lp ⊃ p,
K = L(p⊃ q) ⊃ (Lp ⊃ Lq)
S5 = L(p⊃ q) ⊃ (Lp ⊃ Lq),
Lp ⊃ p,
Mp ⊃ LMp
Axioma sa specifică este:
E Mp ⊃ LMp

Teoreme în S5

S5. 1 MLp ⊃ Lp

1. Mp ⊃ LMp	(AxS5)
2. M-p ⊃ LM-p	(RS, 1)
3. –Lp ⊃ -MLp	(LMI 2)
4. MLp ⊃ Lp	(LP, contrapoz)

S5.*2 Lp ≡ MLp*

1. p ⊃ Mp	(teoremă în T)

Universitatea Spiru Haret

2. Lp ⊃ MLp	(RS, 1, prin Lp)
3. MLp ⊃ Lp	(teorema S5.1 de mai sus)
4. Lp ≡ MLp	

S5.3 Mp ≡ LMp

1. Lp ≡ MLp	(S5.2)
2. L-p ≡ ML-p	(RS, 1)
3. -L-p ≡ -ML-p	(Neg ≡, 2)
4. Mp ≡ LMp	(LMI, 3)

S5.4 Lp ⊃ LLp

1. p ⊃ Mp	(T)
2. Lp ⊃ ML p	(RS, 1)
3. Mp ≡ LMp	(S5.3)
4. MLp ≡ LMLp	(RS, 3, p / Lp)
5. Lp ⊃ LMLp	(Tranzitivit, 2, 4)
6. Lp ⊃ LLp	(R≡, 5, S5.2)

S5. 5. *L(p ∨ Lq) ≡ (Lp ∨ Lq)*

1. L(p∨q) ⊃ (Lp∨Mq)	(K9)
2. L(p∨Lq) ⊃ (Lp∨MLq)	(RS, 1, q/Lq)
3. L(p∨Lq) ⊃ (Lp ∨ Lq)	(RE, 2, S5.2)
4. (Lp ∨ Lq) ⊃ L(p ∨ q)	(K4)
5. L(p∨LLq) ⊃ L(p∨Lq)	(RS, 4, q/Lq)
6. (Lp ∨ Lq) ⊃ L(p ∨ Lq)	(RE, 5, R4)
7. L(p ∨ Lq) ≡ (Lp ∨ Lq).	(R≡, 3, 6)

S5.6. L (p ∨ Mq) ≡ (Lp ∨ Mq)

1. L(p ∨ Lq) ≡ (Lp ∨ Lq)	(S5. 5)
2. L(p ∨ LMq) ≡ (Lp ∨ LMq)	(RS 1, q/Mq)
3. L(p ∨ Mq) ≡ (Lp ∨ Mq)	(RE, 2, S5.3)

S5.7. *M(p ∧ Mq) ≡ (Mp ∧ Mq)*

1. L(p ∨ Lq) ≡ (Lp ∨ Lq)	(K9)
2. L(-p ∨ L-q) ≡ (L-p ∨ L-q)	(RS, 1)
3. (p ≡ q) ⊃ (-p ≡ -q)	(LP)
4. -L(-p ∨ L-q) ≡ -(L-p ∨ L-q)	(RE, 2, 3)
5. M-(-p ∨ -Mq) ≡ - (-Mp ∨ -Mq)	(LMI, 4)
6. M(p ∧ Mq) ≡ (Mp ∧ Mq)	(LP, 5)

Universitatea Spiru Haret

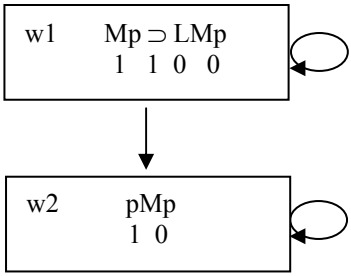
S5.8 M(p∧ Lq) ≡ (Mp ∧ Lq)

1. M(p ∧ Mq) ≡ (Mp ∧ Mq) (S5.7)
2. M(p ∧ MLq) ≡ (Mp ∧ MLq) (RS, 1, q/Lq)
3. M(p ∧ Lq) ≡ (Mp ∧ Lq) (RE, 2, S5.2)

Teorema specifică lui S5, Mp ⊃ LMp, nu este teoremă în S4. Se poate arăta că S5 conține pe S4, deoarece am demonstrat în S5 axioma specifică lui S4, Lp ⊃ LLp, (vezi mai sus teorema S5.4).

Se poate arăta printr-o reprezentare în semantica de lumi posibile că Mp ⊃ LMp, nu este teoremă în S4. În S4 relația de accesibilitate este reflexivă şi tranzitivă. Dar nu este şi simetrică. Din w1 se poate „vedea" w1 şi din w2 se poate „vedea" w2. Din w1 se vede w2. Dar din w2 nu se „vede" w1. R nu este simetrică. P este fals în w1, deoarece R este reflexivă şi se poate trece din w1 tot în w1 şi deci agentul din w1 ştie că p este adevărat în w1, dar necesar posibil p nu este adevărat în w1.

Din w1 este accesibilă şi w2 şi p nu este adevărat în w2 şi deci LMp nu este adevărat în w1. Prin urmare cum antecedentul Mp este adevărat şi consecventul LMp este fals expresia în întregul ei este falsă în S4.



În S5 sunt patru reguli de reducere: două specifice asociate teoremelor S5.2 şi S5.3 în notația noastră. Ele sunt:

R1. Mp ≡ LMp ⎫ Posibilul din S5 este în mod necesar posibil
R2. Lp ≡ MLp ⎭ Necesarul din S5 este posibil.

La acestea se adaugă cele două reguli din S4 despre reducerea dublării lui M la M şi reducerea dublării lui L la L

R3. Mp ≡ MMp ⎫ S4
R4. Lp ≡ LLp ⎭

Universitatea Spiru Haret

Spre deosebire de T care are un număr infinit de modalităţi nereductibile şi de S4 care are 14 modalităţi ireductibile S5 are doar 6 modalităţi ireductibile, ţinând cont şi de simbolul negaţiei.

Pozitive are numai trei modalităţi ireductinile -. L, M.

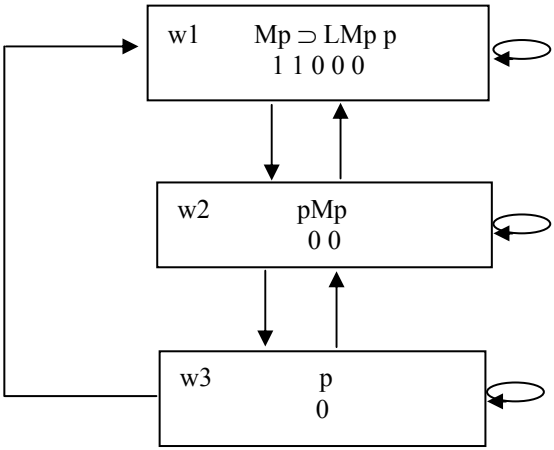
Cele 6 modalităţi sunt : {p, -p, L, -L, M, -M }

Relaţia de alternativitate în S5 este reflexivă, tranzitivă şi simetrică. Ea este o relaţie de echivalenţă. Orice lume este este accesibilă din orice altă lume. De exemplu, a avea aceiaşi înălţime. De a avea aceiaşi medie anuală; de exemplu, a avea aceiaşi vârstă, acelaşi cuantum de venit, etc.

7. **Validitatea lui S5**

Pentru a testa validitatea lui S5 este suficient să arătăm că axioma sa specifică este validă în orice model a cărui relaţie de alternativitate are proprietăţile echivalenţei, i.e. este reflexivă ca sistemul K, tranzitivă şi reflexivă ca T şi în plus este simetrică.

Construim un graf semantic interpretat şi un contramodel pentru axioma specifică a lui S5. Vom considera un astfel de graf având trei noduri sau trei lumi posibile legate între ele printr-o relaţie de alternativitate ce satisface proprietăţile relaţiei de echivalenţă, i. e. este reflexivă (precum K), tranzitivă (precum axioma lui S4, Lp⊃LLp şi în plus, este simetrică.



Universitatea Spiru Haret

Formula Mp ⊃ LMp nu poate fi infirmată în nici un graf tranzitiv şi simetric. Aceasta înseamnă că există un model M = [W, R, V] bazat pe acest graf în care pentru un w din W avem:

(i) V(Mp, w) = 1

(ii) V(LMp, w) = 0

Din (i) prin [VM] există un w dim W astfel încât R(w, w1) şi

(iii) V(p, w1) = 1

şi din (ii) prin [VL] exista un w2 din W astfel că R(w, w2) şi

(iv) V(Mp, w2) = 0

Deoarece R(w, w2) şi R este simetric, vom avea R(w2, w) şi apoi, deoarece R(w, w1) şi R este tranzitiv , vom avea R (w2, w1). Dar cum prin (iv) şi [VM], noi avem:

(v) V(p, w1) = 0

ceea ce contrazice (iii).

Cum S5 este K plus axioma specifică lui T, Lp ⊃ p, şi axioma specifică lui S5, notată de australieni prin E , Mp ⊃ LMp şi T este valid în orice graf (frame) reflexiv şi cum am arătat că axioma E este validă în orice grafic simetric tranzitiv, teorema 2. 2 despre validitatea lui T rezultă că S5 este valid în raport cu orice graf (frame) reflexiv, tranzitiv şi simetric.

Conduita semantică a lui S5 poate fi exprimată de regula semantică.

[VLS5] V(Lα, w) = 1. Daca V(α, w) = 1 în orice w1 din W; altfel V(Lα, w) = 0

O formulă din S5 este necesară într-o lume w din W dacă este adevărată în fiecare formulă din clasa ei de echivalență. Grosier vorbind, în toate lumile w1 accesibile din w.

În S5 putem demonstra teoremele:

S5.9. p ⊃ LMp	(Axioma lui Brouwer)
1. p ⊃ Mp	
2. Mp ⊃ LMp	(E, axioma specifică lui S5)
3. p ⊃ LMp	(Tranzitiv, 1, 2)

S5.10LMp ⊃ p	(duala axiomei lui Brouwer)
1. p ⊃ LMp	
2. –p ⊃ LM-p	
3. –p ⊃ -MLp	Regula LMI, 2
4. MLp ⊃ p	

Universitatea Spiru Haret

Teoremele S5.9 şi S5.10 nu sunt demonstrabile în S4. Oricare dintre ele adăugate la S4 duc la un sistem modal egal în putere cu S5. Dacă adăugăm pe S5.9 la S4, putem demonstra uşor pe E, axioma specifică lui S5 prin folosirea regulii R3 din S5 (R3. Mp ≡ MMp). Iată cum:

$p \supset LMp$

$Mp \supset LMMp$(RS, 1, p/Mp)

$Mp \supset LMp$ (Aplicarea regulii R3 la 2 în consecvent)

Dacă în loc să adăugăm vreuna dintre cele două teoreme S5.9 sau S5.10 la S4, adăugăm una dintre ele la sistemul T, atunci obţinem sistemul lui Brouwer, care este mai slab decât S5 şi mai tare decât S4. El descrie logica modală intuiţionistă.

Există şi o regulă DR4, care adăugată, ca primitivă, la S4, duce la obţinerea lui S5.

DR4. $\vdash M\alpha \supset \beta \rightarrow \vdash \alpha \supset L\beta$

1. $M\alpha \supset \beta$

2. $LM\alpha \supset L\beta$

3. $p \supset LMp$ (axioma lui Brouwer)

4. $\alpha \supset LM\alpha$

5. $\alpha \supset L\beta$ (Tranzitiv.4,2)

Axioma lui Brouwer este validă în orice graf simetric

Relaţia de alternativitate R în sistemul B este reflexivă şi simetrică. S4 nu conţine pe B. Nici B nu conţine pe S4. Sistemele B şi S4 sunt independente unele de altele.

8. **Semantica de lumi posibile pentru logicile modale**

Definirea necesarului ca enunţ adevărat în toate lumile posibile vine de la Leibniz. Construcţia semanticii lumilor posibile se datorează mai multor logicieni: R. Carnap 1944,1947; A.N. Prior 1957, Stig Kanger 1957, Jakko Hintikka,1957,1961,1963 şi lui Saul A. Kripke 1959,1963. În prezent aceasta este o metodă larg utilizată în toate sistemele modale.

În loc de lume posibilă putem, evident, utiliza şi termenii de stare, situaţie, punct sau nod într-un graf, etc. Mulţimea lumilor posibile o vom nota prin W. Lumile posibile vor fi legate între ele prin relaţia binară R, $R \subseteq W \times W$. Perechea $G = \langle W,R \rangle$ va descrie poziţia relativă una faţă de alta a lumilor posibile, structura („cadrul”, engl frame) sau graful lor, căci W poate fi văzută şi ca o mulţime de noduri, puncte sau stări discrete conectate între ele prin relaţia R.

Universitatea Spiru Haret

R se mai numeşte şi *relaţie de accesibilitate*. R(x, y) se citeşte „starea x este legată de starea y" sau „starea y este accesibilă din starea x" sau „ y este o stare alternativă la x". Se mai pot citi în interpretare spaţială sau temporală „x precede pe y„ sau „y urmează lui x".

Fiecare lume posibilă se supune legilor logicii clasice: o variabilă propoziţională (sau un atom predicativ) este într-o lume posibilă adevărată sau falsă; se păstrează definirea conectivelor logice şi teoria funcţiilor de adevăr, legile logicii propoziţiilor şi ale cuantificatorilor.

Într-o structură de graf G definim o aplicaţie v din A1 = {p, q, r, p_1, p_2, . . . , p_n} mulţimea variabilelor individuale în mulţimea lumilor posibile în care acea variabilă devine adevărată: v: A1 $\rightarrow 2^W$ astfel că v(p) = {L$\subseteq 2^W$: w$\in$L $\supset$ p este adevărat în w}. Expresia „p este adevărat în w" se mai poate scrie: w$\models$ p. Mulţimea v(p) a lumilor s în care p este adevărată poate fi definită astfel: v(p) = {s$\in$W|s$\models$ p}

Un model M de tip Kripke va fi o pereche M = <G,v>, unde G este, ca mai sus, o pereche <W,R> iar v este funcţia de evaluare semantică ce asociază unei variabile propoziţionale stările sau lumile în care aceasta este adevărată. Astfel un model de tip Kripke va fi o tripletă

M = <W,R, v > care cuprinde stările W, relaţia de accesibilitate dintre stări R şi atribuirile de valori de adevăr v dată variabilelor propoziţionale în acele stări. Spunem că modelul este bazat pe structura sau graful G sau că G este baza sau cadrul lui M.

Fie F o formulă logic modală dintr-un limbaj oarecare, s o stare sau lume posibilă din W, atunci putem defini printr-o inducţie matematică relaţia logico semantică ternară „ formula F este adevărată în starea s în modelul M" şi scrie prescurtat: (M,s) $\models$ F

(M,s) $\models$ p $\Leftrightarrow$ s$\in$ v(p) (unde v este funcţia de valorizare şi p o variabilă propoziţională)

(M,s) $\models$ T Tautologiile au model în orice stare sau lume posibilă.

not(M,s) $\models\perp$ Contradicţiile nu au model nici într-o stare sau lume posibilă.

(M,s) $\models$ A$\wedge$B $\Leftrightarrow$ (M,s) $\models$ A şi (M,s) $\models$ B ;

(M,s) $\models$ A$\vee$B $\Leftrightarrow$ (M,s) $\models$ A sau (M,s) $\models$ B ;

(M,s) $\models$ A$\supset$B $\Leftrightarrow$(M,s) $\models$ A implică (M,s) $\models$ B ;

(M,s) $\models$ -A $\Leftrightarrow$ nu are loc (M,s) $\models$ A

(M,s) $\models$ LA $\Leftrightarrow$ (M,v) $\models$ A, pentru orice v$\in$W, astfel că R(s,v);

(M,s) $\models$ MA $\Leftrightarrow$ (M,v) $\models$ A, pentru o stare v, astfel că R(s,v);

Dacă (M,s) $\models$ F nu are loc vom spune că (M,s) respinge F în starea s.

Universitatea Spiru Haret

Aceasta se mai poate scrie şi prin tăierea cu o bară oblică a simbolului asertării semantice într-un model M şi într-o stare s. Putem scrie şi sub o formă mai simplă, omiţând pe M, când acesta este subînţeles, ca mai jos:

$s \models F$ când în starea s formula F este adevărată

$s \not\models H$ când în starea s formula H este falsă.

Fie M = <W,R, v > un model bazat pe graful G <W R >. Spunem că o formulă F este *adevărată în modelul M* şi scriem $M \models F$, dacă $s \models F$ pentru orice s din W.

O formulă adevărată într-un model este adevărată în toate stările accesibile prin R, respectiv, dacă v(p) = W.

Similar, vom spune că modelul M satisface o formulă F, dacă v(F) nu este vidă, respectiv dacă F devine adevărată cel puţin într-o stare.

Spunem că F este validă în graful G sau că graful G validează formula F şi scriem $G \models F$, dacă v(F) = W pentru orice evaluare v din G sau, ceea ce este acelaşi lucru, F este adevărată în toate modelele bazate pe structura G.

Spunem că formula F este realizabilă în graful sau frame-ul G, dacă F este satisfăcută cel puţin într-un model bazat pe structura sau graful G.

Formula F este validă în graful G, dacă şi numai dacă –F nu este realizabilă în graful G.

Spunem pentru un set de formule Γ dintr-un limbaj de logică modală că G este un graf sau un cadru (şablon) pentru Γ, dacă toate formulele din Γ sunt valide în G. În acest caz vom scrie: $G \models \Gamma$.

Despre o formulă F spunem că este Γ-realizabilă, dacă şi numai dacă, F este realizabilă într-un graf pentru Γ.

În lucrarea excelentului grup de cercetare condus de Dov Gabbay [13] se stabileşte o corespondenţă între limbajele teoriilor logice şi grafurile sau frame-le ce le descriu.

Fie C o clasă arbitrară de grafuri ce descriu semantica unor teorii logic modale. Atunci putem să asociem clasei de grafic C propria sa logică după cum urmează:

$\text{Log } C = \{F \in \text{LMod} \mid \forall G \in C \; G \models F\}$

Logica grupului de grafice C va fi alcătuită din mulţimea formulelor de logică modală Lmod care sunt valide în grafurile G din C.

Spunem că o logică modală L este validă în raport cu grupul de grafice C dacă are loc $G \models F$, pentru orice $F \in L$ şi toţi G sunt din C, respectiv dacă $L \subseteq \text{Log } C$.

Universitatea Spiru Haret

Spunem că L este complet în raport cu C sau C-complet, dacă oricare ar fi formula F din L, F este validă în orice graf din C, adică Log C $\subseteq$ L.

Spunem că un limbaj L este determinat sau caracterizat de grupul de grafice C, dacă L este în acelaşi timp C-valid şi C-complet, respectiv L= Log C.

Dacă un limbaj modal L este L-determinat de un grup de grafice, spunem că este L-Kripke complet. Dov Gabbay arată [24] că o logică modală Kripke completă poate fi caracterizată de diferite clase de grafuri sau frame-uri. Dacă un limbaj este Kripke complet, atunci el este determinat de o clasă de grafuri GrL a tuturor grafurilor ce validează formulele din L, respectiv L = LogGrL.

O caracteristică ce face logicile modale standard elegante o constituie faptul că semantica lor este determinată în sensul definit mai sus de clase „naturale" de grafuri sau structuri semantice.

Sistemul K este determinat de clasa tuturor grafurilor. Nu se pune nici o restricţie formală asupra grafurilor ce-i descrie semantica.

Reamintim câteva proprietăţi posibile ale relaţiei de alternativitate ce apare în într-un graf (frame, cadru sau şablon) sau într-un model văzut ca o tripletă M = <W,R, v >.

R este *tranzitivă* $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in W\ (R(x,y) \wedge R(y, z)) \supset R(x, z)$

R este *reflexivă* $\Leftrightarrow \forall x \in W\ R(x,x)$

R este *quasiordonată sau de ordine slabă* $\Leftrightarrow$ R este reflexivă şi tranzitivă.

R este *simetrică* $\Leftrightarrow \forall x,y \in W\ (R(x,y) \supset R(y,x)$

R este o *relaţie de echivalenţă* $\Leftrightarrow$ R este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

O relaţie este *universală* pe W $\Leftrightarrow \forall x,y \in W(R(x,y)$

O relaţie este *serială* pe W $\Leftrightarrow \forall x \in W \exists y \in W\ R(x,y)$

O relaţie R este *ireflexivă* $\Leftrightarrow$R(x,x) nu are loc pentru nici o stare sau lume posibilă

O relaţie ireflexivă şi tranzitivă se numeşte de *ordine parţială strictă.*

O relaţie este numită noetheriană $\Leftrightarrow$ este strict parţial ordonată şi nu există un lanţ ascendent infinit de forma $x_0Rx_1Rx_2\ldots$ de stări pe W.

O relaţie este euclidiană $\Leftrightarrow$ satisface proprietatea: $\forall x,y,z \in$ W $(R(x,y) \wedge R(x, z)) \supset R(y, z)$ Dacă x este un nod de scindare, atunci terminaţia primului nod este conectată cu terminaţia celui de al doilea.

O relaţie este slab conectată $\Leftrightarrow$ satisface proprietatea $\forall x,y,z \in$ W $(R(x,y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z) \vee y = z \vee R(z,y)$.

Universitatea Spiru Haret

O relație este *antisimetrică* $\Leftrightarrow$ satisface proprietatea $\forall x,y \in W\ (R(x,y) \wedge R(y, x)) \supset x = y$.

O relație este *funcțională* $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in W(R(x,y) \wedge R(x, z) \supset y = z)$.

O relație este de *ordine parțială* $\Leftrightarrow$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Relația de accesibilitate din grafurilor sau „freimurilor" ce descriu semantici de logici modale poate fi etichetată de una sau mai multe dintre proprietățile reamintite mai sus.

Un rezultat major al lui Saul A. Kripke în logicile modale este demonstrația faptului că sistemele modale D, T, K4, S4 şi S5 sunt Kripke complete şi că fiecăruia dintre acestea le pot fi asociate structuri grafice cu proprietăți formale distincte după cum urmează:

1. GrD este clasa grafurilor seriale, asociate sistemelor de logică deontică. Într-o conduită normată unui agent trebuie în orice stare să-i fie permisă o continuare. Unui agent nu-i putem niciodată bloca toate conduitele posibile.

2. Relația de alternativitate în sistemul T este reflexivă. Necesarul este mereu conținut şi în starea prezentă.

3. Relația de alternativitate în sistemul S4 este tranzitivă.

4. Relația de alternativitate în S5 este o relație de echivalență

Autorii tratatului de logică modală multidimensională identifică între altele un număr de sisteme logice modale caracterizate sau determinate de reprezentări grafice având proprietăți matematice „naturale" sau „acceptabile".

Reproducem mai jos definițiile succinte ale acestor sisteme şi dăm după aceasta proprietățile formale ale relației de accesibilitate pentru aceste sisteme şi raporturile de subordonare dintre ele descrise de o latice.

$Alt = K + Mp \supset Lp$

$DAlt = Alt + Lp \supset Mp = D + Mp \supset Lp$

$KD45 = K4 + Lp \supset Mp + Mp \supset LMp$

$K4.3 = K4 + L(L^{+}p \supset q) \vee L(L^{+}q \supset p)$

$GL.3 = GL + L(L^{+}p \supset q) \vee L(L^{+}q \supset p)$

$S4.3 = S4 + L(Lp \supset q) \vee L(Lq \supset p)$

$Grz = S4 + L(L(p \supset Lp) \supset p) \supset p.$

Se adaugă două definiții:

$L^{+}p = p \wedge Lp$

$M^{+}p = p \vee Mp$

Universitatea Spiru Haret

O metateoremă enunțată de către Dov Gabbay şi colaboratorii este următoarea (T.1.4):

1. GrAlt = {G| G este funcțional}
2. GrDAlt = {G| G este funcțional şi serial}
3. GrKD45 = {serial, tranzitiv şi euclidean}
4. GrK4.3 = {G| G este tranzitiv şi slab conectat}
5. GrGL.3 = {G| G este noetherian, slab conectat şi de ordine parțială}
6. GrS4.3 = {G| G este slab conectat şi de quasiordine}
7. GrGrz = {G| G este o relație de ordine parțială noetheriană }

În viziunea expusă mai sus logicile modale sunt văzute ca mulțimi de formule închise față de regulile de derivare asociate fiecărui sistem axiomatic sau ca mulțimi de formule Γ ce satisfac proprietățile setului de grafuri asociat unui limbaj formal L de logică modală.

Aceste familii de mulțimi de formule pot fi ordonate după relația $\subseteq$ si organizate sub aspect algebric într-o latice.

În această latice K este cel mai mic element al laticei, iar mulțimea cea mai extinsă este Log $\varnothing$ sau mulțimea inconsistentă de formule. Makinson a arătat în 1971 că, în raport cu relația $\subseteq$, sunt două logici modale maximale consistente.

Verum = Log{•}= K4 +Lp

Triv = Log{°}= K4 +Lp ≡p

unde • este mulțimea singleton ireflexivă, graful lui $<\{s\},\varnothing>$ şi ° este o mulțime singleton reflexivă, respectiv graful $<\{s\},<s, s>>$. Orice sistem de logică modală este conținut fie în **Verum**, fie în **Triv** sau în ambele. Cel puțin unul dintre grafurile lui • sau ale lui ° va conține un sistem de logică modală oricare ar fi acesta. Redăm după autorii citați mai sus diagrama logicilor modale standard. O săgeată de la un sistem S1 la un sistem S2 va însemna că S1$\subseteq$ S2. Fiecărei săgeți îi corespunde o metateoremă de incluziune a sistemului S1 în sistemul S2 sau de conținere de către S2 a lui S1.

Între noutățile aduse de către grupul lui Dov Gabbay menționăm cercetarea sistemelor lui K. Gödel şi Löb şi integrarea lor în familia sistemelor modale standard.

Plasată la un nivel metateoretic cercetarea grupului leagă prin definiții adecvate perspectiva axiomatică formală de cea semantică reprezentată pe frame-uri sau în terminologia noastră pe grafuri şi pe proprietățile formale ale relației de accesibilitate.

Universitatea Spiru Haret

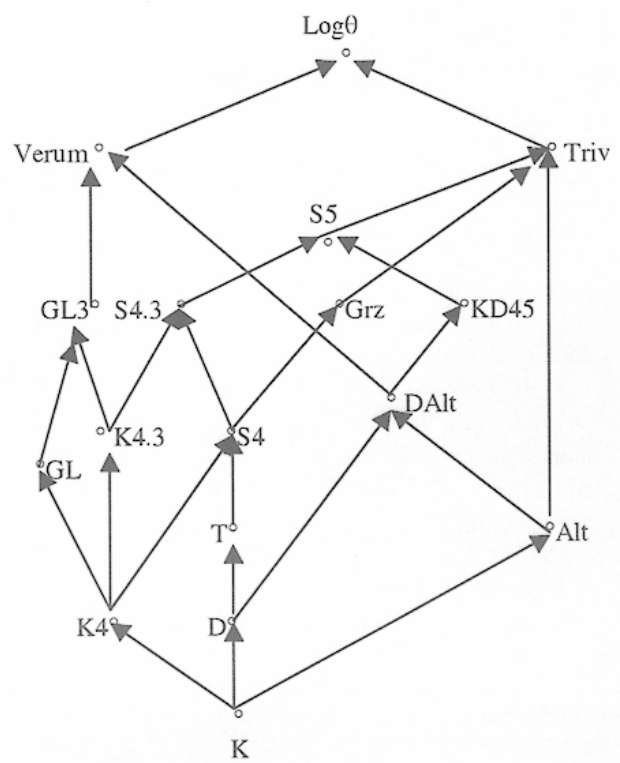


Fig 2. *Logicile modale standard după Dov Gabbay şi colab.*

Observaţii finale

1. Într-o primă instanţă un sistem formal este o mulţime de formule bine formate, care respectă nişte reguli de bine formare, respectiv o mulţime finită de reguli sintactice de construcţie. Un limbaj formal se defineşte procedural, prin reguli, constructiv.

2. Un sistem formal modal este un sistem formal în formulele căruia intră operatori modali în sens larg;

3. Un sistem formal axiomatic este o mulţime de formule derivabile din setul iniţial de axiome prin intermediu regulilor de inferenţă admise în sistem, reguli date iniţial în sistem sau demonstrate din teoremele sistemului cu ajutorul regulilor deja existente în sistem.

Universitatea Spiru Haret

4. Relația de consecință logică sau de derivabilitate (deducție într-un sistem) introduce o relație de ordine slabă în mulțimea formulelor ce aparțin unui sistem.

5. Sintaxa într-un sistem axiomatic are două feluri de reguli: mai întâi reguli de bine formare şi după aceea reguli de inferență sau de deducere de noi teoreme în acel sistem.

6. Sistemele axiomatice modale K, D, T, S4, B, S5 sunt numite sisteme formale normale, deoarece toate păstrează axioma specifică lui K şi fac uz de regula necesitării. Toate pot fi obținute din K prin adăugarea unor noi axiome şi a unor noi reguli de inferență.

7. Echipa lui Dov Gabbay a scos la lumină rezultate vechi şi a îmbogățit substanțial familia sistemelor modale normale sau standard propunând o nouă organigramă a acestora, incluzând noi stele în harta orizontului logic modal, cum sunt sistemele Godel-Lob.

8. Pentru fiecare sistem modal avem una sau mai multe interpretări semantice care-l particularizează.

9. După cum am văzut în primul subcapitol, dar şi în subcapitolul 5 consacrat sistemului S4, logicile modale aletice descriu teoreme ale implicației stricte, respectiv ale relației de consecință logică. Logica modală aletică poate fi privită ca o reflecție teoretică şi metateoretică despre relația de consecință logică. Logica modală s-a născut ca o teorie despre implicația logică şi continuă să rămână relevantă în această privință. Conceptele de validitate, realizabilitate, contradicție şi infirmabilitate sunt intim legate de modalitățile L, M, L-,M-.

10. Axioma specifică a sistemului S4 $Lp \supset LLp$ ne spune că un enunț logic necesar care descrie o lege logică, poate fi, la rândul lui, fundamentat, la alt nivel, cel al teoriei sistemelor axiomatice, ca fiind logic necesar pe temeiul că el derivă din axiome sau formule valide prin scheme valide de inferență.

11. Logica este un edificiu cu mai multe nivele. Ea operează la nivelul limbii naturale, să spunem, la parter. Dar mai operează şi la nivelul primului etaj, respectiv, la nivelul teoriilor logice primare, cum ar fi silogistica, logica propozițiilor, logica predicatelor de ordinul întâi. Dar mai operează şi la etajul al doilea, la nivelul teoriei sistemelor axiomatice, unde construim o teorie logică despre legile logice. Prelucrăm legile logicii cu metodele logicii. Şi de aici ne urcăm la nivel metateoretic, la etajul trei când dezvoltăm teorii despre proprietățile altor teorii logice.

Universitatea Spiru Haret

12. Schemele şi regulile logice, deducţia şi demonstraţia pot opera la oricare dintre aceste nivele, la nivelul limbilor naturale şi a gândirii logice spontane a oamenilor despre obiectele, faptele şi evenimentele lumii reale. Oridecâteori rezolvăm o problemă folosim conştient sau spontan reguli şi scheme de inferenţă care conservă veridicitate premiselor în consecinţele degajate din acestea. Demonstraţiile făcute din ipoteză sau demonstraţiile automatizate făcute într-un sistem expert aparţin acestei categorii. Cel de al doilea, deşi puţin mai reflexiv, nu e departe de primul. Demonstrarea teoremelor din axiomatica logicii propoziţiilor (vezi capitolul 2 are loc la nivelul operaţiilor logice aplicate formulelor logice, unde logica se aplică legilor logice. În acest caz se conservă validitatea şi nu doar veridicitatea propoziţiilor de provenienţă empirică. chiar şi atunci când aplicăm schemele logicii asupra unor date empirice facem frecvent uz de realizări dobândite la nivel metateoretic, utilizăm calculul natural, calculul secvenţial sau metateorema deducţiei TD, care permite scurtarea textului demonstrativ.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 7. **Logica temporală**

Logica temporală poate fi văzută ca o aplicație particulară a logicii modale aletice la domeniul momentelor temporale supuse unei relații de ordine liniară sau la domeniu intervalelor temporale.

Von Wright a publicat în 1951 Essay in Modal Logic în care își prezintă sistemele sale M, M' şi M", dintre care M este deductiv echivalent cu T, M' conține pe S4 al lui C. I. Lewis şi M" este echivalent cu S5 al lui C.I. Lewis.

1. **Sistemul diodorean de logică temporală**

Tentativa lui A. Prior de a găsi o construcție formală pentru *Master argument* al lui Diodorus Cronos l-a condus pe Prior la crearea unui simbolism pentru teoria logică a momentelor şi intervalelor de timp, din viitor şi din trecut, şi despre vorbirea în limbile naturale despre timp, un fel de „tense logic". Logica temporală a debutat prin studiul *Diodorean modalieties*, publicat în The Philosophical Quarterly,1955, v.5, No 20.

Prior a introdus un operator primitiv Fp cu semnificația: „Va avea loc p". Pe baza lui a definit, ca în logica modală, pe Gp:

D1. $Gp =_{df} -F-p$

care se citeşte: „Întotdeauna va avea loc în viitor p, sau este fals că în viitor va avea loc vreodată –p.

Sistemul lui A.N. Prior presupune logica propozițiilor; este o supraetajare a acesteia.

Axiomele lui sunt:

A1. $F(p \vee q) \equiv Fp \vee Fq$ i.e. EApqAFpFq

A2. $FFp \supset Fp$ i.e. CFFpFp

R1. $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash G\alpha$

R2. $\vdash \alpha \rightleftharpoons \beta \Rightarrow \vdash F\alpha \rightleftharpoons F\beta$

R1 spune că dacă α este o lege logică, atunci întotdeauna în viitor α va fi o lege logică.

Universitatea Spiru Haret

R2 spune că dacă α este echivalentă cu β, atunci F (α) este echivalent cu F (β).

Prior a definit posibilul ca ceva ce are loc în prezent sau va avea loc în viitor şi necesarul ca ceva ce are loc în prezent şi va avea loc întotdeauna în viitor.

D2. $Mp =_{df} p \vee Fp$ i.e. $Mp =_{df} ApFp$
D3. $Lp =_{df} p \wedge Gp$ i.e. $Lp =_{df} KpFp$

Logica propoziţiilor împreună cu A1, A2, R1, R2 alcătuiesc o teorie despre prezent şi viitor construită de AN. Prior cu scopul de a da seama de concepţia lui Diodor Cronos existentă în *Master argument*.

Adăugarea la acestea a definiţiilor D2 şi D3 ne permite să construim o teorie logică modală de tip diodorean şi să o raportăm pe aceasta la sistemele lui C.I. Lewis şi la sistemele de logică modală standard T, S4 şi S5. Prior a arătat că sistemul de logică modală diodorean este mai tare decât s4 al lui C.I. Lewis şi mai slab decât S5 al aceluiaşi autor.

Sistemul diodorean de logică temporală propus de către Arthur Prior în Past, Present and Future, 1967, se sprijină pe sistemele modale wrightiene. Arthur Prior a folosit notaţia frontală poloneză introdusă de Jan Lukasiewicz, în care N este un operator monadic pentru negaţie, K, A şi C sunt operatori binari pentru conjuncţie, disjuncţie slabă şi implicaţie. Ca şi până acum, L şi M vor desemna operatorii modali cunoscuţi. M este considerat operatorul modal primitiv. L va fi introdus prin definiţie.

$Lp =_{df} NMNp$

Pentru sistemul wrightian M sunt presupuse:

legile logicii propoziţiilor, de exemplu sistemul Hilbert Ackermann şi regula necesităţii:

$\vdash \alpha \Rightarrow \vdash L\alpha$

Se admite, de asemenea, regula modală a extensionalităţii ,RE, care permite:

$\vdash E\alpha\beta \Rightarrow \vdash EM\alpha M\beta$

În plus, von Wright a postulat axiomele:

W1. CpMp
W2. EMApqAMpMq sau $M(p \vee q) \equiv Mp \vee Mq$

Este uşor de văzut că sistemul wrightian M este deductiv echivalent cu sistemul T prezentat anterior în capitolul despre logica modală aletică.

Universitatea Spiru Haret

Lăsăm demonstrarea acestei metateoreme pe seama cititorului. E uşor de observat că Ax2 de mai sus a fost demonstrată ca teoremă în T. La fel, Ax1 a fost şi ea demonstrată ca teoremă în T. Regula RE de mai sus poate fi şi ea demonstrată dintr-o regulă derivată obţinută în T.

Sistemul M' se obţine din M prin adăugarea axiomei:

W3. CMMpMp sau MMp $\supset$ Mp

care spune că ceea ce este posibil să fie posibil este posibil.

Sistemul M' este cel puţin de tăria lui S4.

Sistemul M" se obţine din M' prin adăugarea axiomei:

W4. CMNMpNMp sau M – Mp $\supset$ – Mp

care spune că dacă este posibil ca p să fie imposibil (sau să aibă loc negaţia lui p), atunci nu este posibil p. Sistemul M" este echivalent cu S5.

Arthur N. Prior a interpretat temporal, în spiritul concepţiei filosofului stoic Diodor Cronos, cele trei sisteme de logică modală create de von Wright.

Ingeniozitatea lui Arthur N. Prior a constat in analiza concepţiei lui Diodor Cronos în termenii logicii modale moderne şi în construirea mai multor versiuni de logici temporale intim legate de sistemele de logică modală.

Posibilul diodorean vizează starea prezentă şi stările accesibile în viitor din starea prezentă. Putem, astăzi, să-l conectăm cu idea de posibil prin acţiunea umană, cu fezabilul şi să-l raportăm, de asemenea la logicile dinamice.

Putem adopta însă şi o perspectivă inversă şi să definim posibilul ca ceva ce s-a realizat cândva în trecut sau are loc în prezent.

MP Mp $=_{df}$ APpp sau Mp $=_{df}$ Pp $\vee$ p

unde P este operatorul pentru trecut iar ultimul p afirmă că are loc starea descrisă de propoziţia p.

În sfârşit, putem opta pentru o definiţie mai largă a ideii de posibil care să încorporeze stările din trecut, starea prezentă a sistemului de referinţă şi stările viitoare accesibile din starea prezentă:

PFM Mp = df. AAPppFp sau Mp $=_{df}$ Pp $\vee$ p $\vee$ Fp

2. **Decizia matriceală în sistemul temporal diodorean**

Arthur Prior a propus in 1955-57 o interpretare semantică matriceală pentru sistemul diodorean de logică temporală.

În loc să atribuie unei variabile propoziţionale o valoare de 0 sau 1, Prior a atribuit unei variabile o secvenţă infinită de zerouri sau de 1, distribuite oarecum la întâmplare, fiecare valoare de 1 sau 0 descriind valoarea la un moment dat.

Universitatea Spiru Haret

Negaţia acelei variabile va consta în inversarea valorii în fiecare moment considerat.

Kpq sau p $\wedge$ q va avea valoarea 1 în toate punctele în care atât p cât şi q iau ambele valoarea 1. Apq sau p $\vee$ q va lua valoarea 1 în toate momentele din secvenţe în care cel puţin una dintre variabile va lua valoarea 1. În mod analog, implicaţia Cpq respectiv p $\supset$ q va fi falsă într-un moment dacă şi numai dacă antecedentul p ia valoarea 1 şi consecventul q ia valoarea 0 în acel moment şi adevărată în toate celelalte puncte. Epq sau p $\equiv$ q va fi adevărată în toate punctele în care p şi q iau aceiaşi valoare şi falsă în punctele în care acestea iau valori diferite.

Mp va lua, într-un moment oarecare, valoarea 1, dacă p ia valoarea 1 în acel moment sau dacă există în viitor, pornind de la momentul de referinţă, un punct ulterior în care p va lua valoarea 1. Mp va lua valoarea 0, dacă p ia valoarea 0 în prezent şi continuă să ia mereu aceiaşi valoare 0 în toate momentele ulterioare.

Lp va lua valoarea 1 într-un moment dat, dacă şi numai dacă, în orice moment ulterior, respectiv în orice moment viitor, în toate alternativele va lua valoarea 1. Necesar p nu va fi adevărat până când p nu devine adevărat şi până când nu continuă să fie adevărat în toate momentele ulterioare.

Fie v o funcţie de interpretare definită pe produsul cartezian al momentelor temporale T cu formulele atomare în logica temporală, diodoreană cu valori în B = [0, 1], mulţimea valorilor de adevăr, atunci putem defini:

1. v (t_0, Np) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 0 sau v (t, p) = 0, cu t > t_0 ;
altfel v (t_0, Np) = 0

2. v (t_0, Kpq) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 1 şi v (t_0, q) = 1 sau v (t, p) = 1 şi v (t, q) = 1, pentru unii t > t_0; altfel v (t_0, Kpq) = 0

3. v (t_0, Apq) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 1 sau v (t_0, q) = 1 sau v (t, p) = 1 sau v (t, q) = 1, pentru uni t > t_0; altfel v (t_0, Apq) = 0

4. v (t_0, Cpq) = 0 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 1 şi v (t_0, q) = 0 sau v (t, p) = 1 şi v (t, q) = 0, cu t > t_0 ; altfel v (t_0, Cpq) = 1

5. v (t_0, Epq) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = v (t_0, q) şi v (t, p) = v (t, q) pentru uni t > t_0 ; altfel v (t_0, Epq) = 0

6. v (t_0,Mp) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 1 sau dacă există t > t_0 cu proprietatea v (t, p) = 1, atunci pentru orice t1 ce precede pe t, i.e. t1< t vom avea v (t1, Mp) = 1

7. v (t_0,Lp) = 1 $\Leftrightarrow$ v (t_0, p) = 1 şi oricare ar fi t > t_0
vom avea v (t, p) = 1

Universitatea Spiru Haret

Obs. 1. Condițiile I-4 definesc semantica operațiilor logice propoziționale în logica temporală propozițională. Fiecărei variabile propoziționale i-am asociat o secvență de valori, câte una pentru fiecare moment temporal.

Obs. 2. Negația inversează pentru fiecare moment din secvență valoarea acordată formulei în apariție pozitivă.

Obs. 3. Conectivele logice își păstrează definițiile specifice la nivelul unui moment temporal. Se păstrează, de asemenea, interdefinibilitatea acestora.

Obs. 4. Mp este adevărat, atât timp cât în secvența de valori urmează ca p să devină adevărat. Posibil p (Mp) încetează de a fi adevărat într-un moment în care în secvență încep să apară numai valori de zero.

Obs. 5. Lp începe să fie adevărat într-o secvență de îndată ce în secvență apar pentru argumentul lui L (pentru p) numai valori de 1. Lp devine fals de îndată ce în secvență apare la un moment dat pentru p o valoare de fals.

Exercițiul 1. Să se aplice regulile semantice definite mai sus la axiomele Ax1 şi Ax2.

Exercițiul 2. Să se aplice regulile semantice definite mai sus la axiomele A3 şi A4.

Temă de reflecție 1. Dacă sistemul diodorean este o modalizare aletică a unei teorii despre prezent şi despre viitor putem concepe şi demersul invers prin care construim o interpretare temporală pentru un sistem modal oarecare, cum ar fi, de exemplu, sistemul K, D, B sau alte sisteme.

Temă de reflecție 2. Folosiți sistemul temporal diodorean pentru a descrie o teorie a actelor umane cu date şi durate ale unor conduite.

Temă de reflecție 3. Dată fiind semantica prezentată mai sus, adaptați metoda arborilor de decizie pentru sistemul temporal diodorean.

Temă de reflecție 4. Ce proprietăți va avea relația de alternativitate într-o semantică de lumi posibile adecvată sistemului diodorean?

3. **Sisteme temporale metrice**

Sistemele prezentate mai sus au fost sisteme temporale sau sisteme modale monadice, cu un singur argument, variabila propozițională, care preciza ce va fi sau ce este posibil sau necesar. A. N. Prior a creat şi sisteme temporale sau modale cu două argumente, în care primul

Universitatea Spiru Haret

argument stă pentru intervalul de timp, în urmă sau înainte, peste care va avea loc starea descrisă de variabila propoziţională. Fnp se va citi. „Peste n unităţi de timp in viitor va avea loc p" unde p este o propoziţie ce caracterizează o stare. La fel, putem scrie Pnq care afirmă că, în trecut, cu n unităţi de timp în urmă, a avut loc starea descrisă de propoziţia p. F0p, adică peste 0 unităţi de timp, adică „acum" are loc starea descrisă de propoziţia p este tot una cu a spune că are loc p. F0p $\supset$ p.

Dăm mai jos axiomele unui astfel de sistem temporal, „metric", cu timpi măsuraţi.

A1. Fn-p $\supset$ -Fnp
A2. –Fnp $\supset$ Fn-p
A3. Fn (p $\supset$q) $\supset$ (Fnp $\supset$ Fnq)
A4. F0p $\supset$ p
A5. FmFnp $\supset$ F (m+n)p
A6. Fm$\exists$nFnp $\supset$ $\exists$nFmFnp

Regulile de inferenţă în sistem sunt substituţia, RS, modus ponens, MP şi regulile introducerii cuantificatorului universal, I$\forall$ şi a cuantificatorului existenţial, I$\exists$. La acestea se mai adaugă regula:

$\vdash\!\!-\alpha \Rightarrow \vdash\!\!-Fn\alpha$

Dacă α este o lege logică, va rămâne lege logică şi peste n unităţi de timp.

Sistemul de logică temporală „metrizată" definit mai sus se poate transforma într-un sistem de logică modală, dacă vom adăuga la axiomele şi regulile de mai sus definiţiile:

DM1. Lp $=_{df}$ (n)Fnp DM2. Mp $=_{df}$ $\exists$nFnp

O stare descrisă de propoziţia p este necesară dacă este adevărată în prezent (vezi şi A4) şi dacă este adevărată în orice moment viitor, pentru orice valoare ar lua n. O stare descrisă de p este posibilă dacă există un interval de timp n astfel încât peste n unităţi de timp să devină adevărată.

Lp şi Mp din definiţiile DM1 şi DM2 sunt operatori modali monadici, ca în sistemele clasice de logică modală.

Se poate arăta că sistemul de mai sus conţine sistemul S4 al lui C.I. Lewis.

Putem da un singur operator modal primitiv, de exemplu, pe DM2 şi pe celălalt să-l introducem prin raportare la cel admis.

Lp $\equiv$ -$\exists$nFn-p $\equiv$ $\forall$n-Fn-p $\equiv$$\forall$nFn--p $\equiv$$\forall$nFnp $\equiv$ (n) Fnp

Universitatea Spiru Haret

Sistemul de logică metrizată definit mai sus se numeşte sistemul P4. A.N.Prior a mai dezvoltat un sistem logic P5 al logicii temporale a datelor. Prior presupune fixarea unei date iniţiale de referinţă pentru iniţierea unui calendar, ca naşterea lui Cristos, fuga evreilor din Egipt, etc.

$\tau p \equiv p \vee \exists nPnp \vee \exists mFmp$

Expresia Utp se citeşte: „La data t a avut loc p". Se mai poate citi „A avut loc p la data t"

Axiomele logicii temporale a datelor sunt:

A1. $Ut\text{-}p \supset \text{-}Utp$

A2. $\text{–}Utp \supset Ut\text{-}p$

A3. $Ut\ (p \supset q) \supset (Utp \supset Utq)$

A4. $(t)Utp \supset p$

A5. $Ut'Utp \supset Utp$

Regulile de deducţie sunt, ca şi mai sus, substituţia RS, *modus ponens*, MP, regulile introducerii cuantificatorilor şi o variantă de regula necesităţii de forma :

$\vdash\!\!\!-\alpha \Rightarrow \vdash\!\!\!-Ut\alpha$

Pentru interpretarea modală a logicii datării, A.N.Prior propune definiţii adecvate pentru posibil şi pentru necesar.

UM1 $Mp =_{df} \exists tUtp$ UM2 $Lp =_{df} (t)Utp$

A.N.Prior arată că logica datării îmbogăţită cu definiţiile UM1 şi UM2 conţine sistemul modal S5, cel mai tare dintre sistemele de logică modală standard.

4. **Semantica lumilor posibile şi logicile temporale**

Logica temporală poate fi văzută ca o specie de logică modală. Putem vedea timpul ca o succesiune de momente sau ca o mulţime de intervale temporale fiecare interval reprezentând o durată ce are o dată de începere şi o dată de terminare.

Ne oprim pentru început asupra înţelegerii timpului ca o succesiune de momente. Graful cu ajutorul căruia îl putem descrie este

$G = (T, <)$ unde T este mulţimea de referinţă, momentele temporale şi $<$ este relaţia de precedenţă definită între momentele temporale. Putem interpreta pe $<$ ca o relaţie de ordine liniară strictă care este tranzitivă, ireflexivă şi conexă (Vezi definiţiile în Cap 6, paragraful despre Semantica lumilor posibile)

Universitatea Spiru Haret

Relaţia de conexitate spune că două stări x şi y sunt conexe dacă x < y sau y < x sau x = y.

Necesitatea unei stări x poate fi înţeleasă ca „întotdeauna în viitor x iar posibilitatea ca „cel puţin odată, în viitor, va avea loc x."

Cum observatorul are mereu în faţă prezentul, el poate privi spre viitor şi să conceapă planuri şi programe de acţiune sau spre trecut şi să evoce evenimente, acţiuni, conduite şi să evoce amintiri, să scrie istorii reale sau fictive.

Putem defini şi o necesitate sau o posibilitate pe domeniul stărilor, faptelor sau evenimentelor trecute. Pentru aceasta vom face uz de inversa relaţiei de precedenţă, de $<^{-1}$., respectiv de >.

Putem conveni să facem uz de L_F pentru „întotdeauna în viitor" şi de L_P pentru „întotdeauna în trecut". Corespunzător, vom utiliza M_F pentru „cel puţin odată în viitor" şi M_P pentru „cel puţin o dată în trecut".

Dacă le vom utiliza simultan pe amândouă notaţiile, atunci graful sau şablonul semanticii noastre va fi:

$G^* = (T, <, >)$

Lumile noastre posibile vor fi momentele temporale t, t', t_1, t_2, … Putem defini necesitatea ca „întotdeauna în viitor să … „relativă la un moment de referinţă t. şi analog, necesitatea ca „întotdeauna în trecut să …"

$t \models L_F p \Leftrightarrow (\forall t' > t)\ t' \models p$

$t \models L_P p \Leftrightarrow (\forall t' < t)\ t' \models p$

Putem scrie formule cu apariţii iterate şi mixte ale operatorilor de mai sus.

$M_F L_F p$ = Este posibil ca, odată în viitor, să fie întotdeauna adevărat p.

Formula de mai sus spune că ceva care nu este în prezent o necesitate poate deveni, după o anumită dată viitoare, o necesitate, respectiv un adevăr adevărat în orice clipă. Un tânăr care se va îndrăgosti în viitor de o fată va simţi din acea clipă nevoia a o vedea în fiecare moment viitor. O persoană care va începe în viitor să fumeze, va încerca după un interval nevoia (necesitatea) de a fuma un număr de ţigări în fiecare zi.

Putem conveni să numim sistemele logice care utilizează simultan şi operatori pentru trecut şi pentru viitor sisteme bimodale.

Universitatea Spiru Haret

Dacă mai admitem, cum am văzut mai sus, că semantica acestora sisteme modale este caracterizată de grafuri ce satisfac cerinţele unei relaţii liniare de ordine strictă, atunci vom obţine o logică de tip K4.2.

Semantica acesteia poate fi descrisă ca:

Lin = $\{F \in LM_2 | G \models F$ unde G are o ordine liniară strictă$\}$

unde prin LM_2 am notat un limbaj de logică modală bimodală.

O logică bimodală este o mulţime de formule despre trecut şi viitor care sunt valide într-un graf cu ordine liniară strictă, adică tranzitiv, ireflexiv (fără bucle !) şi conex .

Dov Gabbay a arătat că o astfel de logică coincide cu sistemul K4.2. caracterizat prin axiomele:

A1. $p \supset L_F M_P p$

A2. $p \supset L_P M_F p$

A3. $M_F M_P p \vee M_P M_F p \supset p \vee M_F p \vee M_P p$

Ce spun aceste axiome?

A1 spune că dacă în prezent are loc p, atunci va fi necesar în viitor să fi fost posibil cândva în trecut ca p să fie adevărat. (Despre ceea ce are loc în prezent este necesar în viitor să putem spune că a fost posibil în trecut să se producă.)

A2 spune că dacă în prezent are loc p, atunci este necesar ca în trecut să fi fost posibil ca în viitor să aibă loc p. (Despre ceea ce are loc în prezent a fost întotdeauna în trecut adevărat că în viitor va fi posibil să se producă).

A3 are ca antecedent disjuncţia dintre consecvenţii primelor două axiome şi drept consecvent eventualitatea de a fi p adevărat sau de a fi cândva în viitor adevărat sau de a fi fost posibil cândva în trecut.

Cercetări recente întreprinse de grupul de logicieni de la Imperial College au evidenţiat dependenţa sistemelor de logică temporală de modul în care sunt reprezentate secvenţele de momente, de faptul dacă acestea sunt descrise în structura (N, <), (Z, <), (Q, <) sau (R, <).

Pentru fiecare clasă de numere N, Z, Q şi R a fost definit câte un tip de logică temporală. Acestea sunt redate ca Teoremă 2.1 (vezi 2, p 41).

$$\text{Log (N)} = \text{Lin} + M_F T + L_P (L_P p \supset p) \supset L_P p + L_F (L_F p \supset p) \supset (M_F L_F p \supset L_F p),$$

$$\text{Log (Z)} = \text{Lin} + M_F T + M_P T + L_F (L_F p \supset p) \supset (M_F L_F p \supset L_F p) + L_P (L_P p \supset p) \supset (M_P L_P p \supset L_P p),$$

Universitatea Spiru Haret

Log (Q) = Lin + M_FT + M_PT + L_FL_Fp ⊃ L_Fp)
Log (R) = Log (Q) + [∀] (L_Pp ⊃ M_FL_Pp) ⊃ (L_Pp ⊃ L_Fp)

La demonstrarea acestor rezultate au contribuit: Goldblatt, 1982, Bull,1968, Segerberg,1970,Volter 1996

Câteva explicații sunt, probabil, necesare. Simbolul Lin care apare în definiția sistemelor Log (N), Log (Z) şi Log (Q) specifică ce tip de graf sau structură de model se asociază la nivel semantic sistemelor logice bimodale în cauză. Toate acestea fac uz de o relație de ordine strict lineară care este tranzitivă, ireflexivă sau fără bucle şi conexă.

Logicile bimodale fac uz deopotrivă de operatori temporali Fp după care starea p va fi adevărată în viitor şi Pp după starea p a fost adevărată în trecut.

În axioma M_FT simbolul T stă pentru tautologii. Ea poate fi rescrisă ca M_F (p ∨ -p). Ea spune că este posibil ca în viitor să aibă loc p ∨ -p.

Axioma L_P (L_Pp ⊃ p) ⊃L_Pp afirmă că dacă a fost necesar în trecut ca necesitatea în trecut a lui p că conducă la realizarea lui p, atunci a fost necesar în trecut p. În mod analog, pot fi tălmăcite şi celelalte axiome. Dar problema reală este identificarea teoremelor ce revin celor patru sisteme de logică temporală, cercetarea proprietăților lor formale, metateoretice şi stabilirea corespondenților dintre reprezentările lor semantice şi axiomatica lor.

Consemnăm în continuare câteva rezultate recent de logică temporală.

Încă prin anii 1979, J.F.K. van Benthem de la Universitatea din Amsterdam, pe care l-am cunoscut la Congresul de logică de la Hanovra, lucra la nişte sisteme de logică a intervalelor temporale, care pot da seama deopotrivă de date la care încep şi de date la care se termină diferite procese sau activități umane. Puțin timp după întoarcerea în țară am primit de la profesorul olandez o lucrare în curs de pregătire despre logica temporală, devenită după aceea o carte de referință. Preocupările sale în direcția logicilor temporale au persistat căci prin anii 1996 publica un amplu studiu despre dinamicele logice Exploring Logical Dinamics.

5. **Logica intervalelor temporale**

Ne-am ocupat cu două decenii în urmă de sistemele lui von Wright de logică temporală And Next, And Then[50, 151-173], care încercau să capteze schimbările în formalisme logice. Captarea schimbărilor şi descrierea proceselor şi actelor umane sunt preocupări majore şi a construcțiilor logice recente.

Universitatea Spiru Haret

Dov Gabbay defineşte un operator al schimbării imediate într-un moment t în raport cu un descriptor de stare dat (*next-time* operator) ca un operator care aplicat momentului t conduce în momentul imediat următor t+1, la realizarea stării descrise de simbolul predicativ.

$t \models \mu\, \varphi \Leftrightarrow t+1 \models \varphi$ (7.5.1)

Dacă această schimbare se realizează printr-un program, în orice moment ce satisface o descriere φ, transformând-o pe aceasta într-o stare imediat succesoare ce satisface descripția ψ, atunci putem scrie:

$[\forall]\ (\varphi \supset \mu\, \psi)$ (7.5.2)

μ este şi aici un operator de schimbare imediată el înlesneşte o tranziție necesară de la o stare ce satisface φ la o stare succesor imediat ce satisface ψ.

Este important să arătăm acum, încă o dată, că teoria logică modernă exploatează „minereu lingvistic". Logicienii au detaşat din limba naturală engleză prepozițiile „*since*" şi „*until*" i-au transformat în operatori temporali binari şi au început să le cerceteze proprietățile sintactice şi semantice, astfel încât să poată descrie cu ajutorul lor relațiile dintre intervalele temporale deschise şi inchise, având „extremele" (începuturile sau sfârşiturile intervalelor) marcate de descriptori şi momentele din interval marcate de alți descriptori.

Iată operatorii temporali binari rezultați:

φ since ψ ⇔ „φ are loc imediat după ce s-a produs ψ"

φ until ψ ⇔ „φ va avea loc până când se va produce ψ"

Definim mai întâi sintaxa unui limbaj logic ce include cei doi operatori. Fie LM_{SU} un limbaj logic temporal rezultat din L limbajul logicii propozițiilor prin extinderea acestuia cu conectivele binare S şi U şi o regulă de bine formare de forma:

Dacă φ şi ψ sunt formule din LM_{SU}, atunci φSψ şi φUψ vor fi formule în LM_{SU}.

Semantica teoriei logice o definim pe baza grafului ordonat strict liniar G = (T, <), a noțiunii de interval deschis şi a două reguli semantice.

Dacă notăm prin (t_1,t_2) intervalul deschis = $\{t \in T \mid t_1 < t < t_2\}$, atunci putem defini semantic conectivele binare φSψ şi φUψ după cum urmează:

$t \models \varphi S\psi \Leftrightarrow$ Există $t_2 < t_1$ astfel că în $t_2 \models \psi$ şi în $t \models \varphi$ pentru orice $t \in (t_1,t_2)$(7.5. 3)

$t \models \varphi U\psi \Leftrightarrow$ Există $t_2 > t1$ astfel că în $t_2 \models \psi$ şi în $t \models \varphi$ pentru orice $t \in (t_1,t_2)$ (7.5. 4)

Universitatea Spiru Haret

Dacă facem abstracție de faptul că definițiile semantice 7.5.3 şi 7.5.4 sunt la nivel metateoretic şi dacă nu mai vrem să folosim noțiunea de interval deschis reamintită mai sus, atunci definițiile de mai sus pot fi redate ca:

$$t \models \varphi S \psi \Leftrightarrow \exists t_2 \, (t_2 < t_1) \wedge t_2 \models \psi) \wedge \forall t \, (t_2 < t < t_1) \supset t \models \varphi) \quad (7.5.\ 3\#)$$

Spunem că în momentele t se păstrează proprietatea φ de imediat după ψ, dacă şi numai dacă, există un moment t_2, anterior lui t_1, în care are loc ψ şi după aceasta orice stare t, după t_2 şi înainte de t_1, satisface proprietatea φ.

Convenim să denumim proprietatea ψ drept marcă de începere şi pe φ drept proprietate a intervalului temporal, proprietatea care se menține sau durează de a lungul intervalului deschis.

$$t \models \varphi U \psi \Leftrightarrow \exists t_2 \, (t_2 > t1 \wedge t_2 \models \psi) \wedge \forall t \, (t_1 < t < t_2) \supset t \models \varphi) \quad (7.5.\ 4\ \#)$$

Spunem că în momentele t se menține proprietatea φ până ce se produce ψ, dacă şi numai dacă, există un moment t2 ulterior lui t1 şi în t2 se produce ψ şi in orice moment t ulterior lui t1 şi anterior lui t2 se păstrează proprietatea φ

Putem reprezenta grafic operatorii „Since" şi „Until" (în românește: „---Începând cu data…" şi "--- Până la data…") dacă marcăm pe o dreaptă strict ordonată un interval deschis şi însemnăm pe aceasta evenimentul de la care începe proprietatea de durată sau evenimentul sau data până la care se menține aceasta.

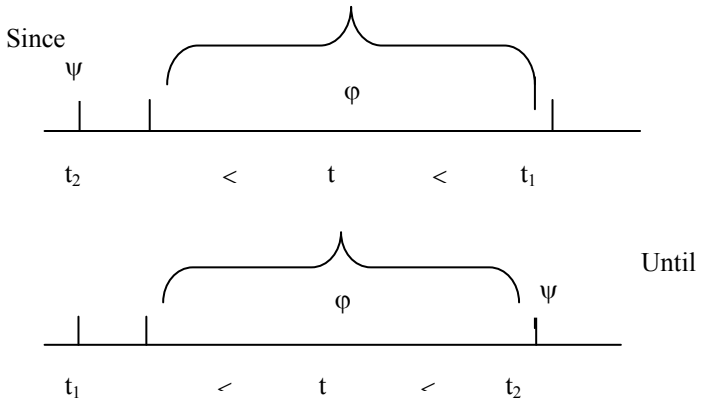


Fig. 1. *Reprezentarea grafică a conectorilor binari S şi U*

Universitatea Spiru Haret

În cazul lui „Since”, marca ψ precede intervalul temporal pe durata căruia se menține proprietatea φ. Dimpotrivă, în cazul lui „Until”, marca ψ succede intervalul temporal pe durata căruia se menține proprietatea φ. Marca ψ nu stă pentru o variabilă temporală, ca t_1 sau t_2, ci pentru un simbol predicativ, ca şi φ simbolul care denotă proprietatea ce se conservă pe toată durata intervalului deschis.

Propoziția „Petru este tare de o ureche, din august 1943, când a fost asurzit de un obuz” poate fi descrisă de o schemă modal temporală de tip „Since”. Variabila t_2, care precede pe t_1, fixează data când a căzut obuzul, marca ψ, după care a început proprietatea de durată φ., surzenia lui Petru care se conservă până în prezent, t_1.

Propoziția „Viorelele înfloresc până temperatura nu este prea ridicată” poate fi descrisă de un operator de tip „Until”.

Putem să ne imaginăm nişte structuri de tip „Since” şi de tip „Until” fără marcă predicativă pentru evenimentul care anunță începutul sau sfârşitul, proprietății de durată, în locul acesteia să apară pur şi simplu data de la care începe intervalul cu proprietatea de durată sau data la care se încheie acesta.

Propozițiile: „Pescuitul este permis de la 1 iunie” sau „Impozitul global poate fi plătit, fără majorări, până la 15 februarie” ilustrează astfel de situații.

Grupul de la Imperial College face uz de S şi U pentru definirea unor operatori modali derivați cum sunt „este posibil în viitor”, „a fost posibil în trecut” sau operatorul „posibilului imediat”.

$M_F \varphi = TU\varphi$ (7.5.5)

$M_P\varphi = TS\varphi$ (7.5.6)

$\mu\varphi = \perp U\varphi$ (7.5.7)

Dacă q este un indiciu sau o marcă pentru producerea lui p, atunci putem scrie:

$M_Fp \supset (-p)Uq$

Gabbay şi colaboratorii descrie puterea expresivă a limbajului temporal modal LM_{SU} cu ajutorul unui sublimbaj logic predicativ de ordinul întâi care deține relația de precedență < şi o mulțime infinită numărabilă de simboluri predicative unare P_1, P_2, …ce descriu proprietăți. Variabilele individuale vor fi definite pe mulțimea momentelor temporale şi vor fi notate prin t_1, t_2, etc. Limbajul acestei logici predicative mai sărace este interpretat pe dreapta strict ordonată şi conexă ce descrie scurgerea timpului.

Universitatea Spiru Haret

Se asociază variabilelor propoziționale din limbajul temporal modal LM_{SU} predicate unare definite pe intervale temporale,

Unei conjuncții îi asociem o conjuncție de intervale, etc. Grupul de la Imperial a studiat puterea expresivă a limbajului LM_{SU}, stabilind că acesta este complet în raport cu structurile (N, <), (Z, <), (R, <), dar nu şi cu (Q, <). Toate logicile generate de aceste structuri sunt finit axiomatizabile şi decidabile.

Un interes aparte prezintă logica temporală propozițională, PTL, care face abstracție de operatorii faptelor posibile în trecut şi de operatorul S ("---Începând cu …") şi reține operatorii viitorului şi pe U ("---Până la …"). Dar, viitorul rămâne în această teorie liniar, neramificat, şi deci inadecvat pentru descrierea actelor de alegere sau decizie. La fel lumea scopurilor şi programelor are nevoie de un viitor neliniar, cu puncte de divergență şi cu puncte de joncțiune.

Redăm mai jos axiomele sistemului temporal propozițional:

A1. $L_F (p \supset q) \supset (L_F p \supset L_F p)$

A2. $\mu (p \supset q) \supset (\mu p \supset \mu q)$

A3. $\mu\text{-}p \equiv \text{-}\mu p$

A4. $L_F p \supset \mu p \wedge \mu L_F p$

A5. $L_{F\,(}p \supset \mu p) \supset \mu (p \supset L_F p)$

A6. $pUq \supset M_F p$

A7. $pUq \equiv \mu q \vee \mu (p \wedge pUq)$.

Regulile de inferență sunt: MP, RS,R necesit. pentru L_F

Obs. 1. Axioma A1 este o axiomă de tip K pentru operatorulul necesității în viitor.

Obs. 2. Axioma A2 este o axiomă de tip K pentru operatorul momentului imediat următor.

Obs. 3. În momentul imediat următor are loc –p, dacă şi numai dacă, nu are loc p.

Obs. 4. Axioma A4 stabileşte o conexiune între stările necesare în viitor şi operatorul schimbării imediate. În speță el afirmă că dacă starea p este necesară în viitor, atunci ea se produce în momentul imediat următor şi devine imediat necesară în viitor.

Obs. 5. Axioma A5 ca şi cea anterioară determină noi conexiuni între necesarul viitor şi operatorul momentului imediat următor. Ea afirmă că dacă în viitor este necesar ca adevărul lui p să se păstreze în momentul imediat următor, atunci în momentul imediat următor adevărul lui p implică necesitatea adevărului lui p în viitor.

Universitatea Spiru Haret

Obs. 6. Ultimele două axiome explică operatorul binar „Until" („cutare1 Până cutare2") prin intermediul operatorului modal temporal $M_F p$ „este posibil în viitor p" şi prin operatorul momentului imediat următor. A6 spune că are loc p până q implică este posibil în viitor p, cel puţin până se produce q. A7 defineşte operatorul „Until" prin operatorul momentului imediat următor. „p Până q" este tot una cu „în momentul imediat următor are loc q şi deci încetează p" sau „în momentul imediat următor are loc p şi după aceea p continuă să fie adevărat până ce are loc q".

Discuţia despre intervalele temporale a avut loc într-o structură de timp discret, cu momente distincte şi pe baza unei semantici de tip lumi posibile reduse la momente şi eventual la descripţii valabile în acele momente.

Este, evident, posibil să luăm in considerare şi intervalele sau duratele de timp ca entităţi distincte primitive şi să facem o teorie logică coerentă a lor.

Allen a arătat că între două intervale temporale i şi j pot exista 13 raporturi distincte, dintre care 6 sunt inversele altora. Acestea sunt:

înainte (i,j), întâlneşte (i,j), se-suprapune (i,j), cuprins (i,j), cap (i,j), coadă (i,j), egal (i,j).

Primele şase pot fi inversate şi astfel obţinem alte şase relaţii distincte între două intervale temporale oarecare. Egalitatea este simetrică şi inversarea ei nu aduce nimic nou.

Un interval este o relaţie de ordine între momente şi din acest motiv poate fi descris şi lexicografic. De aceea am tradus, termenii englezeşti „starts" şi „finishes" prin „cap" şi „coadă" ca în Prolog, căci definiţia lor formală pe care o vom reproduce mai jos satisface înţelesul termenilor tehnici de „cap" şi „coadă".

Limbajul logicii intervalelor notat de Gabbay prin All-13 va conţine termenii celor 13 relaţii posibile între două intervale (cele 7 de mai sus şi inversele primelor 6 din lista noastră) şi în plus va conţine variabile individuale pentru intervale, i,j,k, l, m şi operaţiile booleene.

Pentru definirea unei semanticii pentru limbajul logicii intervalelor All-13 vom admite un graf G ce satisface cerinţele unei relaţii de ordine strictă conexă G = (W, <). Evident, putem avea şi alte structuri semantice pentru sistemele de logica intervalelor cu o ordine densă ca in (Q, <) sau (R, <), dar aici ne limităm la structura G = (W, <).

O atribuire de valori în G va fi descrisă de o funcţie de valorizare **v** care asociază variabilelor pentru intervale, i, j etc.

Universitatea Spiru Haret

intervale temporale din G, respectiv un şir de stări sau momente ordonate strict şi conex.

Definim astfel condiţiile de adevăr în structura sau graful:

$G \models^{v} \varphi$ pentru toate cele 13 specii de raporturi posibile între intervalele temporale.

$G \models^{v}$ egal (i,j) $\Leftrightarrow \mathbf{v}(i) = \mathbf{v}(j)$

$G \models^{v}$ înainte (i,j) $\Leftrightarrow \forall x,y\ (x \in \mathbf{v}(i) \wedge y \in \mathbf{v}(j) \supset x < y \wedge \exists z\ (x < z < y \wedge z \notin \mathbf{v}(i) \wedge z \notin \mathbf{v}(j)))$

$G \models^{v}$ întâlneşte (i,j) $\Leftrightarrow \forall x,y\ (x \in \mathbf{v}(i) \wedge y \in \mathbf{v}(j) \supset x < y \wedge \forall z\ (x < z < y) \supset z \in \mathbf{v}(i) \vee z \in \mathbf{v}(j)))$,

$G \models^{v}$ se-suprapune (i,j) $\Leftrightarrow \mathbf{v}(i) \cap \mathbf{v}(j) \neq \varnothing \wedge \exists x,y\ (x < y \wedge x \in \mathbf{v}(j) \wedge x \notin \mathbf{v}(i) \wedge y \in \mathbf{v}(i) \wedge y \notin \mathbf{v}(j))$,

$G \models^{v}$ cap (i, j) $\Leftrightarrow \mathbf{v}(i) \subseteq \mathbf{v}(j) \wedge \mathbf{v}(i) \neq \mathbf{v}(j) \wedge \forall x,y\ (x < y \wedge x \in \mathbf{v}(j) \wedge y \in \mathbf{v}(i) \supset x \in \mathbf{v}(i))$,

$G \models^{v}$ coadă (i, j) $\Leftrightarrow \mathbf{v}(i) \subseteq \mathbf{v}(j) \wedge \mathbf{v}(i) \neq \mathbf{v}(j) \wedge \forall x,y\ (x < y \wedge y \in \mathbf{v}(j) \wedge x \in \mathbf{v}(i) \supset y \in \mathbf{v}(i))$.

$G \models^{v}$ cuprins (i,j) $\Leftrightarrow \exists x,y,z\ (x < y < z) \wedge x \in \mathbf{v}(j) \wedge x \notin \mathbf{v}(i) \wedge y \in \mathbf{v}(i) \wedge z \in \mathbf{v}(j) \wedge z \notin \mathbf{v}(i))$,

Condiţiile de adevăr pentru operaţiile booleene sunt cele cunoscute.

Vom spune că o formulă φ este satisfăcută în graful G, dacă $G \models^{v} \varphi$ are loc pentru o valorizare **v** din G.

Vom spune că φ este realizabilă într-o clasă de grafuri C ce descriu trecerea timpului, dacă φ este satisfăcută pentru un graf G din C. La fel, spunem că φ este validă in C, dacă φ este G-validă în orice graf G din C.

Cu ajutorul limbajului logicii intervalelor noi vom putea descrie diferite constrângeri impuse asupra duratelor unor procese sau acte umane. Astfel de determinări permit să se definească unele concepte derivate ca Holds (P,i) sau Occurs (E,i) utilizate în unele sisteme expert sau în AI.

Concluzii

Logicile temporale sunt o direcţie relativ nouă de investigaţie logică propulsată deopotrivă de interese filosofice, epistemice, de interese semantic lingvistice, dar şi de interese practic aplicative legate de construirea unor sisteme expert.

Teoria logică a intervalelor este o ramură recentă de logică temporală, dacă 15-20 de ani mai poate fi numită o perioadă recentă.

Universitatea Spiru Haret

Noi nu am prezentat în capitolul de față cercetările de logică temporală cu modele pe timpi ramificați modele apte de a capta planuri şi programe alternative de a atinge anumite obiective.

Dimensiuni temporale au şi procesele cognitive, narațiunile fictive ale unor personaje, dar şi secvențele săvârşite de diferite clase de agenți. Datele şi duratele sunt parametri esențiali ai oricăror activități umane.

Probleme de logică temporală

1. Argumentul Dominator şi sistemul logic temporal diodorean
2. Timpii gramaticali şi logica temporală
3. Sistemul diodorean şi sistemul modal M a lui von Wright
4. Decizia matriceală în sistemul diodorean
5. Semantica de lumi posibile pentru sistemul diodorean
6. Sistemele temporale metrice şi aplicațiile lor în logica acțiunii
7. Logica temporală a datelor şi sistemul modal S5
8. Sistemele temporale bimodale în viziunea lui Dov Gabbay
9. Proprietățile relației de alternativitate în logicile temporale
10. Relația de ordine liniară strictă conexă şi sistemele temporale propoziționale
11. Logica intervalelor temporale in viziunea grupului de la Imperial
12. Logica lui „*Since*" şi „*Until*"
13. Sistemele modale normale Gödel - Löb
14. Cele 13 specii de relații dintre intervale în sistemul All13

Universitatea Spiru Haret

Cap. 8. **LOGICA DINAMICĂ**

Logica dinamică este o variantă de logică modală care dă seama de stările sau rezultatele accesibile prin desfăşurarea unor programe de calculator şi despre corectitudinea formală a acestora. Ea a fost fondată de V. R. Pratt, în 1976, pe baza unor rezultate obţinute anterior de R.M. Floyd şi C.A.R. Hoare.[*Semantical Considerations on Floyd – Hoare Logic*, Proc. 17 th IEEE Symp. On Foundation of Computer Science, 109-121]

Semnificaţia sa depăşeşte domeniul fundamentării programelor de calculator şi se extinde asupra întemeierii oricărei specii de acţiune umană, dacă construcţiile lui V.R. Pratt, K. Segerberg şi David Harel vor fi completate cu interfeţele corespunzătoare.

Logica dinamică poate deveni o variantă eficace de logică a acţiunilor umane. Desigur, aceasta o putem face prin îmbogăţirea alfabetului ei de semne primitive şi prin regândirea construcţiei ei semantice. Pe baza ei pot fi reconstruite teoria logică a scopurilor şi programelor şi logica deontică dinamică, precum şi teoria relaţiilor de cooperare şi competiţie dintre agenţii umani, roboţi sau agenţi soft. Logica acţiunii va servi drept infrastructură sau bază pentru versiunile dinamice de logică a scopurilor şi programelor şi pentru logica deontică dinamică, ca şi pentru sistemele modale mixte teleo-deontice, deontico-axiologice, etc. Teleologica dinamică va da seama de relaţiile scop mijloc, de directivele practice, de abilităţile agenţilor şi de eficacitatea şi eficienţa acestora.

În rândurile de faţă prezentăm, în mare, după D. Harel logica dinamică propoziţională elementară şi logica dinamică de ordinul întâi. D. Harel declară că logica dinamică propoziţională este redată de el după studiul lui M. J. Fischer şi R.E. Ladner din 1977.

Universitatea Spiru Haret

1. **Limbajul logicii dinamice propoziţionale elementare**

Admitem două alfabete de simboluri primitive:

AF = { p, q, r,.. . } pentru formule elementare sau atomice,

AP = { a, b, c,.. . } pentru programe elementare sau atomice.

Admitem un singur simbol modal dinamic primitiv: simbolul <a>p care se citeşte: „După cel puţin o executare a programului a se ajunge la o stare finală care satisface propoziţia p". Definim, mai jos, în D4 necesitatea dinamică.

Mulţimea formulelor bine formate ale logicii dinamice elementare sau limbajul logici dinamice propoziţionale elementare (EPDL = *elementary propositional dynamic logic*) va fi definită inductiv după cum urmează:

Toate elementele din AF sunt formule bine formate ale logicii dinamice propoziţionale. Cu alte cuvinte, variabile propoziţionale vor fi formule bine formate în limbajul logicii propoziţionale dinamice.

Pentru orice program elementar a din AP şi pentru orice formule bine formate P şi Q din limbajul logicii propoziţionale dinamice, formulele $(P \vee Q)$, -P şi <a>P vor fi formule bine formate ale logicii dinamice propoziţionale elementare.

Introducem prin definiţie următoarele conective logice derivate şi un operator modal dinamic derivat (necesitatea) :

D1. $P \wedge Q \equiv -(-P \vee -Q)$

D2. $P \supset Q \equiv (-P \vee Q)$

D3. $P \equiv Q \equiv (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$

D4. $[a]P \equiv -<a>-P$

Cu aceasta sintaxa logicii dinamice propoziţionale elementare este încheiată. De observat că până acum nu am introdus compunerea de programe în serie, în paralel sau prin repetare.

Definiţiile D1-D4 descriu concepte derivate obţinute ca prescurtări ale unor formule bine formate cu ajutorul regulilor sintactice.

2. **Semantica logicii dinamice elementare**

Semantica logicii dinamice propoziţionale este inspirată de semantica lumilor posibile propusă de Saul A. Kripke pentru sistemele de logică modală aletică. Jakko Hintikka şi Stig Kanger sunt şi ei fondatori autonomi ai semanticilor de lumi posibile.

Universitatea Spiru Haret

Universul de referință al acestei semantici îl reprezintă o mulțime nevidă de stări de lucruri, situații sau lumi posibile notate prin W (*worlds*). Literele s, t vor desemna situații sau stări din W.

Semantica pe care o vom construi va preciza pentru fiecare situație s din W şi pentru orice formulă bine formată P din limbajul logicii dinamice elementare dacă P este adevărată sau nu în situația s sau dacă situația s satisface formula P. Aceasta se va nota prin: $s \models P$. Formulei P îi vom asocia din mulțimea univers W a tuturor lumilor posibile o submulțime în care propoziția P este adevărată.

Un program a va fi văzut ca un obiect ce schimbă o stare de start s cu o stare terminală t, sat, care poate fi citită: „din starea s, prin a, în starea t",.

Semnificația unui program a este astfel descrisă ca o relație binară $R_a \subseteq W \times W$. Perechea de stări (s, t)va aparține relației R_a, dacă şi numai dacă programul a începe în starea s din W şi are ca stare terminală pe t din W. După David Harel un program elementar a poate duce din starea de start s nu doar într-o unică stare terminală t, ci în mai multe astfel de stări t1, t2, t3. Relația R_a asociată programului a nu este o funcție. Se poate, deci, spune că ,în viziunea lui Harel, programele sunt nedeterministe şi descriptibile ca relații de la W în mulțimea părților lui W.

Semantica logicii dinamice propoziționale, fără compunere de programe, este redată de către D. Harel ca o structură :

$S = (W, f, g)$

unde:

1. W este o mulțime nevidă de stări sau lumi posibile;

2. $f: AF \rightarrow 2^W$ o funcție care asociază variabilelor propoziționale sau propozițiilor elementare mulțimi de stări, situații sau lumi în care acestea sunt adevărate;

3. $g: AP \rightarrow 2^{W \times W}$ o funcție care asociază programelor elementare relații definite pe mulțimea părților din universul lumilor posibile.

Funcțiile f şi g conferă înțeles în W formulelor elementare şi programelor elementare.

Mai departe, semnificația funcției f, care interpretează formulele elementare este extinsă la formulele „moleculare" în felul următor:

4. $f(P \vee Q) = f(P) \cup f(Q) = \{ s | s \in f(P) \text{ sau } s \in f(Q) \}$,

5. $f(-P) = W - f(P) = \{ s | s \notin f(P) \}$,

6. $f(<a>P) = \{ s | (\exists t) ((s, t) \in g(a) \text{ şi } t \in f(P)) \}$

Universitatea Spiru Haret

Condițiile 4-6 extind semnificația formulelor elementare şi programelor elementare la semnificația tuturor formulelor bine formate în logica dinamică propozițională elementară.

Denotând pe $s \in f(P)$ prin $s \models P$ şi $(s, t) \in g(a)$ prin sat şi folosind liber limbajul logic obişnuit, putem scrie pentru o relație semantică determinată S:

7. $s \models <a>P \Leftrightarrow \exists\, t(sat \wedge t \models P)$

ceea ce revine la a afirma că: În starea de start s este posibilă prin programul a satisfacerea propoziției P, dacă şi numai dacă, există o stare terminală t accesibilă din s prin programul a şi în aceasta este satisfăcută propoziția P.

Termenul din stânga al formulei 7 se mai poate citi în jargonul modal dinamic: „Este adevărat în s diamant a P"

In mod similar, putem defini pe [a]P, dualul lui <a>P, prin formula:

8. $s \models [a]P \Leftrightarrow \forall t(sat \supset t \models P)$

ceea ce revine la a afirma că: În starea de start s este necesară prin programul a satisfacerea propoziției P, dacă şi numai dacă, în orice stare terminală t accesibilă din s prin programul a este satisfăcută propoziția P.

Putem trece acum la definirea conceptului de formulă validă într-o structură semantică S = (W, f, g) .

9. Fiind dată o structură S = (W, f, g), spunem că o formulă P din logica dinamică propozițională elementară este S-validă, simbolic $\models_S P$, dacă şi numai dacă, pentru orice lume $s \in W$, vom avea: $s \models P$.

10. Mai tare, vom spune că formula P este validă, simbolic, $\models P$, dacă şi numai dacă P este S-validă pentru orice structură S = (W, f, g).

11. Vom spune că formula P este S-realizabilă, dacă şi numai dacă există o lume $s \in W$ astfel că $s \models P$.

11. Spunem că formula P este realizabilă dacă este S- realizabilă pentru o structură S = (W, f, g) .

Câteva exemple de formule valide în logica dinamică propozițională elementară date de D. Harel.

E1. $([a]p \wedge <a> true) \supset <a>p$

E2. $<a>(p \wedge q) \supset (<a>p \wedge (<a>q)$

E3. $<a>(p \vee q) \equiv (<a>p \vee <a>q)$

Prima formulă spune că dacă oriunde te duci este adevărat p şi dacă ulterior te duci undeva, atunci tu te duci într-o lume în care este adevărat p.

Universitatea Spiru Haret

Cea de a doua afirmă că posibilitatea de a satisface simultan p şi q implică posibilitatea de a satisface pe p şi de a satisface pe q. Dar conversa nu este adevărată !.

Cea de a treia formulă este o reluare la teoria posibilului mijlocit de un program sau o metodă a a unei echivalenţe bine cunoscute din logica modală aletică clasică care a fost luată de von Wright ca axiomă în sistemul său M echivalent cu T.

3. **Logica propoziţională dinamică**

În capitolul de faţă vom introduce programe compuse serial, prin alegere nedeterministă şi prin repetarea aceluiaşi program. Ca şi pentru logica dinamică elementară, vom prezenta mai întâi sintaxa şi apoi semantica noii teorii logice dinamice.

3.1. *Limbajul logicii propoziţionale dinamice*

Ca şi în cazul logicii dinamice elementare, vom porni de la mulţimile AF şi AP, respectiv de la mulţimea variabilelor propoziţionale, p, q, r.. ca formule elementare şi de la mulţimea programelor elementare a, b, c,. . In mulţimea programelor elementare AP vom adăuga un element nou, programul vid, notat prin simbolul θ.

Mulţimea R a programelor obişnuite sau normale va fi definită inductiv, după cum urmează:

1. Toate programele elementare din AP vor fi în R, mulţimea programelor normale.

2. Pentru orice α şi β din R compunerile acestora prin: $(\alpha;\beta)$, $(\alpha \cup \beta)$ şi α^* vor fi în R.

Regula 2 de mai sus introduce compunerea în serie, compunerea alternativă sau la alegere şi compunerea prin iterare a programelor regulate.

Mai departe, definim inductiv limbajul logicii dinamice propoziţionale ca mulţimea formulelor bine formate din variabilele propoziţionale cu ajutorul operaţiilor logice disjuncţie şi negaţie şi cu ajutorul programelor compuse în serie, alternativ sau prin iterarea unui program. Vor fi cuvinte în limbajul logicii dinamice a propoziţiilor, cuvintele formate prin regulile:

1. Toate variabilele propoziţionale vor fi formule ale logicii dinamice propoziţionale.

2. Pentru orice program α din R şi pentru orice formule bine formate P şi Q formulele alcătuite prin disjuncţie, negaţie şi prefixare

Universitatea Spiru Haret

a unei formule propoziţionale prin $<\alpha>$ vor fi formule ale logicii dinamice propoziţionale.

Menţinem în limbajul logicii propoziţionale definiţiile D1-D4 din capitolul anterior care introduc conjuncţia, implicaţia, echivalenţa şi necesitatea logico-dinamică.

Cu aceasta prezentarea limbajului formal al logicii dinamice propoziţionale este încheiată. Urmează să ne ocupăm de semantica acestuia.

3.2. *Semantica logicii propoziţionale dinamice*

Ca şi in prezentarea semanticii logicii propoziţionale elementare, vom folosi o structură S = (W, f, g). Dar, de data aceasta va trebui să extindem semnificaţia funcţiei g, astfel încât să putem da seama de programele compuse în serie prin operaţia; la alegere sau alternativă redată prin simbolul $\cup$ şi, prin iterare, redată prin *.

Reamintim că funcţia g asocia unui program elementar a o relaţie R_a definită pe AP cu valori în produsul mulţimii părţilor din W

g: AP $\rightarrow 2^{W \times W}$

Aplicarea unui program elementar a înseamnă de fapt o tranziţie de la starea iniţială s, în care se aplică programul, la starea terminală sau starea rezultat t, în care se termină execuţia acestuia.

Adăugăm acum condiţiile specifice pentru modurile de compunere:

Dacă programul elementar a este θ, respectiv a = θ. Atunci:

1. $g(\theta) = \varnothing$ Executarea programului vid are ca efect tranziţia vidă.
2. $g(\alpha;\beta) = g(\alpha) \circ g(\beta) = \{(s, t) \mid (\exists v)\ (s, v) \in g(\alpha)$şi $(v, t) \in g(\beta)\}$
3. $g(\alpha \cup \beta) = g(\alpha) \cup g(\beta) = \{(s, t) \mid (s, t) \in g(\alpha)$ sau $(s, t) \in g(\beta)\}$
4. $g(\alpha^*) = \{(s, t) \mid (\exists i \geq 0)\ (\exists s_0, s_1, \ldots, s_i) \wedge s_0 = s$ şi $s_i = t$ şi $(\forall i > j \geq 0)(s_j, s_{j+1}) \in g(\alpha))\}$

Obs. 1.Dacă admitem ca în capitolul anterior că $(s, t) \in g(\alpha)$ poate fi rescrisă ca $s\alpha t$, atunci condiţia 2 de mai sus poate fi rescrisă ca :

$2^{\#}$ $g(\alpha;\beta) = g(\alpha) \circ g(\beta) = \{(s, t) \mid (\exists v)\ (s\alpha v \beta t)\}$

A compune în serie două programe α şi β înseamnă a găsi o stare intermediară v în care să se termine primul şi în care să înceapă cel de al doilea astfel încât noul program rezultat $\alpha;\beta$ să aibă ca stare de start starea de start a primului program şi ca stare terminală starea terminală a celui de al doilea. Este uşor de observat că modul de compunere a programelor de calculator este instructiv pentru tentativa

Universitatea Spiru Haret

de a defini o compunere în serie a secvenţelor de conduite umane. Şi apoi nu trebuie uitat că actele de comportare sau conduită umană sunt mijloace se a ne atinge scopurile asumate.

Obs.2. Dacă aplicăm la condiţia 3 aceiaşi regulă de rescriere obţinem:

3.# $g(\alpha \cup \beta) = g(\alpha) \cup g(\beta) = \{(s, t) \mid s\alpha t$ sau $s\beta t\}$

A compune alternativ două programe α şi β înseamnă a găsi două căi distincte de a realiza o tranziţie între o pereche de stări (s, t), unde s este starea de start şi t este starea terminală.

În planul teorie conduitelor umane şi a relaţiilor dintre o stare iniţială şi o stare terminală asumată ca scop de un agent compunerea alternativă înseamnă existenţa a două mijloace (sau conduite) diferite de a realiza acelaşi scop.

Obs. 3. A compune un program α cu sine însuşi înseamnă a alege o mulţime nedeterminată de perechi stare iniţială stare terminală (s, t) astfel încât orice stare atinsă să fie obţinută prin aplicarea programului α la starea precedentă. Operând în condiţia 4 aceiaşi regulă de rescriere obţinem:

4# $g(\alpha^*) = \{(s, t) \mid (\exists i \geq 0)\ (\exists s_0, s_1, \ldots, s_i) \wedge s_0 = s$ şi $s_i = t$ şi $(\forall i > j \geq 0)(s_j\ \alpha\ s_{j+1})\}$

Pentru i = 3, $g(\alpha^*) = s_0\alpha\ s_1\alpha\ s_2\alpha\ s_s = s\alpha s_1\alpha s_2\alpha t$

Un exemplu de interpretare acţionalistă a compunerii iterate ar putea fi obligarea de către un învăţător a elevului ce nu şi-a făcut tema de a scrie de trei ori o propoziţia: „Temele date acasă trebuie făcute”

3.3. *Legi ale logicii dinamice propoziţionale*

Vom considera în cele ce urmează câteva legi ale logicii dinamice propoziţionale dinamice. Vom folosi pentru demonstrarea acestor legi interpretările semantice date pentru compunerea în serie sau pentru compunerea alternativă. Pentru comoditatea scrierii vom nota programele prin u1, u2, u3 şi stările prin s, t, v, sau s1, s2, s3 etc.

T1. $\lceil u1;u2]p \equiv [u1][u2]p$

1. $\models [u_1;u_2]p$ ip
2. $\forall t(su_1; u_2t \supset t \models p)$ (RE, 1., def [u]p)
3. $\forall t(\exists v(su_1v \wedge vu_2t) \supset t \models p)$ (RE,2, Def $su_1; u_2t \equiv (\exists v(su_1v \wedge vu_2t)$
4. $\forall t \forall v((su_1v \wedge vu_2t) \supset t \models p)$ (RE, LP, 3)
5. $\forall t \forall v((su_1v \supset (vu_2t) \supset t \models p))$ (RE, LP, 4, exportaţie)
6. $\forall v ((su_1v \supset \forall t\ (vu_2t) \supset t \models p))$ (RE, Lpred $\forall$, 5)
7. $\forall v ((su_1v \supset v \models [u_2]p$ (RE, 6, vezi cap 2 ,def 7)

Universitatea Spiru Haret

8. $s \models [u_1][u_2]p$ (RE, 7, vezi cap 2 ,def 7)

Cum trecerea de la 1 la 8 s-a făcut numai prin regula substituirii echivalentelor demersul este valabil şi de la 8 la 1. Prin urmare echivalenţa T1 este teoremă.

T2. $[u_1 \cup u_2]p \equiv [u_1]p \wedge [u_2]p$

1. $s \models [u_1 \cup u_2]p$ ip

2. $s \models \forall t([u_1 \cup u_2]t \supset t \models p)$ (RE, 1, Def [u]p, $u = u_1 \cup u_2$)

Dar $u_1 \cup u_2$ este o compunere alternativă de programe şi am văzut din subcapitolul 3.2 definiţia 3.# că semnificaţia lui $u_1 \cup u_2$, respectiv $g(\alpha \cup \beta) = \{(s, t) \mid s\alpha t$ sau $s\beta t\}$. Substituim în 2 pe $u_1 \cup u_2$ prin semnificaţia sa: $s\alpha t$ sau $s\beta t$ şi obţinem:

3. $s \models \forall t(\ su_1t$ sau $su_2t) \supset t \models p)$

Potrivit unei legi din logica propoziţiilor $((p \vee q) \supset r) \equiv$

$((\ p \supset r) \wedge (q \supset r)\ )$, condiţia pusă asupra perechilor (s,t) poate fi rescrisă ca:

$((su_1t \supset t \models p) \wedge (su_2t \supset t \models p)\ )$. Pe această bază putem să rescriem pe 3 ca:

4. $s \models \forall t((s\ u_1t \supset t \models p) \wedge (s\ u_2t \supset t \models p)\ )$.

Prin regula eliminării conjuncţiei din 4 rezultă două propoziţii mai slabe 5 şi 6 de mai jos:

5. $s \models \forall t(su_1t \supset t \models p)$

6. $s \models \forall t(su_2t \supset t \models p)\ )$

care, potrivit definiţiei date necesităţii dinamice [a]p (vezi formula 8 din capitolul 2 despre semantica logicii dinamice elementare) pot fi rescrise pe baza regulii RE a substituirii echivalentelor ca formulele 7 şi 8:

7. $s \models [u_1]p$

8. $s \models [u_2]p$

Din 7 şi din 8, obţinem prin regula introducerii conjuncţiei, $I\wedge$,formula:

9. $s \models [u_1]p \wedge [u_2]p$

T3. $[u](p \wedge q) \equiv ([u]p \wedge [u]q)$

1. $[u](p \wedge q)$ ip.

2. $s \models \forall t(sut \supset t \models p \wedge q$(RE, 1, Def [u]p)

3. $(p \wedge q) \supset p$ (LP)

4. $(p \wedge q) \supset q$ (LP)

5. $s \models \forall t(sut \supset t \models p)$ (LP, 2, 3)

6. $s \models \forall t(sut \supset t \models q)$ (LP, 2, 4)

7. [u]p (RE, 5, Def [u]p)

8. [u]q (RE, 6, Def [u]p)

Universitatea Spiru Haret

9. [u]p∧[u]q (I∧, 7, 8)

Textul demonstrativ poate fi construit şi Bottom Up. În consecinţă, implicaţia ţine şi de la dreapta la stânga.

În mod analog, cu T1-T3, pentru orice program u regulat (regular) şi pentru orice formule bine formate din logica dinamică propoziţională p, q au loc teoremele:

T4. [u](p⊃q) ⊃ ([u]p ⊃ [u]q)

1. [u](p⊃q) ip.
2. [u]p ip.
3. s⊨∀t(sut ⊃ t ⊨ p⊃q) (RE, Def [u]p, 1)
4. s⊨∀t(sut ⊃ t ⊨ p) (RE, Def [u]p, 2)
5. s⊨∀t(sut ⊃ t ⊨ q) (MP: t ⊨ p⊃q, t ⊨ p ⇒ t ⊨ q)
6. [u]q (RE, Def [u]p, 5)

T5. < u> (p∨ q) ≡ < u> p ∨ < u>q

T6. < u> (p∧ q) ⊃ (< u> p ∧ < u> q)

Lăsăm pe seama cititorului nostru tentaţia de a construi o demonstraţie pentru T5 şi T6.

Trecem la prezentarea logicii dinamice de ordinul întâi.

4. **Logica dinamică de ordinul întâi**

Logica dinamică de ordinul întâi creată de V.R. Pratt şi perfecţionată de D Harel, şi A.R. Meyer dă seama de demersul verificării corectitudinii programelor reale prin organigramele nedeterministe. Ea permite efectuarea unor testări şi asignarea de valori acordate variabilelor. Ca şi în cazurile anterioare, vom introduce mai întâi sintaxa sau limbajul formal al logicii dinamice de ordinul întâi. Pasul următor îl va constitui definirea semanticii acestei specii de logică modală şi apoi prezentarea unor teoreme şi căutarea unor aplicaţii în logica acţiunii.

4. 1. *Sintaxa logicii dinamice de ordinul întâi*

Mai întâi vom extinde alfabetul simbolurilor primitive cu o listă de simboluri funcţionale de diferite arităţi şi cu o listă de simboluri predicative.

Simbolurile funcţionale vor fi notate, ca în logica predicatelor, prin literele mici din alfabetul latin: f, g, h, f1, f2, fiecare având o aritate fixă. Simbolurile funcţionale de aritate 0 vor fi variabile individuale şi vor fi redate prin x, y, z.

Universitatea Spiru Haret

Termenii vor fi definiţi ca în logica predicatelor de ordinul întâi şi vor avea argumente şi iterări de simboluri funcţionale finite.

Simbolurile predicative vor fi notate, diferit de convenţia clasică, prin litere latine mici p, q, r,… şi vor avea aritatea fixată. Egalitatea notată prin = va funcţiona ca un simbol predicativ special.

Vor fi definite ca în logica predicatelor de ordinul întâi conceptele de atomi predicativi şi de formulă bine formată în logica dinamică predicativă.

Vom avea şi aici, ca în logica dinamică propoziţională formule atomare şi programe atomare sau elementare .

Mulţimea programelor regulate sau normale RG va fi definită inductiv, după cum urmează:

1. Pentru orice variabilă x şi pentru orice termen sau expresie e, aplicaţia $x \leftarrow e$ va aparţine lui RG.

2. Pentru orice formulă de ordinul întâi P în care nu apare programe, formula P ? va aparţine lui RG.

3. Pentru orice programe α, β, γ din RG, compunerile $(\alpha; \beta)$, $(\alpha \cup \beta)$, α^* vor fi în RG.

4. Orice formulă atomară este o formulă logic dinamică.

5. Pentru orice formule bine formate P şi Q şi pentru orice program α din RG şi orice variabilă x, expresiile -P, $(P \vee Q)$, $\exists xP$ şi $<\alpha>P$ vor fi formule bine formate în logica dinamică (DL-wffs)

O LD-fbf (o formulă logică dinamică bine formată) în care nu apare programe din RG este liberă de programe (program free formula) şi este pur şi simplu o formulă de logica predicatelor.

Programele definite la punctele 1 şi 2 sunt programe simple şi sunt numite teste sau atribuiri. Cele definite la punctul 3 vor fi programe compuse regulate sau normale.

Vom avea, desigur, formule predicative simple şi formule predicative dinamice care conţin în structura lor programe sau modalităţi dinamice întemeiate pe programe ca mijloc de a atinge anumite stări.

Logica dinamică la nivel predicativ va face uz de toate conectivele logice definibile pe baza operaţiilor logice primitive introduse mai sus. Aceasta înseamnă că vom păstra definiţiile D1-D4 introduse în cap 1la care vom adăuga definiţiile lui $[\alpha]$ şi a lui $\forall$, potrivit regulilor cunoscute.

Universitatea Spiru Haret

4. 2. *Semantica logicii dinamice de ordinul întâi*

Semantica logicii dinamice predicative este o semantică de stări sau lumi posibile de inspirație Kripke, dar nu numai atât. In loc de o mulțime de lumi posibile descrise de formule vom avea pentru lumea inițială I un domeniu sau un univers nevid pe care sunt transpuse, ca în semantica logicii predicatelor de ordinul întâi, funcții şi relații n-are de forma f_I şi P_I ce corespund funcțiilor şi predicatelor de aceiaşi aritate din mulțimile de termeni sau expresii funcționale sau de atomi predicativi „puri" sau liberi de programe. Pentru predicatele de aritate 0 sau variabile propoziționale vom avea în D valorile de adevăr de 1 sau 0. Constantelor individuale şi variabilelor individuale le vor corespunde în D obiecte individuale din D. Îl putem concepe pe $I \subseteq D$ ca dispunând de mai multe specii de obiecte. Egalitatea = ca un predicat binar special va fi interpretată ca o relație de echireferențialitate între termenii definiți pe $I \subseteq D$, ca în ecuațiile din algebră.

I descrie o macrostare sau o situație inițială a universului de discurs D. Dar logica dinamică vizează o colecție de macrostări sau situații în care prin programe sau acte de conduită se trece de la o stare la alta. Întreaga colecție de stări posibile este desemnată de D. Harel prin Γ.

Semantica propusă de D. Harel va asocia unui program α o relație binară $g(\alpha)$ definită pe Γ care este o colecție de stări posibile.(D Harel foloseşte $m(\alpha)$ în loc de $g(\alpha)$ cum am făcut noi). Orice program descrie o tranziție între stări sau lumi posibile. O perechea de stări (s,t) din $m(\alpha)$ descrie un caz de aplicare a programului α. $(s,t) \in m(\alpha)$ (sau în notația noastră $g(\alpha)$) se notează alternativ prin $s\alpha t$ care se citeşte: „din s se ajunge prin programul α în t". În mod analog, unei formule P ce descrie o propoziție îi vom asocia o mulțime de stări sau o serie de mulțimi de stări sau situații în care acea formulă este satisfăcută. A spune că o stare sau o mulțime de stări satisface o formulă este tot una cu a spune că formula în cauză este adevărată în acea stare individuală sau în mulțimea de stări.

Un pseudo-univers U este o mulțime de stări care au toate un domeniu comun D. Un simbol funcțional f sau un simbol predicativ p este neinterpretat într-un pseudo-univers U, dacă pentru orice stare $I \in U$ şi pentru orice funcție F (respectiv predicat P) definit pe D există o stare $J \in U$ astfel că I şi J diferă cel mult în privința valorii lui f (respectiv lui P) , care în J este F (respectiv P) .

Universitatea Spiru Haret

D. Harel introduce o notație specială pentru lămurirea conceptului de simbol funcțional sau simbol predicativ neinterpretat într-un pseudo-univers.

Pentru orice funcție G:A→ B şi pentru orice obiect oarecare e şi program a∈A definim o funcție necesară [e/a]G ca o funcție cu domeniul A şi codomeniul B∪ {e} care ia aceleaşi valori în punctele A-{e} ca şi funcția G şi care satisface, în plus, G(a) = e. Astfel situația descrisă mai sus pentru neinterpretarea lui f poate fi descrisă mai simplu ca: J = [F/f]I.

Un simbol este considerat fix într-un pseudo-univers U, dacă valoarea lui este aceiaşi în toate stările lui U. Un univers este un pseudo-univers în care toate simbolurile predicative sunt fixe şi în care toate simbolurile funcționale sunt fie fixe sau neinterpretate. Un univers este numit simplu dacă singurele simboluri neinterpretate în el sunt un set determinat de variabile. Într-un univers simplu variabilele fixate sunt numite uneori constante, conform uzajului obişnuit.

Valoarea unui termen e = f(e1,…, ek) într-o stare I este definită, după A. Tarski, inductiv prin :

$e_I = f_I(e1_I,\ldots,ek_I)$.

Semantica logicii dinamice predicative păstrează linia generală a semanticilor construite anterior pentru logica dinamică elementară şi pentru logica dinamică propozițională.

Fiecare dintre acestea avea mecanisme de definire în domeniul de interpretare a variabilelor propoziționale sau componentelor elementare, a formulelor bine formate, pe de o parte, şi a componentelor de programe care puteau fi programe atomare sau compuneri de astfel de programe, pe de altă parte. Prima componentă era redată în formularea noastră prin funcția de interpretare f, cea de a doua prin funcția de interpretare a programelor g (în textul lui Harel prima era notată prin π şi cea de a doua prin m).

Vom folosi aceleaşi notații pentru funcțiile de interpretare, dar de data aceasta pentru programe în loc de stări individuale vom avea o mulțimi structurate de stări start şi la fel o mulțimi structurate de stări terminale notate şi unele şi altele prin litere majuscule.

Perechea (I,J) va aparține lui g(α), simbolic (I,J) ∈ (α) şi va fi reglată intuitiv prin IαJ cu semnificația că din starea inițială I se trece prin programul α în starea terminală J. Operatorii modal-dinamici pentru posibil şi pentru necesar vor fi redați ca:

Universitatea Spiru Haret

$I \models <\alpha>P$ = Este posibil prin secvență de calcul α inițiată în starea I să se ajungă în starea J ce satisface P.

$I \models [\alpha]P$ =Este necesar ca orice secvență inițiată în I să se încheie în starea terminală J ce satisface P.

Semantica logicii dinamice predicative se construieşte pe etape prin transcrierea regulilor de interpretare a variabilelor individuale, a regulilor de testare a formulelor predicative, a regulilor de compunere a programelor, a regulilor de interpretare a predicatelor atomare şi în sfârşit a regulilor de interpretare a formulelor moleculare alcătuite cu ajutorul conectivelor logice, a cuantificatorilor şi cu ajutorul functorilor modali dinamici. Dăm regulile:

Pentru orice variabilă x şi pentru orice termen e definim interpretarea:

$g(x \leftarrow e) = \{(I,J) \mid J = [e_I / x\,]I\}$

1. Pentru orice formulă logic predicativă P în care nu intervine vreun program putem să verificăm dacă se realizează în

$I\ g(P?) = \{(I,I) \mid I \models P\}$

2. Pentru orice programe regulate α, β din RG avem:

$g(\alpha; \beta) = g(\alpha) \bullet g(\beta)$,

$g(\alpha \cup \beta) = g(\alpha) \cup g(\beta)$,

$g(\alpha^*) = (g(\alpha))^*$

3 Pentru orice formulă atomică p(e1, ... , ek) vom avea :

$I \models p(e1,.. . ,ek)$, dacă şi numai dacă, $p_I(e1_I, ..., ek_I)$ este adevărată.

4. Pentru orice formule bine formate P şi Q, orice program α din RG şi pentru orice variabilă x, vom avea :

$I \models -P \Leftrightarrow$ nu are loc $I \models P$

$I \models (P \vee Q) \Leftrightarrow I \models P$ sau $I \models Q$.

5. $I \models \exists xP \Leftrightarrow$ Există d în D_I astfel că $[d/x]\ I \models P$

6. $I \models <\alpha>P \Leftrightarrow$ Există o stare J astfel că $(I,J) \in g(\alpha)$ şi în $J \models P$

Cunoştinţele cuprinse în acest capitol aparţin culturii logice de bază şi sunt puncte de sprijin pentru dezvoltările ulterioare.

5. **Logica dinamică şi descrierea acţiunilor umane. Un exemplu**

Aveam încă proaspete în minte noțiunile de logică dinamică atunci când, în preajma Crăciunului din 2001, ajuns la Londra, am însoțit-o pe fiica şi ginerele meu la Tesco, un super-magazin alimentar din cartierul Harrow, pentru cumpărăturile de Crăciun.

Universitatea Spiru Haret

În seara precedentă am surprins un „*brainstorming* domestic" care pregătea plecarea la Tesco. Trebuia să se alcătuiască lista produselor ce vor fi cumpărate de la Tesco. Participau la conclav marile puteri: fiica mea, ginerele şi menajera.

Lista s-a stabilit printr-o recurenţă teleologică: s-a conchis de la scopuri la condiţii necesare şi la mijloace.

Cunoscând gusturile membrilor familiei, menajera a propus mai întâi felurile de bucate şi apoi, regresiv, s-a conchis asupra produselor constitutive şi a cantităţilor necesare pentru fiecare fel, s-a făcut reuniunea submulţimilor rezultate şi s-a obţinut lista cu care am plecat dimineaţa la Tesco.

În termenii logicii dinamice am avut de a face cu operaţia alegerii sau ch. S-a ales o submulţime de feluri din mulţimea felurilor considerate.

A doua zi am executat o serie de acte compuse în serie, în paralel sau iterate şi alte acte de alegere. Între actele compuse în serie menţionăm:

a = intrarea în maşină,
b = legarea centurilor de siguranţă,
c = pornirea maşinii,
d = parcurgerea străzii Vaugham Road,
e = viraj la stânga,
f = parcurgerea străzii Harrow View,
f_1 = viraj la dreapta,
g = parcurgerea străzii Hindes Road,
h = ajungerea la Tesco,
i = parcarea maşinii,
j = alegerea unui cărucior.

Urmează apoi un număr de conduite iterate, constând din oprirea căruciorului în faţa unui stand de produse, alegerea unor produse şi trecerea la alt stand operaţie repetată de n ori. Secvenţa – împinge căruciorul, opreşte în faţa unui stand, alege produse din stand – se repetă de câte ori e nevoie.

O alegere în faţa unui stand poate fi definită ca o funcţie ch definită pe produsul cartezian al fluxurilor de produse cu valori mulţimea părţilor acestora: ch: $P_1 x \ldots x P_n \rightarrow \left(2^{P_1} x \ldots x 2^{P_n}\right)$.

Condiţiile pot fi definite astfel încât să ţinem seama şi de preţul produselor, calitatea lor etc.

Universitatea Spiru Haret

k = situarea căruciorului la o „coadă" de aşteptare în faţa unei caserii,

l = descărcarea produselor pe banda,

m = calcularea automată a produselor,

n = plata produselor,

o = reîncărcarea produselor în cărucior,

p = transportarea, în cărucior, a produselor la maşină,

q = punerea produselor în port-bagaj.

Urmează din nou repetarea ciclului de operaţii de la a, b, c şi parcurgerea, în sens invers Hindes Road, Harrow View şi Vaugham Road. Şi, în sfârşit,

r = scoaterea produselor din maşină şi plasarea lor în frigider sau în cămară (şi aici o alegere !).

Nu am marcat în descrierea noastră mai multe acte executate „în paralel". Şoferul, care era ginerele meu, mi-a răspuns, pe parcurs, la mai multe întrebări, a schimbat postul de radio.

În magazin, cei doi rezidenţi londonezi au ales simultan produse din standuri diferite, în timp ce eu împingeam căruciorul. Acestea au fost tot acte în paralel şi putem spune chiar o formă de cooperare.

Fiecare act de alegere este precedat în mod necesar de judecăţi de valoare, de acceptări şi respingeri, pe baza aplicării unor criterii personale şi ad hoc sau anterior stabilite.

Au mai avut loc şi acte de completare a listei sau de renunţare la unele produse.

Lăsăm pe seama cititorului descrierea printr-un graf etichetat sau printr-un automat nedeterminist a exemplului nostru trivial, căci joaca cu exemple banale poate fi un moment pregătitor util pentru o viitoare aplicaţie profesională.

Facem doar câteva *observaţii*

Obs. 1. Executarea unei acţiuni elementare din alfabetul {a, b, c,. .. ,q, r} schimbă starea de fapt sau situaţia acţională.

Obs. 2. Orice acţiune în paralel este iniţiată într-un nod de scindare din care pleacă două drumuri ce descriu conduite.

Obs. 3. O acţiune în paralel poate fi executată de acelaşi agent sau de agenţi diferiţi.

Obs. 4. Putem repeta aceiaşi acţiune elementară sau putem repeta o secvenţă de acte elementare sau o acţiune complexă.

Universitatea Spiru Haret

Obs. 5. Executarea întregii conduite, respectiv parcurgerea, în ordinea indicată de graf, a întregului graf, duce la atingerea stării terminale în care toate cumpărăturile preconizate au fost efectuate.

Să admitem că starea inițială a fost starea s şi că starea terminală a fost v, iar secvențele compuse de acte sunt descrise de graful G. Graful G descrie între altele secvențele de acte $\{$a, b, c, d, e, f, f1, g, h, i, j$\}$. În starea v este satisfăcută propoziția p care asertează că toate produsele stipulate în lista inițială au fost cumpătate. Atunci întreaga acțiune poate fi descrisă de formula $s<G>v \models p$ care ne spune că din starea s este posibil ca prin executarea conduitelor descrise de graful G să se ajungă în starea terminală v în care este adevărată propoziția p. Menirea unui program sau a unei conduite este să conducă la realizarea unui scop.

6. **O semantica pe arbori a logicii dinamice**

Putem asocia logicii dinamice o interpretare sau un model pe arbori etichetați.

Desemnăm mulțimea agenților prin:

$A_G = \{ag1, ag2,.. ., agn\}$

1. Acțiunile elementare a, b, c,… vor fi redate prin etichetele unor arce. Alfabetul actelor elementare îl vom nota prin:

$A_E = \{a, b, c, d,… \}$

2. Fiecărui agent ag1, ag2,…îi vom asocia un subalfabet de acțiuni elementare. Aceasta o putem descrie prin *funcția de repartizare:*

$b: A_G \rightarrow 2^{A_E}$

Funcția b de repartizare a actelor elementare către agenți este definită pe mulțimea agenților A_G cu valori în mulțimea părților alfabetului de acțiuni elementare A_E

3. *Abilitatea* agentului x, ab(x), va consta din mulțimea actelor descrise de cuvintele scrise în literele subalfabetului asociat de funcția b agentului x.

4. Nodurile vor desemna *stări* sau *situații acționale* s1, s2, … sn sau *rezultate* ale parcurgerii unor drumuri. Mulțimea stărilor grafului o vom nota prin S.

5. Fiecărei stări sau situații acționale putem să-i asociem un model constând dintr-o listă de atomi predicativi instanțiați sau dintr-o listă de literali din logica propozițiilor.

Universitatea Spiru Haret

6. Etichetele unor drumuri vor descrie secvenţe de acte sau conduite.

7. Conduitele vor fi redate prin litere mici din alfabetul elen ca: α, β, χ, δ, λ, μ, π, θ, ρ, σ sau, pentru comoditate, prin literele u, s, t, cu sau fără indici inferiori şi vor fi privite ca nişte programe de acţiune. Fiecare literă grecească va reda de fapt o secvenţă de litere mici latine ce desemnează acte elementare de conduită. Literele greceşti sau literele latine s, t, u, v vor putea fi cuprinse între paranteze drepte de forma $[\alpha]$, [u] sau ascuţite de forma $<\beta>$, < s> şi urmate de o variabilă propoziţională p, q, r, … sau de o formulă deontică de forma Fp, Pq. Formula $[\alpha]$p va fi o formulă de logică dinamică cu semnificaţia că după orice execuţia a conduitei α se va ajunge la o stare în care formula p va fi adevărată. Ea descrie necesitatea în logica dinamică. Formula $<\beta>$q descrie posibilul logic dinamic cu înţelesul particular că cel puţin o dată după executarea conduitei β se ajunge la o stare în care p este adevărată.

8. Formula p din $[\alpha]$p descrie efectul sau rezultatul executării de către un agent a conduitei α. Vom vedea mai departe că această distincţie este utilă pentru formularea unor scheme de inferenţă despre legătura dintre stări iniţiale mijloace şi rezultate despre relaţia dintre respingerea unor stări rezultat şi conduitele ce conduc la acea stare rezultat. Conduitele pot fi văzute ca mijloace de a atinge scopuri sau de a realiza obligaţiile definite pe stări.

9. Un nod în care poate ajunge prin conduita sa un agent şi din care pleacă mai multe drumuri va fi un nod de decizie sau de alegere. Drumurile ce pleacă din acelaşi nod vor descrie deschiderea operaţională a agentului în acea situaţie. Cardinalul asociat mulţimii drumurilor de plecare din nod descrie numărul conduitelor alternative.

10. Două conduite care pleacă din acelaşi nod vor putea fi interpretate ca fiind legate în paralel sau având duratele de execuţie parţial intersectate.

11. Dacă toate rădăcinile arborilor vor aparţine unei mulţimi iniţiale I şi toate nodurile de pe „frunze” vor fi plasate într-o mulţime terminală T şi vom asocia fiecărui agent un arbore cu rădăcina în I şi vom defini o funcţie de angajare teleologică de forma: τ: $Ag \times I \rightarrow T^2$, atunci vom putea descrie asumarea de către agenţi a scopurilor generice şi aplica la modelul pe arbori teleologica noastră cu agenţi. În plus, vom putea dezvolta o teorie a raporturilor scop mijloc.

Universitatea Spiru Haret

Funcția de angajare teleologică poate fi descrisă şi prin operatori teleologici de forma: G(x, s, p) = „Agentul x are în situația s∈I drept scop atingerea unei stări din w∈T în care este adevărat p, i.e. wI= p „. G poate fi interpretat ca o relație: $R_G \subseteq A_G \times I \times 2^T$. În acest caz lui p îi corespunde în T mulțimea stărilor terminale ce satisfac propoziția p.

12. Acelaşi model va putea fi interpretat şi ca un automat nedeterminist în spiritul teoriei prezentate de noi în 1995 [63].

13. Compunerea în serie a două conduite revine la juxtapunerea a două segmente dintr-un drum, respectiv la alăturarea a două şiruri de acte elementare. A se vedea în acest sens, subcapitolul 4.2 despre semantica logicii dinamice propoziționale, punctele 1-6.

14. Punctele 1-14 de mai sus redau caracteristicile generale ale teoriei semantice pe care dorim să o construim. Dincolo de aceste relatări intuitive începe construcția tehnică propriu zisă. Aceasta va consta, pe de o parte, din reamintirea unor cunoştințe de teoria grafurilor şi de teoria automatelor nedeterministe, a gramaticilor generative şi a limbajelor formale, căci va trebui să definim unele noțiuni specifice ca cele de rădăcină, frunză, drum complet, sub-cuvânt, prefix, sufix, inducția pe secvențe sau conduite, etc. Pe de altă parte, va trebui să definim conceptul de model într-un astfel de arbore şi de formulă de logică dinamică adevărată într-un arbore T.

Cum în logică dinamică intervin trei forme de compunere a secvențelor, în serie notată prin; , în paralel notată prin & şi de alegere sau decizie notată prin ∪, va trebui să propunem definiții semantice pentru adevărul unor formulele obținute prin aceste operații. Mai departe, va trebui să definim noțiunile de realizabilitate, infirmabilitate, validitate şi contradicție, ca şi conceptul de consecință logică semantică.

Începem prin câteva definiții preliminare de teoria grafurilor.

Fie T un arbore. Numim rădăcină a unui arbore un nod sau stare ce le precede pe toate celelalte din arbore.

$root(s_0, T) \equiv \forall s(s \in S: s_0 < s)$ (6.1)

Numim drum complet în arborele T un drum care începe în s_0 şi se termină pe frunze. Admițând că lucrăm cu mai mulți arbori simultan şi că aceştia sunt aşezați orizontal cu rădăcina la stânga şi frunzele la dreapta vom include în mulțimea inițială a unui automat I toate rădăcinile arborilor şi într-o mulțime terminală T toate nodurile frunzelor. Vocabularul de intrare în automat va fi reprezentat de alfabetul de acte elementare A_E.

Universitatea Spiru Haret

Funcția de tranziție va fi definită pe produsul cartezian $S \times A_E$ cu valori în S: $S \times A_E \rightarrow S$. Într-o primă etapă, când nu suntem interesați de actele de comunicare dintre agenți, nu vom defini o funcție de ieşire. Automatul va rămâne doar un acceptor. În [65] am folosit un şir de acceptoare nedeterministe pe care le-am făcut, pe rând, apte de a descrie datele şi duratele, scopurile şi obligațiile, conduitele posibile şi conduitele efective, conduitele eficace şi erorile practice, conduitele legale şi cele ilegale etc.

Fie μ un drum, cp un simbol predicativ pentru drum complet (complete path). Atunci scriem:

$$cp(\mu) \equiv (begin(\mu) = s_0) \wedge s_0 \in I \wedge end(\mu) \in T \quad (6.2)$$

Dăm trei definiții ce țin de teoria limbajelor formale în sensul gramaticilor generative, dar care ne vor fi de folos în demonstrarea unor teoreme. Definim termenii de sub-cuvânt, prefix şi sufix.

Evident, termenii de mai sus au interpretări în teoria conduitelor umane şi ne vor servi, în acelaşi timp pentru demonstrația prin inducție a unor teoreme.

$$Dsc.sw(v, u) \equiv \exists s \exists t: svt = u \quad (6.3)$$

$$Dprefpref(s, u) \equiv \exists t: st = u \quad (6.4)$$

$$Dsuf\ suf(m, u) \equiv \exists s: sm = u \quad (6.5)$$

Prefixele şi sufixele sunt cazuri limită de sub-cuvinte. Prefixul este un sub-cuvânt inițial, care nu are un precedent şi sufixul este un sub-cuvânt terminal, care nu are succesor. Sub-cuvântul corespunde unei sub-conduite**.**

Definim, în continuare, pe structura de arbore, compunerile în serie şi în paralel.

Fie T un arbore etichetat pe post de structură de model.

CS1. Spunem că formulele u;t sunt o compunere în serie în arborele T a conduitelor u şi t, dacă şi numai dacă: există în T un drum complet μ etichetat prin cuvântul m şi în m există un subcuvânt s egal cu juxtapunerea lui u cu t.

Simbolic:

$$T \models u;t =_{df} cp(\mu,T) \wedge lab(\mu, m) \wedge sw(s,m) \wedge s = ut.$$

Din punct de vedere semantic ecuația ut = m afirmă că executarea conduitei t imediat după executarea conduitei u este tot una cu executarea conduitei m. „Tot una" = duce la acelaşi rezultat.

Universitatea Spiru Haret

Definiția CS1 introduce relația de compunere fără să folosească noțiunea de stare. De aceea, DC1 este mai puțin intuitivă. Dăm o definiție mai intuitivă, concordantă cu semantica logicii dinamice prezentată mai sus, în care apare conceptul de stare.

CS2. Spunem că două conduite u şi t se compun în serie în arborele T, dacă şi numai dacă, există în mulțimea S a nodurilor lui T o stare v care este, în același timp, stare terminală a drumului etichetat de u şi stare inițială a drumului etichetat de t. Simbolic:

$T \models u;t =_{df} \exists v(v \in S \wedge suv \wedge vtw)$

unde s este eticheta stării inițiale a drumului etichetat de cuvântul u şi v este etichetata stării terminale a acestuia şi totodată eticheta stării inițiale a drumului etichetat de t, iar w este eticheta stării terminale a drumului t.

Expresia suv se citește. „Din s se trece prin u în v" şi este, în semantica logicii dinamice propoziționale, tot una cu $(s,v) \in g(u)$, unde g este funcția de interpretare a programelor ca relații. Unui program u i se asociază o relație definită pe $2^{W \times W}$, produsul cartezian al mulțimii părților lui S, S fiind mulțimea stărilor arborelui T.(vezi 4.2)

CP1. Spunem că două secvențe u şi t din arborele T sunt compuse în paralel, dacă şi numai dacă, există în T două drumuri complete μ_1 şi μ_2 având etichetele m_1 şi m_2 care au un prefix comun pe m_3 astfel încât m_3 compus în serie cu u este un sub-cuvânt în m_1 şi m_3 compus în serie cu t este un subcuvânt în m_2. Simbolic:

$T \models par(u, t) \Leftrightarrow \exists\mu_1\exists\mu_2[\ cp(\mu_1) \wedge cp(\mu_2) \wedge (lab(\mu_1) = m_1) \wedge (lab(\mu_2) = m_2) \wedge pref(m_3, m_1) \wedge pref(m_3, m_2) \wedge sw(\ m_3, u, m_1) \wedge sw(\ m_3, t, m_2)\ ]$

Definiția de mai sus a secvențelor compuse în paralel poate să pară unor cititori contorsionată. Ea şi este astfel, căci ne-am reținut de la introducerea în definiție şi a numelor nodurilor. Definiția este dată la nivelul etichetelor şi nu la nivelul drumurilor. La nivelul drumurilor ne putem sprijini pe idea de nod de scindare din care pleacă două drumuri.

Putem da o definiție mai accesibilă legării în paralel a programelor sau conduitelor folosind conceptul de stare.

CP2. Spunem că două conduite u şi t sunt legate într-un arbore T în paralel, dacă şi numai dacă, există în mulțimea stărilor S o stare s din care pleacă, deopotrivă, drumul etichetat de u şi drumul etichetat

Universitatea Spiru Haret

de t, fiecare dintre acestea terminându-se în alte două stări distincte v şi w. Simbolic:

$T \vDash par(u, t) =_{df} \exists s,v,w(suv \wedge stw)$

Într-o logică dinamică ternară cu operatori de forma $s_1[\pi]s_2$, $s_1<\pi>s_2$, definiţiile compunerilor în serie şi în paralel vor fi, de asemenea, simple şi intuitive. Sugerăm cititorului, ca un exerciţiu, construirea acestor definiţii.

Propunem acum o interpretare pe arbori a actelor de decizie sau alegere făcută de un agent într-o stare sau situaţie acţională.

Noi distingem două clase de decizii: decizii de scop şi decizii procedurale, de program sau conduită. Decizia de scop constă în alegerea de către agentul decident a unei stări terminale acţional posibile ce satisface aspiraţiile şi exigenţele valorice ale acestuia. Decizia procedurală constă în explorarea şi alegerea dintr-o mulţime de conduite alternative accesibile din starea de referinţă una dintre ele care satisface cerinţele de fezabilitate şi dezirabilitate ale agentului decident.

Dacă decidentul nu coincide cu agentul executant, atunci el trebuie să ţină seama de competenţa şi abilităţile agentului executant.

În lucrarea de faţă ne vom ocupa numai de deciziile procedurale care ţin de logica dinamică. De teoria deciziilor de stare sau de angajările teleologice ne-am ocupat pe larg în sistemele noastre de logica scopurilor [68, 73, 76, 77].

CH. Spunem că un agent x, aflat într-o situaţie acţională s face o alegere între o mulţime de conduite $[m_1,.. ., m_n]$, dacă şi numai dacă:

1. situaţia s este începutul drumurilor $[\mu_1, \mu_2,.. ., \mu_n]$, i.e.

$begin(s, [\mu_1, \mu_2,.. ., \mu_n])$,

2. Pentru un drum μ_i, m_i este eticheta drumului μ_i şi desemnează o conduită sau un program iar mulţimea etichetelor drumurilor ce încep în s descrie toate conduitele accesibile direct din s.

$\cup m_i = lab(\mu_i)\ 1 \leq i \leq n$

3. Agentul x are în situaţia s ca scop starea descrisă de propoziţia p;

goal (x, s, p)

4. Există în mulţimea conduitelor $[m_1, m_2,. . ., m_n]$ o conduită m_j pe care agentul x o poate executa şi care se încheie cu atingerea stării scop ce satisface propoziţia p;

$\exists m_j(m_j \in \cup m_i \wedge M^a(x, s, m_j) \wedge [m_j]p)$

5. Executarea de către x a conduitei m_j este legală, dacă şi numai dacă, orice stare rezultată din execuţia conduitei m_j este legală; i.e.

$legal(x, mj) = \forall w((w \in S \wedge do(x, m_j)) \wedge [, m_j]w) \supset legal(x, w)$

Universitatea Spiru Haret

iar conceptul de legalitate a unei stări atinse se defineşte ca în lucrările noastre mai vechi prin referire la interdicţiile şi obligaţiile ce revin unui agent şi la conduitele efective ale acestui.

Un agent poate avea o conduită ilegală pentru că a săvârşit o secvenţă de acte ce duce la o stare rezultat ce-i este interzisă. În acest caz el a săvârşit infracţiunea de a fi executat ceva ce-i este interzis. Încălcarea unei prohibiţii este o ilegalitate.

$IL1(x, w) \equiv F(x, w) \wedge Do(x, u) \wedge [u]w$(6.6)

O altă specie de ilegalitate de stare provine din faptul că un agent nu a săvârşit tot ceea ce trebuia să săvârşească astfel încât să asigure cu orice preţ atingerea unei stări rezultat ce-i era impusă ca obligatorie. Neatingerea unei stări rezultat, accesibile ţie prin abilităţile de care dispui şi la care erai obligat să ajungi este o specie de conduită ilegală. Ca agent executiv ţi se poate reproşa numai neexecutarea unei conduite pe care o puteai executa, erai obligat să o execuţi, dar tu nu ai executat-o.

$IL2(x, w) \equiv \exists u(u \in Ab(x) \wedge [u]w \wedge \text{-}Do(x, u)$ (6.7)

Putem acum defini conduita legală ca o conduită diferită de ambele specii de conduite ilegale.

$legal\_result(x, w) \equiv \text{-}\ (IL1(x, w) \vee IL2(x, w))$(6.8)

Revenim acum la definirea alegerii sau a actului de decizie. Operaţia de alegere este redată de unii autori [30, 45, 5]prin simbolul reuniunii $\cup$.

Este util să observăm că alegerea are loc întotdeauna în prezentul acţiunii şi descrierea postumă redă, de regulă, doar conduita efectivă. Istoricii şi filosofii mai au timp de „contrafactuali".

DS3$^{\#}$ Spunem că un agent x, aflat într-o situaţie acţională s face o alegere în o mulţime de conduite $[m_1,.. ., m_n]$, dacă şi numai dacă:

Simbolic:

$\mathbf{T} \models ch(x, s,[m_1,m_2,\ldots, m_n]) \Leftrightarrow$

1. $begin(s, [\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_n])$;
2. $\cup m_i = \cup\ lab(\mu_i)(1 \le i \le n)$;
3. $goal(x, s, p)$;
4. $\exists m_j\ (m_j \in [m_1, m_2,\ldots, m_n] \wedge M^a\ (x, s, m_j) \wedge [m_j]w$;
5. $legal(x,w)$.

Definiţiile DS1-DS3 explică în semantica pe arbori compunerea serială a actelor şi compunerea lor în paralel. Ele propun regândirea

Universitatea Spiru Haret

semanticii logicii dinamice în vecinătatea teoriei acțiunii. Compunerea în paralel dă seama în opinia noastră de acte desfăşurate simultan de către agenți diferiți sau chiar de acelaşi agent. În ele nu apar explicit operatori deontici, ci doar agenți, situații acționale, abilități şi scopuri ale agenților, conduite sau programe şi operatori de logică modală şi stări rezultate din executarea unor conduite.

Obs. 1. Permisiunea unui agent x aflat într-o situație acțională s de a alege dintre n conduite este definită într-un spațiu de conduite accesibile acestuia.

Obs. 2. O alegere a unui agent x aflat într-o situație s este permisă, dacă şi numai dacă, este permisă cel puțin o alternativă, i.e. nu-i sunt interzise toate alternativele.

Obs. 3. Un agent x aflat într-o situație s în care i se deschid n alternative sau n opțiuni este liber să aleagă pe oricare dintre alternative, dacă şi numai dacă, îi sunt permise toate alternativele.

Obs. 4. Teoria noastră semantică se ocupă exclusiv de descrierea componentei dinamice, în speță de compunerea în serie, în paralel şi prin alegere sau decizie operațională. Nu am adăugat compunerea prin iterare, căci arborii sau grafurile avute în vedere sunt aciclice, fără bucle. Poate face obiectul unei extinderi adăugarea operatorului de iterare a unui program sau a unor conduite

Obs. 5. Nu am introdus în semantica noastră conceptul de interpretare în sensul semanticii logicii predicatelor. Pentru aceasta trimitem pe cititorul la lucrările clasice sau la manualele existente în literatura logică de limbă română, inclusiv la manualele noastre[61, 67, 69]. Pentru întregirea construcției noastre trebuie introdus conceptul de interpretate simbolizat in ultimul nostru manual prin v = (D, Ic, Iv), unde D stă pentru domeniu de referință, Ic pentru interpretarea simbolurilor funcționale şi a celor predicative, inclusiv a constantelor individuale, iar Iv pentru interpretarea variabilelor individuale. În locul lui D de data aceasta vom pune arborele T, care oricum conține un domeniu de referință S mulțimea stărilor sau situațiilor acționale sau mulțimea nodurilor. Domeniul nostru va fi unul sau o mulțime de domenii cu o dinamică proprie determinată de actele deliberate ale agenților şi în plus de dinamica spontană a naturii care este din punct de vedere uman agentul de acțiune vidă. Dar cutremurile, inundațiile, erupțiile vulcanice, radiațiile cosmice, bolile nu sunt tocmai acțiuni „vide" etc.

Universitatea Spiru Haret

7. **Produsele de calitate, logica dinamică, tehnologiile şi agenţii**

Ne propunem să descriem, aici, formal unele trăsături structurale ale tehnologiilor, conexiunile dintre fluxurile tehnologice şi stările rezultat sau produsele obţinute, legăturile dintre tehnologii şi agenţii ce le proiectează, utilizează şi menţin.

Prima provocare pe care o aducem lumii inginerilor şi managerilor interesaţi de calitate, de proiectarea, implementarea şi menţinerea sistemelor de calitate este cea a regândirii problemelor calităţii în termenii logicii dinamice cu semantică pe arbori, grafuri şi automate aptă de a descrie unitar, sistemic şi computaţional o clasă largă de probleme vitale ale dobândirii calităţii. Perspectiva pe care o propunem este intim legată de logica acţiunii şi de praxiologia formală.

Ea poate da simultan seama de starea de fapt sau situaţia acţională în care se găseşte întreprinderea. Aceasta poate fi redată printr-un set de formule logic predicative. Formulele pot oferi informaţii despre agenţi, statutul şi abilităţile lor, despre materii prime, unelte, mijloace, fonduri băneşti iniţiale, etc. Funcţia b de angajare teleologică determină scopurile sau obiectivele asumate. Deciziile procedurale descrise de operaţia de alegere ch (vezi şi notaţia $\cup$) determină programele sau strategiile prin care vor fi atinse aceste obiective. Mai departe, cadrul normativ ce reglementează conduitele va fi introdus prin etichetările deontice. Limbajul formal conceput de noi dă seama şi de abilităţile şi competenţa operaţională a diferiţilor agenţi, de structura ierarhică, statutul, rolurile, atribuţiile agenţilor şi de criteriile evaluării acestora. Acest ultim aspect este captat de ceea ce noi am numit logica acceptării. De fapt, o teorie despre evaluarea conduitelor şi performanţelor agenţilor după criterii anterior stabilite.

Tălmăcim acum semantica pe arbori a logicii dinamice prezentată în capitolul anterior în termenii operaţiilor şi proceselor tehnologice.

Alfabetul A_G al agenţilor va fi redat prin numele operatorilor, fiinţelor umane, roboţi, sisteme sau dispozitive tehnice ce execută operaţii.

Simbolurile a, b, c,…din alfabetul A_E vor descrie operaţiile tehnice elementare ce intervin într-o acţiune umană sau într-un proces tehnologic. Aceste litere vor eticheta în graf arcele ce leagă o stare precedent de o stare succesor.

Universitatea Spiru Haret

Funcţia b definită pe mulţimea agenţilor cu valori în mulţimea părţilor actelor elementare va descrie repartizarea pe agenţi, persoane, dispozitive tehnice hard şi soft a operaţiilor pe care le „ştiu" şi le pot aceştia efectua.

Abilitatea unui agent va consta din totalitatea operaţiilor elementare şi din mulţimea „cuvintelor" sau secvenţelor de acte pe care acesta le poate executa dintr-o situaţie acţională dată. Fiecare conduită sau secvenţă de operaţii schimbă situaţia acţională iniţială într-o nouă situaţie.

Acţiunea vidă redată prin simbolul η descrie pasivitatea sau neintervenţia agentului de referinţă în cursul evenimentelor. Dar, chiar şi în acest caz, intervine agentul „neutru" sau natura, care duce la degradarea, în timp, a sistemelor tehnice şi intervin, desigur, ceilalţi agenţi din economia de piaţă.

Este important de subliniat că oricărei situaţii acţionale ce corespunde unui nod într-un graf îi asociem în construcţia noastră formală un model în sensul semanticii logicii predicatelor. Un astfel de model este o listă de literali instanţiaţi care sunt redarea simbolică a descripţiilor din limba naturală sau din limbajele tehnice ce descriu situaţia acţională.

Lista de atomi predicativi instanţiaţi a unei situaţii va corespunde într-un program Prolog cu baza factuală a programului.

Pe de altă parte, oricărei situaţii acţionale fizice, tehnice sau sociale îi corespunde un set de propoziţii condiţionale universale ce descriu legi naturale, dependenţe cauzale, prevederi normative sau directive practice care leagă situaţia acţională în cauză de situaţiile posibile viitoare, precum şi de statutul şi aprecierea pe care le-o dau fiinţele umane. Îmbinarea dintre aceste clauze generale şi datele factuale, ce descriu modelul situaţiei acţionale, face posibilă inferenţa, calculul şi predicţiastărilor viitoare. Acelaşi mecanism logic dă seama şi de mecanismul explicaţiilor raţionale prin care o stare prezentă sau petrecută cu secole în urmă capătă înţeles prin conectarea ei cu alte stări anterioare şi cu legi şi dependenţe între clase de evenimente care au loc şi în prezent.

Sistemele de norme, regulile şi criteriile admise într-o comunitate sau într-un sistem de activitate profesională ne permit să facem anumite estimări şi judecăţi de valoare rezonabile cu mare şansă de a fi acceptate de o comunitate de specialişti.

Universitatea Spiru Haret

Sistemele expert şi de inteligenţă artificială fac uz în mod curent de baze de cunoştinţe, de clauze generice şi date factuale pentru a rezolva automat şi rapid numeroase probleme tehnice şi sociale.

Secvenţele de operaţii cu programe de calculator notate în logica dinamică prin variabilele $\alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\gamma,\eta$ sau, pentru comoditate, notate de noi prin u,u1,u2, t, t1,t2,. .. vor fi interpretate în teoria formală a proceselor tehnologice ca şiruri de operaţii sau procese tehnologice controlate de operatori umani sau de dispozitive sau sisteme automate.

Formula $[\alpha]p$ va putea fi interpretată: „După orice execuţie a secvenţei de operaţii tehnice α se va ajunge la o situaţie terminală în care propoziţia p este adevărată" În mod analog, duala acesteia, $<\alpha>p$ se va citi: „cel puţin după o aplicare a secvenţei tehnice α se va ajunge la o situaţie în care propoziţia p devine adevărată".

Cei doi operatori dinamici descriu într-un fel două grade de certitudine de a atinge în urma aplicării unui procedeu starea ţintă. Formula $[\alpha]p$ descrie obţinerea certă a stării p după aplicarea procedurii. Duala ei ne spune doar că aceasta este posibilă.

Dar tehnologiile sunt fapte umane empirice care se încadrează într-un spaţiu real [0,1]. De aceea, ele sunt descriptibile din acest punct de vedere în termeni fuzzy sau probabilişti.

Modelarea logic dinamică pe grafuri, a unei tehnologii prezintă, totuşi, câteva avantaje.

Mai întâi, intuitivitatea.

În al doilea rând, dezvăluie modurile de compunere: în serie, în paralel, la alegere şi prin iterare.

In al treilea rând, dă seama de actele elementare şi de stările intermediare, de nodurile grafului.

Permite descrierea prin modele logice, a stărilor extreme, starea iniţială şi cea terminală, precum şi a celor intermediare .

Arcele arborilor sau grafurilor pot fi etichetate, pe rând sau simultan, cu mai multe clase de valori ale operaţiilor elementare (durata executării operaţiei, costul ei, cine „ştie" sau poate executa operaţia). La rândul lor, stărilor li se pot asocia, date temporale, precum şi diferite etichete normative ca „permise", „interzise" sau obligatorii, după cum aparţin unor mulţimi de stări ce descriu proprietăţi sau relaţii descrise de simboluri predicative.

Dar, în al patrulea rând, cel mai important avantaj constă în posibilitatea definirii pe arbori a unor inducţii matematice sau logice

Universitatea Spiru Haret

care, cu o programare logică adecvată, permit deopotrivă calcularea unor valori numerice şi inferenţa unor consecinţe.

Fie, de exemplu, $u = a_1; a_2; a_3;.. .; a_n$ o secvenţă de acte. Pentru facilitarea inducţie matematice, ca în Prolog, scindăm orice secvenţă în primul element al secvenţei sau „capul" secvenţei şi în „restul" sau „coada" acesteia. Scriem aceasta sub forma: h(u); q(u). Mai departe, q(u) se scindează şi ea în capul cozii, h(q(u)) şi în coada cozii, q(q(u)). Cum însă cardinalul lui u este un număr finit, să zicem n, după n astfel de scindări, ajungem să considerăm drept „cap" ultimul element din secvenţa u şi drept coadă mulţimea vidă de elemente. Convenim să notăm conduita vidă prin η.

Un al doilea exemplu. O inducţie simultană, pe datele temporale şi durate, ne permite să calculăm în Prolog datele de acces ale stărilor şi duratele parcurgerii drumurilor în arborele sau graful ce descrie un proces tehnologic. O astfel de inducţie am folosit în lucrarea noastră [63].

În al cincilea rând, prin funcţia de angajare teleologică sau cu ajutorul functorilor teleologici (vezi anterior la începutul cap.6, subpunctul 11) putem defini pe graf scopurile strategice ale agenţilor şi, mai important, putem verifica dacă acestea sunt realizabile cu abilităţile proprii de care dispune agentul sau sunt realizabile numai prin cooperarea cu alţi agenţi. Comparaţia dintre rezultatele conduitelor efective şi scopurile anterior asumate ne permite să conchidem asupra eficacităţii activităţii unui agent. La fel, comparaţia dintre costurile operaţiilor ce duc la realizarea unui produs şi valoare de desfacere pe piaţă a acestuia ne permite să conchidem asupra eficienţei activităţii economice desfăşurată de către un agent.

În sfârşit, reprezentarea în mulţimea stărilor terminale T a unor stări generice rejectabile sau inadmisibile pentru un agent economic va avea repercusiuni asupra mulţimii conduitelor agenţilor participanţi.

Invers, asumarea cu seriozitate a unor obiective strategice definite tot pe mulţimea stărilor terminale, cunoaşterea stării iniţiale şi cercetarea abilităţilor agenţilor permite selectarea unor programe fezabile.

Un proces tehnologic complex poate fi redat în modelul nostru global printr-un singur graf alcătuit din doi arbori „sudaţi" pe frunze. având o singură stare iniţială şi o singură stare terminală.

În prima parte a arborelui nostru „sudat" descriem modul de producere a reperelor elementare. Eticheta fiecărui nod terminal sau „frunză" a arborelui va descrie un reper elementar, iar drumul de la rădăcina w_0 la frunza în cauză descrie modul de producere a reperului.

Universitatea Spiru Haret

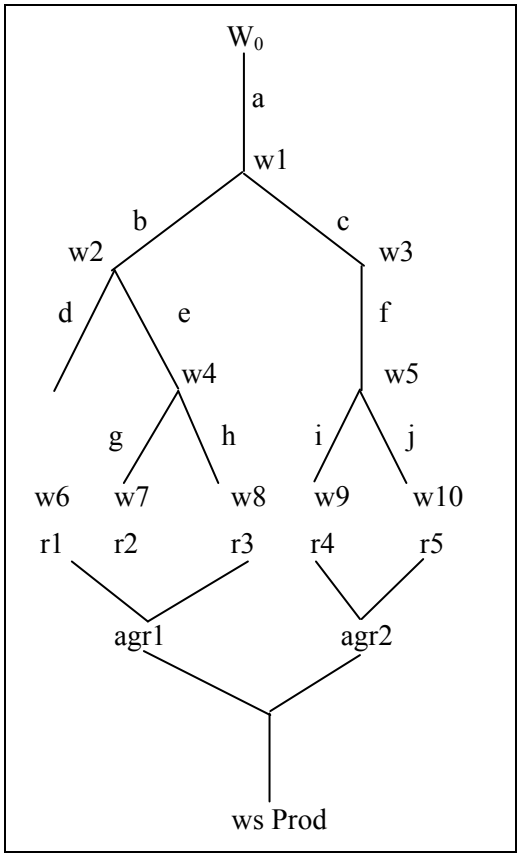


Fig. 1. *Arbore tehnologic*

Aşa de exemplu, reperul r1 este realizat prin secvenţa de operaţii a;b;d. Reperul r5 este realizat prin secvenţa a; c; f; j care se termină în starea w10 Fiecare drum etichetat prin cuvinte acţionale distincte descrie cum se produce un repet distinct.

Primul arbore conţine multe noduri de decizie sau deschideri operaţionale. Putem spune că acesta conţine puncte de bifurcare sau scindare.

Cel de al doilea arbore va avea tot atâtea noduri de start sau rădăcini câte noduri terminale sau frunze a avut primul arbore şi toate celelalte nodurile ale sale vor fi noduri de joncţiune.

Universitatea Spiru Haret

Menirea celui de al doilea arbore este de a descrie operațiile de asamblare a reperelor elementare în agregate de nivel 1, pe acestea le vom uni, tot prin operații de asamblare, în agregate de nivel 2.

Convenim să notăm mulțimea reperelor elementare ce etichetează frunzele prin Rep.

$$Rep = \{ r_1, r_2, \ldots, r_m \} \quad (7.1)$$

Operația de asamblare sau agregare a complexelor poate fi descrisă sub forma unor compuneri de funcții în felul următor:

$$agr1: 2^{Rep} \rightarrow Agr1 \quad (7.2)$$

Prima funcție de agregare este definită pe mulțimea părților reperelor elementare cu valori în mulțimea agregatelor de ordinul întâi Agr1.

Prima funcție de asamblare agr1 este definită, în exemplul din fig 1, pe mulțimea reperelor elementare $\{ r1, r2, r3, r4, r5 \}$ cu valori în mulțime agregatelor de ordinul întâi

Cea de a i+1 funcție de agregare agr (i+1) este definită pe mulțimea părților agregatelor de ordinul i.

$$agr(i+1) : 2^{Agri} \rightarrow Agri+1 \quad (7.3)$$

Este evident că operația de agregare se caracterizează, între altele, prin aritate sau numărul componentelor ce se agregă la un moment dat. Vom avea pentru orice operație de agregare un număr de componente agregate descris de δ(agr1)cu valori în numere întregi între 2 şi un număr finit de regulă sub 10.

Primul agregat de ordinul întâi din fig. 1, agr1 este de aritate 3; cel de al doilea este de aritate 2. Tot de aritate 2 este şi ultimul agregat, agregatul final Prod.

Starea w_g sau starea obiectiv a întregului proces tehnologic, realizarea produsului Prod este consecința tuturor tranzițiilor mijlocite de actele sau operațiile descrise de etichetele arcelor.

Agenții nu se văd în graful tehnologic redat de fig.1. Legătura agenților cu şirurile de operații este făcută prin funcția b de repartizare a alfabetului b: $A_G \rightarrow 2^{AE}$ introdusă în cap 6 consacrat prezentării semanticii pe arbori a logicii dinamice.

Evident, agenții pot fi ființe umane, roboți sau sisteme soft. Oricum, agenților li se repartizează competențe operaționale distincte care pot viza prelucrarea materiei prime sau a prefabricatelor, controlul parametrilor de stare sau prelucrarea informației achiziționate şi luarea unor decizii, după criterii încorporate în sistem.

Agregarea va fi descrisă în graf prin joncțiuni sau convergențe, respectiv prin două sau mai multe arce cu aceiaşi stare terminală. Mai numim această stare terminală şi nod de joncțiune.

Universitatea Spiru Haret

Cum orice arc a are un nod de start st(a) şi şi un nod terminal ter(a), vom spune că starea v este un nod de joncţiune pentru arcele a1, a2,.. ., an dacă arcele a1, a2,.. . ,an au aceiaşi stare terminală. Simbolic:

$$\text{jonc}([a1, a2,.. .. ,an], v) =_{df} ter(a1) = ter(a2) =. .. = ter(an) = v \quad (7.4)$$

Invers, un nod este nod de scindare pentru două sau mai multe arce sau drumuri dacă acestea au aceiaşi stare iniţială.

$$\text{scind}([a1, a2,.. .. ,an], s) =_{df} st(a1) =st (a2) =. .. = st(an) = s \quad (7.5)$$

Este uşor de observat că stările etichetate prin agr1, agr2 şi Prod sunt noduri de joncţiune iar stările w1, w2, w3, w4 şi w5din primul arbore sunt stări de scindare.

Prin inversarea direcţiei de parcurgere a grafului, respectiv prin trecerea de la agregare sau compunere la descompunere, nodurile de joncţiune devin noduri de scindare.

Este util să observăm că există procese sau operaţii tehnologice reversibile şi operaţii tehnologice ireversibile. Putem vorbi de montarea şi demontarea unei maşini, de analiza şi sinteza unor substanţe chimice, dar credem că nu orice compunere chimic organică este reversibilă.

Această parcurgere inversă este posibilă in cazul agregărilor mecanice, dar nu este întotdeauna realizabilă în cazul compuşilor chimici organici sau în cazul sistemelor biologice.

Agregarea este, într-un fel, producere de subsisteme funcţionale şi nu o simplă juxtapunere de prefabricate. Inversa ei este într-o anumită accepţie relaţia parte întreg, demontarea sau descompunerea unui agregat.

Noi ne putem descompune ceasul sau calculatorul, fiecare pe riscurile sale.

Într-un anumit sens agregarea are ceva comun cu compunerea în paralel. Agregarea componentelor de acelaşi nivel este simultană, ca şi operaţiile compuse în paralel. Dar, spre deosebire de acestea, ea nu este analitică, ci sintetică.

Cu cât ordinul funcţiei de agregare este mai mare, cu atât cardinalul mulţimii de agregate obţinute este mai mic.

Ultima funcţie de agregare va avea ca rezultat mulţimea singleton de agregate sau produsul final care este un obiect unic.

Primul arbore conduce la o expandare, analiză şi realizare prin tehnologie a reperelor elementare.

Universitatea Spiru Haret

Fiecare reper sau obiect elementar produs din materia primă inițială, din proiectul mental şi executarea unei secvențe de operații din abilitatea agentului poate fi privit ca o definiție operațională de forma:

Numim rep_i obiectul realizat din materia primă m_j prin secvența de operații u. Orice reper sau produs finit este un rezultat al unui proces tehnologic aplicat asupra unei materii prime sau asupra unui prefabricat preexistent.

Multe prestații de servicii făcute într-o gospodărie de sisteme automate sau semiautomate pot fi descrise în termenii logicii dinamice sau ai teoriei abstracte a procedurilor şi tehnologiilor.

Sugerăm cititorului să descrie în termenii logicii dinamice funcționarea maşinii automate de spălat rufe, a automatului de preparat cafeaua, sau a cuptorului cu microunde, a banalului aragaz. Şi, pentru delectare, îi sugerăm să se amuze o oră cu descrierea în termenii logicii dinamice a unor rețete de preparare a unor feluri de bucate.

Un produs culinar este o stare terminală a unor compuneri de secvențe de operații efectuate asupra materiilor prime inițiale. Şi dacă cititorul este inițiat în programare logică şi în plus este chimist sau medic, îi propunem să conceapă un program logic care să propună fiecărui client al unui restaurant un meniu adecvat acestuia, ținând cont de criteriile vârstă, sex, greutate, profesie şi ținând cont de necesarul organismului de proteine vegetale, animale, săruri, minerale, vitamine.

Cu ani în urmă am construit şi noi un astfel de program, care reluat, ar putea fi transformat într-un sistem expert util în proiectarea hrănirii raționale a sportivilor, piloților, cosmonauților, dar şi a muritorilor de rând.

După cum am văzut, cel de al doilea arbore conduce la asamblare, agregare sau sinteză. El încheagă reperele în agregate de ordinul întâi; acestea conduc printr-o nouă agregare la o agregare de ordinul al doilea şi aşa mai departe.

Ambele la un loc descriu procesul transformării materiei prime în produs complex cu valoare de întrebuințare, într-un bun cu valoare de schimb şi cu valoare de întrebuințare.

După cum am văzut, orice operație sau act aparține unui agent. Această conexiune dintre operații şi agenți a fost descrisă cu ajutorul funcției de repartizare a operațiilor elementare către agenți.

Dintre cele două grafuri, primul are tendințe de diferențiere şi e preponderent divergent. Cel de al doilea are tendințe de unificare şi e preponderent convergent Compuse într-un graf unic, ele descriu procesul tehnologic prin care se realizează un produs complex de calitate.

Universitatea Spiru Haret

Să ne reamintim, deocamdată, că, în concepţia europeană de calitate am redus, într-un prim moment, calitatea unui produs la calitatea procesului tehnologic şi că acest proces tehnologic l-am descris în termenii semanticii unei teorii logice dinamice. Am făcut o primă reducere; întemeiem calităţii produsului pe calitatea aplicării tehnologiei.

Mai departe, vom admite că nivelul execuţiei tehnologice depinde în mod esenţial calitatea proiectării tehnico-inginereşti a produsului în cauză.

În sfârşit, calitatea proiectului ingineresc depinde de calitatea instrucţiei tehnico-ştiinţifice, de experienţa şi abilităţile echipei ce a executat proiectul şi de calităţile inginerilor de producţie ce au descifrat acest proiect, l-au defalcat pe sub-module şi l-au repartizat unei echipe mixte de executaţi. Calitatea agentului executant are şi ea însemnătatea ei de necontestat.

Putem sintetiza, într-o primă etapă, demersul teoretic al strategilor ce au gândit conceptul european de calitate în următoarele patru meta-instrucţiuni Prolog:

qual(Prod) :-qual(Perform). (7.6)
qual(Perform) :- qual(Design). (7.7)
qual (Design) :- qual(Research) (7.8)
qual([Perform, Design, Research]) :-
qual(Agents). (7.9)

Mai departe, calitatea agenţilor, care sunt, evident, agenţi colectivi cu statut de persoane juridice, este explorată, în detaliu, prin cercetarea principalelor clase de endo-relaţii şi exo-relaţii.

Prestigiul unui agent individual sau colectiv, în faţa unei comunităţi este rezultatul judecăţilor de valoare favorabile emise în timp de către de către membrii comunităţii.

În termenii teoriei pe care o propunem acesta poate fi definit astfel:

$$prestigious(Ag, T, Com) =_{df} \forall Deed((done(Ag, Deed, T') \wedge (T' < T)) \supset ac(Com, Deed, Excel). \quad (7.10)$$

Agentul Ag este prestigios în comunitatea Com la data T, dacă şi numai dacă, orice faptă anterioară a sa a fost apreciată de către comunitatea Com ca excelentă.

Prestigiu se dobândeşte în timp şi trebuie mereu întreţinut cu noi realizări mereu apreciate de comunitate.

Prestigiul unui autor, al unui om de ştiinţă, al unui artist, faima unei firme, „marca fabricii" sunt toate construite în timp prin mii de

Universitatea Spiru Haret

fapte cotidiene urmate de aprecieri pozitive la adresa performanţelor agentului şi a calităţii operelor sale.

Definiţia prestigiului propusă mai sus cere agentului prestigios, infailibilitate şi constanţă în realizări de vârf. Ori romanii spuneau: Errare humanum est.

Chiar şi o fiinţă umană care greşeşte uneori poate fi prestigioasă, căci faima ei se datorează actelor creatoare, excepţionale, benefice pentru comunitate şi nu conduitei ei infailibile. Agentul prestigios nu este neapărat un contabil infailibil. E de-ajuns să fie o fiinţă harnică şi creatoare ce extinde prin eforturi proprii aria posibilului prin acţiunea umană.

prestigious(Ag, T, Com) $=_{df}$ ∃Deed((done(Ag, Deed, T') ∧ (T'< T)) ∧ nov(Deed) ∧ac(Com, Deed, Excel). (7.11)

Definiţia 7.11 diferă substanţial de 7.10. Prestigiul unei persoane nu se mai datorează faptului că toate actele sale au fost calificate de către concetăţenii săi ca excelente, fapt dealtfel puţin probabil, ci faptului că acesta a săvârşit cel puţin o faptă novatoare, inedită, apreciată de întreaga comunitate.

Putem defini un concept de prestigiu mai uman, care să tolereze unele erori practice şi să pretindă doar 95 % conduite excelente.

Mass-media poate întreţine şi amplifica sau diminua acest prestigiu.

În ceea ce ne priveşte distingem între prestigiul îndreptăţit, acoperit de abilităţi, fapte şi performanţe şi prestigiul găunos dobândit prin acte de impostură şi tehnici de manipulare.

Prestigiul găunos se întemeiază pe o supraevaluare a realizărilor agentului şi pe metode mass-media de persuasiune. Acesta presupune adesea şi o rea credinţă a agentului evaluator, existenţa unui decalaj între ceea ce ştie şi crede şi ceea ce declară public. Formal:

extol(X, Deed) = assert(X,Deed,Excel), belief(X, Deed, -Excel) . (7.12)

Agentul x supraevaluează ipocrit fapta Deed, dacă şi numai dacă, declară public că aceasta este excelentă, dar de fapt, el nu crede că este excelentă.

Similar, putem defini şi subapreciera unui agent.

deprec(X, Deed) = ac(X, Deed, Bad), belief(X, Deed,-Bad) (7.13)

X depreciază nesincer o faptă, dacă şi numai dacă, o acceptă public cu calificativul rea şi în sinea sa nu o apreciază aşa.

Universitatea Spiru Haret

Caracterizarea agentului depinde mult relaţiile acestuia cu membrii comunităţii căreia îi aparţine. Într-o comunitate există relaţii interne şi externe.

Drept relaţii interne sau endo-relaţii menţionăm structurile organizaţionale relaţiile ierarhice, relaţiile dintre conducerea întreprinderii şi sindicate.

Ca specii de exo-relaţii menţionăm relaţiile cu furnizorii, care sunt a monte întreprinderii şi relaţiile cu beneficiarii sau clienţii, care sunt a val acesteia.

În ultimă instanţă, calitatea produselor depinde de calitatea instrucţiei şi abilităţilor tehnico-profesionale al întregului corp profesional, de comportamentul şi atitudinea acestuia în actele de cooperare şi competiţie de calitatea comunităţii şi a instituţiilor ei.

Calitatea unei întreprinderi ce candidează la obţinerea unui certificat de excelenţă este evaluată după 9 criterii generice, detaliate pentru întreprinderile mari în 32 de subcriterii şi pentru cele mici celor mici în 22 de subcriterii.

Primul criteriu general priveşte concepţia managerilor asupra valorilor, misiunii şi obiectivelor asumate. Celelalte privesc politica şi strategia, creşterea competenţei personalului, raporturile dintre parteneri, gestiunea resurselor, conceperea şi controlul proceselor tehnice, satisfacţia clienţilor, satisfacţia personalului, impactul asupra mediului social.

Din perspectiva noastră criteriile pot fi descrise prin predicate, care în raport cu o întreprindere candidat vor fi instanţiate în mod specific prin determinări valorice calitative sau cantitative.

Putem concepe mai multe procedee de operaţionalizare a criteriilor care să conducă la ordonarea întreprinderilor candidate după nivelul lor de performanţă şi după efectele lor favorabile asupra personalului, clienţilor, partenerilor şi mediului social. Cooperarea, instrucţia şi perfecţionare stilului de conducere şi de muncă, cooperarea şi inovaţia sunt căi de satisfacere a criteriilor de calitate.

Sistemul nostru de logica acceptării formulează pentru prima dată într-o teorie logică formală legi şi raporturi de dependenţă între valorizarea produselor sau stărilor terminale şi valorizarea conduitelor ce duc la înfăptuirea acestora.

Mai mult, apreciem calitatea agenţilor în funcţie de calitate şi nivelul de performanţelor obţinute şi de creativitatea acestora.

Universitatea Spiru Haret

Prestigiul unui agent este un efect postum al conduitelor sale anterioare. „Marca fabricii" este prestigiul acumulat în timp de un agent colectiv performant, rezultatul aprecierii de către un cerc larg de beneficiari, specialişti şi clienţi a bunurilor produse sau a serviciilor prestate.

Menţionăm câteva dependenţe dintre judecăţile de valoare făcute asupra stărilor terminale, în speţă asupra bunurilor produse şi evaluarea conduitelor şi tehnologiilor din care au rezultat acestea.

R1. Dacă respingem o anumită stare terminală sau o clasă de stări generice caracterizată printr-o listă de descripţii, atunci va trebui să respingem orice conduită ce se termină într-o astfel de stare.

R2. Dacă acceptăm ca scop al nostru o anumită stare dezirabilă, atunci va trebui să acceptăm cel puţin o conduită care conduce la realizarea stării scop. Altfel scopul asumat rămâne unul iluzoriu, irealizabil sau este rejectabil pe temeiuri morale, pentru că orice cale de a-l realiza este reprobabilă şi ar fi dezavuată de comunitatea din care facem parte.

R3. Dacă acceptăm o conduită, atunci trebuie să acceptăm toate subconduitele ei şi orice acţiune elementară din secvenţă.

R4. Acceptarea unei tehnologii înseamnă acceptarea tuturor consecinţelor sale, respectiv a tuturor stărilor intermediare ale procesului tehnologic şi a influenţelor acestora asupra mediului natural şi social.

Din nefericire, când cineva lansează o tehnologie nouă, acesta are în vedere rezolvarea unei probleme locale cu care se confruntă şi nu are timp, dorinţă şi adesea nici competenţa de a face o analiză profundă a consecinţelor tehnologiei. Şi, cu certitudine, nici cei care preiau tehnologia, prin imitare, „molipsire" cumpărare de brevet etc., nu au timp de astfel de analize.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 9. **LOGICA DEONTICĂ**

Logica deontică este o teorie modală despre enunțurile normative şi sistemele de norme juridice, morale, politice. După profesorul de la Uppsala Lennart Åqvist logica deontică este „studiul logic al utilizării normative a limbajului şi obiectele ei predilecte sunt conceptele normative şi anume cele de *obligație* (prescripție), *prohibiție* (interdicție), *permisiune* şi *angajament*"[2, p 607]. În limba română operatorii deontici sunt redați prin expresii ca: „trebuie să…", „se cuvine ca …" sau „se cade ca… „; „este de datoria ta să …" (pentru obligație); „este interzis să…"; „nu este permis să …" (pentru interdicție).

Se consideră că logica deontică a apărut în 1951 prin publicarea de către Georg H. von Wright a articolului „Deontic Logic" în revista *Mind*. Am prezentat în altă parte [65, 292-294] precursorii logicii deontice şi nu considerăm necesar să reluăm problema aici.

Dealtfel, tot în 1951,în cartea sa *An Essay în Modal Logic*, von Wright utilizează termenul de modalitate într-o accepție mai largă decât cea acreditată cu ani în urmă de către C. I. Lewis. Von Wright distingea patru accepții ale acestui termen, după cum se poate vedea din următorul tabel:

Aletice	*Epistemice*	*Deontice*	*Existențiale*
necesar	verificat	obligatoriu	universalitate
posibil	admisibil	permis	existență
imposibil	infirmat	interzis	nonexistență
contingent	indecis	indiferent	prezență şi absență

Tabelul 1. Feluri de modalități (von Wright, 1951)

Primele trei coloane descriu, în opinia noastră, specii distincte de operatori modali aletici, epistemici şi deontici; cea de a patra coloană descrie moduri de cuantificare. Există, desigur, o similitudine formală

Universitatea Spiru Haret

între cuantificările din logica predicatelor şi operatorii modali, dar nu trebuie confundaţi cuantificatorii cu operatorii modali.

Coloana a doua pentru operatorii modali epistemici va avea la Jaakko Hintikka alte tălmăciri, în loc de „verificat" , „ştiu că …", în loc de „admisibil", „plauzibil cu …" etc.

În afară de cele trei specii de modalităţi enumerate de von Wright în 1951, numeroşi alţi cercetători au propus şi alte specii de modalităţi axiologice, teleologice, ale acceptării etc.

1. **Sistemele wrightiene P şi O**

Primul sistem axiomatic propus de von Wright în 1951 ia ca operator primitiv pe P (permisiunea) şi ca operatori definiţi obligaţia, notată prin O, şi interdicţia, notată prin F. Cel de al doilea sistem ia ca primitiv pe O şi defineşte pe F şi pe P.

Logica deontică este o supraetajare a logicii propoziţiilor sau a logicii predicatelor. Ea presupune toate legile logicii propoziţiilor sau toate legile logicii predicatelor. Axiomele şi definiţiile celor două sisteme axiomatice wrightiene de logică deontică monadică sunt:

Sistemul P	Sistemul O
Ax1. $Pp \vee P\text{-}p$	Ax1. $-(Op \wedge O\text{-}p)$
Ax2. $P(p \vee q) \equiv (Pp \vee Pq)$	Ax2. $O(p \wedge q) \equiv (Op \wedge Oq)$
D1. $Fp =_{df} -Pp$	D1. $Fp =_{df} O\text{-}p$
D2. $Op =_{df} -P\text{-}p$	D2. $Pp =_{df} -O\text{-}p$

Tabelul 2. Sistemele wrightiene P şi O.

Drept reguli de inferenţă sunt date regulile: substituţiei uniforme, RS; Modus Ponens, MP; regula substituirii echivalentelor şi regula substituirii variabilelor din legile logico-propoziţionale prin expresii cu operatori deontici.

Cele două sisteme sunt duale şi deductiv echivalente. Cititorul găseşte expunerea analitică a acestor două sisteme în lucrarea noastră din 1984 [62, 302-317]. În sistemul P sunt demonstrate 25 de teoreme. Este prezentată, totodată, o demonstraţie de noncontradicţie a sistemului P precum şi demonstraţia echivalenţei deductive a sistemelor P şi O.

Reproducem mai jos pe două coloane lista teoremelor din sistemul P.

Universitatea Spiru Haret

T1. Op ⊃ Pp	T14. (Op∧Oq) ⊃ O (p∨q)
T2. Fp ⊃-Op	T15. O (p∧q) ⊃ Oq
T3. F-p ⊃Op	T16. O (p ⊃ q) ⊃ (O (p ⊃ q) ⊃ Oq)
T4. P-p ≡ -Op	T17. (O (p ⊃ q) ∧ Op) ⊃ Oq
T5. -P-p ≡ Op	T18. (Pp∧O (p ⊃q)) ⊃ Pq
T6.Fp≡ O-p	T19. (O (p⊃q)∧-Pq)⊃-Pp
T7. F (p ∨ q) ≡ (Fp ∧Fq)	T20. (O (p ⊃ (q ∨ r))∧-Pq∧-Pr) ⊃ -Pp
T8. O (p∧q) ≡ (Op ∧ Oq)	T21. Pp ∨ Pq ∨ -O (p∨q)
T9. Op ⊃ (Oq ⊃ (Op ∧ Oq))	T22. P-p ∨ P-q ∨ P- (p∨q)
T10. P (p∧q) ⊃ Pp	T23. Pq ⊃ (F (p∧q) ⊃ -Op)
T11. P (p∧q) ⊃ (Pp ∧ Pq))	T24. Pq ⊃ (Op ⊃ P (p∧q))
T12. (Op ∨ Oq) ⊃ O (p ∨ q)	T25. P (p ⊃q) ≡ (Op ⊃ Pq).
T13. (Op ∧ Oq) ⊃ O (p ⊃ q)	

Tabelul 3. Teoreme în sistemele P şi O

Fiecare dintre teoreme are drept punct de plecare: una dintre cele două axiome sau una dintre legile logicii propoziţiilor. Primele 6 teoreme pornesc de la Ax1. Aşa, de exemplu, prima teoremă se poate obţine din Ax1 şi legile logicii propoziţiilor.

Căutarea textului demonstrativ pentru o teoremă presupune, de regulă, două faze: una analitic-reductivă şi o a doua sintetic-constructivă. Analizăm pentru a reduce la atomi sau la axiome şi apoi compunem „atomii" astfel încât să ajungem la teza de demonstrat. Orice demonstraţie presupune şi o anumită conduită teleologică. Trebuie să obţinem teza de demonstrat făcând uz de axiome sau formule anterior demonstrate şi regulile de inferenţă. Definiţiile date într-un sistem axiomatic sunt un minunat prilej de a folosi regula substituirii echivalentelor şi de a reduce termenii derivaţi la termenii primitivi în care sunt formulate axiomele. Exemplificăm prin demonstrarea primei teoreme:

1. Pp ∨ P-p (Ax1)
2. -P-p ⊃ Pp Regula negării unei alternative aplicată la 1
3. Op ⊃ Pp Regula RE sau a substituirii echivalentelor aplicată la 2.

Teorema s-a obţinut numai prin doi paşi.

Sugerăm cititorului să încerce prin forţe proprii demonstrarea câtorva dintre teoremele reproduse în tabelul nostru de mai sus.

Universitatea Spiru Haret

2. **Logica deontică standard**

Dacă reținem axiomele sistemului P şi definiția D2 şi adăugăm la aceasta ca o a treia axiomă A3, atunci obținem ceea ce R. Hilpinen şi alți cercetători numeau logică deontică standard.

A3. -P (p∧-p)

Axioma A3 interzice contradicțiile logice. Dacă aplicăm la A3 regula extensionalității şi ținem seama de definiția D2, atunci A3 devine:

A3# *O (p∨-p)*.

Aceasta spune că principiul terțiului exclus sau, în general, legile din logica propozițiilor sau din logica predicatelor sunt obligatorii.

Dacă privim logica deontică ca o teorie despre norme juridice sau morale nu avem nici un temei pentru postularea interzicerii contradicțiilor logice sau pentru caracterul obligatoriu al legilor logice. Nici un vorbitor care încalcă într-un discurs public legile logicii nu este sancționat de vreun cod penal. Legile logicii nu sunt apărate de constanta lui Anderson sau de cea a lui Stig Kanger. Dar, indiferent de dezinteresul juriştilor față de legile logice, respectarea acestora este utilă şi legitimă în orice activitate umană, inclusiv în programele de inteligență artificială aplicate în drept.

Cerința de standardizare a sistemelor de logica modală aletică a apărut prin deceniul al patrulea şi, dacă nu greşim, ea a fost inițiată de către K. Gödel. Între altele, aceasta presupunea admiterea axiomei K, respectiv L (p⊃q) ⊃ (Lp ⊃ Lq), formulă care operează o modalizare a schemei de inferență *Modus Ponens*. Aceasta afirmă că dacă este necesară o implicație, atunci, dacă este necesar antecedentul acesteia, va fi necesar şi consecventul implicației.

A doua cerință de standardizare introdusă de Gödel a fost regula necesitării. K. Gödel a văzut în legile logicii expresia tipică a necesității. Prin regula necesitării Gödel a transformat tautologiile logicii propozițiilor în teoreme logic modale. Logica modală se supune regulii necesitării şi dacă logica deontică este o specie de modalitate, va trebui să se supună şi ea acestei reguli a necesitării.

A. R. Anderson a avut, în 1956, propria lui opțiune asupra logicii deontice standard. Şi el dorea într-un fel domesticirea şi adaptarea logicii deontice la canoanele logicii modale clasice. Logica modală aletică dispunea de mai multe sisteme axiomatice, exista o ierarhie a acestora şi peste puțin timp au apărut şi metode autonome de decizie. Disciplinele tinere, între care se înscria logica deontică, trebuiau să profite de experiența disciplinelor mai vechi.

Universitatea Spiru Haret

Pentru Anderson, obligaţia este necesitatea de a face ceva sau de a atinge o stare rezultat. *Obligaţia* este o conduită care neurmată întocmai conduce la S (sancţiune); dimpotrivă, *interdicţia* este necesitatea de a evita o conduită sau un rezultat. Interdicţia este o conduită care săvârşită conduce la S (sancţiune). *Permisiunea* este posibilitatea de a urma o conduită şi de a atinge o stare rezultat , fără a fi sancţionat. *Facultativul* sau nonobligatoriul exprimă situaţia în care este posibil să nu faci o acţiune şi să nu fii pedepsit pentru că ai omis executarea ei.

DA1. Op $=_{df} L (-p \supset S)$

DA2. Fp $=_{df} L (p \supset S)$

DA3 Pp $=_{df} M (p \wedge -S)$

DA4.-Op $=_{df} M (-p \wedge -S)$

Pe această cale obligaţia ca modalitate specifică este redusă la conceptul modal aletic de necesitate. Recrutul se supune regulilor cazarmei. Sintaxa este o instrucţie de front cu formulele. Tânăra ramură, logica deontică a intrat cuminte în rând; ea este o formă de necesitate aletică. Ştiinţa caută mereu deosebiri şi asemănări. Avem nevoie de puncte cardinale, dar şi de diferenţe specifice. În mintea cercetătorilor rămân tiparele şi structurile stadiilor anterioare ale ştiinţei. Aşa s-a păstrat din logica aristotelică structura pătratului logic, care descria raporturile dintre cele patru specii de judecăţi A,E,I şi O din logica aristotelică. Relaţiile dintre cele patru concepte deontice definite mai sus (vezi DA1-DA4) pot fi reprezentate prin pătratul logic din logica aristotelică astfel încât relaţiile de contrarietate, subcontrarietate, contradicţie şi subalternare să se păstreze şi în noua teorie modal deontică.

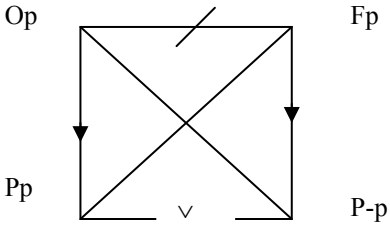


Fig. 1. Pătratul logico-deontic

Op şi Fp sunt între ele în raport de contrarietate, nu pot fi simultan adevărate. Nici o conduită într-un sistem raţional de norme nu poate fi în acelaşi timp şi obligatorie şi interzisă. Interdicţia şi

Universitatea Spiru Haret

permisiunea sunt între ele contradictorii. La fel, obligaţia şi conduita facultativă. La fel, Pp şi P-p sunt între ele în raport de subcontrarietate; nu pot fi simultan false. În sfârşit, pe laturile verticale între Op şi Pp şi între Fp şi P-p sau –Op vom avea relaţii de subalternare; cele de deasupra vor implica pe cele de din jos.

Cu 30 de ani în urmă am introdus în logica deontică monadică conceptele de coerciţiune şi de libertate. *Coerciţiunea* este de două feluri: *prescriptivă,* când agentului i se impune o conduită activă determinată, fiind lipsit de dreptul de a face altceva şi de dreptul de a rămâne pasiv. Aceasta este obligaţia şi neîndeplinirea ei este sancţionabilă, după cum se poate vedea din definiţia DA1. Cealaltă specie de coerciţiune este constrângerea *prohibitivă* sau interdicţia, când agentului nu i se permite să execute anumite conduite. De exemplu, nu este voie să fluieri în biserică, să fumezi în sala de operaţii etc. Putem, deci, introduce coerciţiunea ca un operator deontic derivat. Coerciţiunea este obligaţie sau interdicţie de a face ceva; o stavilă exterioară impusă voinţei tale libere.

În mod analog, putem defini, în logica deontică monadică conceptul de libertate a unui agent. Vom spune că un agent este *liber* întru-un sistem de norme în raport cu o conduită p sau cu rezultatul acesteia, dacă acţiunea în cauză nu-i este impusă nici ca obligaţie, nici ca interdicţie. Libertatea este o permisiune bilaterală, poţi să faci acea acţiune şi poţi şi să te abţii de la săvârşirea ei, fără a fi sancţionat.

DP5. $Cp =_{df} Op \vee Fp$

DP6. $Lp =_{df} Pp \wedge P\text{-}p$

Adăugând aceşti operatori deontici derivaţi la operatorii deontici „clasici" putem reprezenta cei 6 operatori deontici printr-un hexagon deontic:

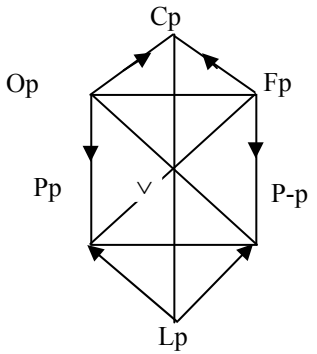


Fig. 2. Hexagonul deontic

Universitatea Spiru Haret

Libertatea şi coerciţiunea sunt concepte la poli opuşi. Între ele sunt raporturi de contradicţie. Figurile 1 şi 2 descriu un număr de teoreme derivabile în sistemele de logică deontică P, O şi sistemul de logică deontică standard. Săgeata din fig. 2 descrie implicaţii deontice sau legi logico-deontice pe care le vom scrie mai jos în două coloane:

1. Op ⊃ Cp	5. Lp ⊃ Pp∧P-p
2. Fp ⊃Cp	6. Op ⊃ -P-p
3. Op ⊃ Pp	7. P-p ⊃ -Op
4. Fp ⊃ P-p	8. -P-p ⊃ -Op
9. - (Op ∧ O-p)	11. -P-p ⊃ -Pp
10. -Pp ⊃ P-p	12. -P-p ⊃ -Fp
13. Pp ⊃ -Fp	14. Fp ⊃ -Pp
15. Lp ⊃ -Cp	16. Cp ⊃ -Lp

Tabelul 4. Teoreme ilustrate de hexagonul deontic.

Putem construi o reprezentare asamblistă pentru o formulă oarecare, desemnată, să zicem, prin variabila p, a tuturor determinărilor logico-deontice pe care aceasta o poate avea într-un sistem de norme dat.

Mai întâi, p poate fi obligatorie, interzisă sau liberă.

S17. Op ∨Fp ∨ Lp

Permisiunile pot fi de două feluri: permisiuni ce sunt în acelaşi timp obligaţii ale unui agent şi permisiuni ce reprezintă conduite libere pentru acesta.

S18. Pp ≡ Op ∨ Lp

Constrângerile sau coerciţiunile sunt şi ele, după cum am văzut, de două feluri: prescripţii sau *obligaţii* şi prohibiţii sau *interdicţii.* Obligaţiile îngrădesc dreptul agentului de a se abţine sau de a face altceva, iar interdicţiile îngrădesc dreptul agentului de a face sau întreprinde ceva.

S19. Cp ≡ Op ∨ Fp

S20 Cp ∨ Lp

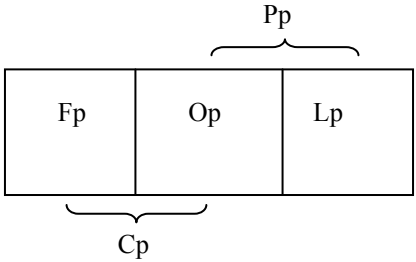


Fig. 3. Reprezentarea spaţială a operatorilor deontici

Universitatea Spiru Haret

Fig. 3 ilustrează teoremele S17 –S20 scrise mai sus şi teoremele 1- 3 din tabelul 4. Totodată, ea dă seama de statutul obligaţiilor ca permisiuni coercitive precum şi de incompatibilitatea mutuală a obligaţiei, interdicţiei şi libertăţii. Mai exact, una şi aceeaşi conduită sau stare accesibilă printr-o conduită nu poate fi la un moment dat, pentru un agent şi obligaţie şi interdicţie şi conduită liberă. Dacă este una, atunci nu mai poate fi nici una dintre celelalte două. Fig. 3 ilustrează teorema $Lp \supset Pp$, derivabilă imediat din teorema 5 din tabelul 4.

Logica deontică monadică este o analiză conceptuală abstractă a raporturilor dintre obligaţii, permisiuni, interdicţii, coerciţiuni şi libertăţi, în condiţiile în care au fost fixate agentul, situaţia sau momentul temporal, conduita sau starea rezultat. Variabilele p, q, r, s etc. stau pentru conduita sau starea rezultat a conduitei. Dar, în viaţa reală, obligaţiile, ca şi celelalte calificări normative, sunt relaţii sociale complexe între agenţi având poziţii sau statute sociale distincte, aplicabile în anumite situaţii date, sancţionate, în caz de nerespectare, prin acte îndreptate împotriva agenţilor devianţi.

Activităţile de normare şi aplicare a normelor angajează clase diferite de agenţi şi comportă mai multe etape distincte: elaborarea legii sau sistemului de norme; avizarea şi discutarea, verificarea consistenţei sale logice şi a constituţionalităţii legii, promulgarea legii, aplicarea legii, critica şi perfecţionarea sistemului de norme.

O normă particulară are un emitent, un adresant, o clasă de circumstanţe în care se aplică, o dispoziţie sau o comandă şi o sancţiune, în cazul în care adresantul nu-şi îndeplineşte conduita impusă de normă.

Logica deontică monadică, care dispune de o singură variabilă pentru conduită sau rezultatul conduitei şi desconsideră metodologic toate celelalte dimensiuni ale actului normativ (emitent, adresant, condiţie de aplicare, dată de începere, rezultat etc.) este un experiment conceptual ideal menit să clarifice relaţiile dintre cele cinci concepte normative menţionate mai sus.

3. **Limitele sistemelor de logică deontică**

Câteva cuvinte despre limitele sistemelor de logică deontică. Ea nu este aptă de aplicaţii efective cel puţin din trei motive:

L1. Marea majoritate a sistemelor de logică deontică sunt supraetajări ale logicii propoziţiilor şi nu beneficiază de puterea descriptivă a logicii predicatelor de ordinul întâi.

Universitatea Spiru Haret

L2. Marea majoritate sunt sisteme de logică monadică şi nu dau seama de agenţii ce fac uz de norme şi nici de condiţiile sau situaţiile în care se află aceştia.

L3. Teoriile logice deontice sunt transpuse în formă axiomatică şi nu sub forma unor baze de cunoştinţe tipizate, cum sunt formele normale, clauzele Horn.

L4. Pentru a face din logica deontică o disciplină aplicată avem nevoie de o mai bună teorie a acţiunii umane, de o teorie a situaţiilor în care se găsesc agenţii, de descrierea scopurilor asumate de către aceştia, precum şi a abilităţilor sau competenţei operaţionale a acestora. Mai mult, acest cadru conceptual, trebuie să poată descrie riguros sub raport semantic ce înseamnă că un agent H, aflat într-o situaţie C este obligat să atingă o stare generică B. Tranziţia de la C la B, redată de noi prin [C,B] poate fi săvârşită numai dacă agentul H poate executa o conduită u care facilitează trecerea din C în B. Conduita u devine un mijloc de trecere din situaţia generică C în situaţia generică B.

L5. Mai trebuie precizat, în contextul descris mai sus, dacă operatorul deontic O determină acţiunea u, starea ţintă C sau tranziţia [C, B].

L6. Trebuie să admitem că etichetarea normativă a unui domeniu de activitate umană este efectuată anterior şi că normele sunt promulgate şi cunoscute de către agenţi. În momentul conduitei efective, agentul a cărui activitate este normată ia o decizie proprie în privinţa conduitei pe care doreşte să o urmeze. El îşi poate respecta obligaţiile şi interdicţiile ce-i revin sau, dimpotrivă, poate opta pentru atingerea propriilor sale scopuri şi neglijarea prescripţiilor ce-i revin.

L7. Logica deontică nu poate neglija evaluarea din perspectiva sistemelor de norme a conduitei efective urmate de către agent, modelarea acţiunii judecătorului sau completului de judecată care, pe baza legilor în vigoare, dă o sentinţă judecătorească, care evaluează şi califică conduita şi-i asociază, conform legii, o sancţiune.

L8. Logica deontică este o metateorie formală a sistemelor de norme, care are nevoie de o teorie formală a acţiunii, mai detaliată, concretă cu clase distincte de agenţi, având poziţii şi statute determinate, cu circumstanţe riguros descrise, cu competenţe şi abilităţi, cu obligaţii şi interdicţii concrete, cu date şi durate ale acţiunilor etc.

Universitatea Spiru Haret

4. **Sistemele deontice monadice Smiley –Hanson şi conceptul de normalitate la L. Åqvist**

Profesorul de la Uppsala, Lennart Åqvist, a făcut eforturi remarcabile pentru racordarea sistemelor de logică deontică cu sistemele de logică modală anterior construite, pentru ierarhizarea şi organizarea lor şi pentru dotarea lor cu semantici de lumi posibile.

O caracteristică a acestor sisteme este demonstrarea unor teoreme cu functori deontici iterați.

Deschizători de drumuri în această direcție au fost A. N. Anderson în anii 60 şi, un deceniu mai târziu, T. J. Smiley şi W. H. Hanson. L. Åqvist prezintă 10 sisteme de logică deontică iscate din cercetările lui W. H. Hanson şi T. J. Smiley.

Limbajul acestor sisteme este şi el tipizat, sintactic, la mare distanță de practica juridică, politică şi morală. Abordarea este din perspectiva teoriei sistemelor axiomatice formale şi din perspectiva teoriei demonstrației. Prezentarea este unitară şi elegantă. O reproducem aici pentru valoarea ei intrinsecă, dar şi pentru puterea ei de provocare epistemică şi stimulare euristică.

Semnele primitive sau alfabetul limbajului este alcătuit din trei clase de semne: 1. O mulțime numărabilă de variabile propoziționale Prop; 2. O listă de conective logice primitive: T (adevărul), $\perp$ (falsul), O (obligația), P (permisiunea) – (negația) şi conectivele propoziționale binare: $\wedge$ (conjuncția), $\vee$ (disjuncția), $\supset$ (implicația), $\equiv$ (echivalența); 3. paranteze (,) ca semne de grupare.

Pe baza acestor specii de semne primitive defineşte cu ajutorul unor reguli de formare mulțimea *formulelor bine formate*. Setul L al tuturor propozițiilor limbajului este definit ca cel mai mic S astfel că :

a) Orice variabilă propozițională din Prop este în S;

b) T şi $\perp$ sunt în S;

c) Dacă A este în S, atunci –A, OA, PA vor fi şi ele în S;

d) Dacă A şi B sunt în S, atunci $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \equiv B$ vor fi, de asemenea în S;

Propozițiile de la a) şi b) sunt atomare; celelalte vor fi moleculare.

Aritatea sau gradele conectivelor logice: T şi $\perp$ sunt de aritate 0; -, O şi P sunt de aritate 1; $\wedge$ (conjuncția), $\vee$ (disjuncția), $\supset$ (implicația), $\equiv$ (echivalența) sunt de aritate 2.

Definiție.

$FA =_{df} –PA$ (sau alternativă O-A)

Universitatea Spiru Haret

Convenţii de omitere a parantezelor:
Conectivele de gradul 1 leagă mai tare decât cele de gradul 2;
Dintre cele de gradul 2, $\wedge$ şi $\vee$ leagă mai tare decât $\supset$ şi $\equiv$;
Parantezele exterioare pot fi omise.

Demonstraţia axiomatică va face uz în toate cele 10 sisteme Smiley-Hanson de logică deontică monadică de următoarele două reguli de inferenţă:

R1. A, A $\supset$ B $\vdash$ B *Modus Ponens*, MP

R2. A $\vdash$ OA Dacă A este lege logică, atunci OA este lege logică deontică. *Regula necesităţii deontice*.

Introducem acum cele 8 axiome A0-A7, care permit delimitarea celor 10 sisteme deontice:

(A0) Toate tautologiile logicii propoziţiilor sunt acceptate ca axiome

(A1) $Pp \equiv O\text{-}p$
(A2) $O(p \supset q) \supset (Op \supset Oq)$
(A3) $Op \supset Pp$
(A4) $Op \supset OOp$
(A5) $POp \supset Op$
(A6) $O(Op \supset p)$
(A7) $O(POp \supset p)$

Axiomele A4-A7 sunt axiome cu operatori deontici iteraţi.

Cele 10 sisteme logice sunt desemnate de L. Åqvist prin simbolurile: OK, OM, OS4, OB, OS5, OK^+, OM^+, $OS4^+$, OB^+, $OS5^+$.

Definiţia primelor cinci sisteme este următoarea:
OK = [A0,A1,A2,R1,R2]
OM = [A0-A2,A6,R1,R2]
OS4 = [A0-A2,A4,A6,R1,R2]
OB = [A0-A2,A6,A7, R1,R2]
OS5 = [A0-A2,A4,A5,R1,R2]

Fie L oricare dintre primele 5 sisteme definite mai sus. Atunci:
L^+ = [L , A3]. Pe baza acestei reguli:
OK^+ = [A0,A1,A2,A3,R1,R2]
OM^+ = [A0-A2,A3, A6,R1,R2] etc.

Sistemele marcate prin steluţă$^+$, respectiv sistemele 6-10 se obţin, corespunzător, din primele cinci sisteme prin păstrarea axiomelor sistemului în cauză şi prin adăugarea la acestea a axiomei A3. Aceasta pretinde ca orice obligaţie pe care o are un agent să-i fie permisă.

Universitatea Spiru Haret

Axioma A3 coincide cu formula 1 din tabelul 4. În fond, aceasta reclamă consistența mutuală a constrângerilor impuse de un sistem de norme. Ea coincide cu una din axiomele sistemului fondat de von Wright (sau cu duala acestuia). La nivel modal clasic, A3 coincide cu teorema Lp ⊃ Mp, care afirmă că tot ce este necesar este posibil. La nivel deontic, A3 afirmă că tot ce e obligatoriu este permis. Un agent executant nu poate fi obligat să execute o acțiune ce-i este interzisă.

Obligația este o relație socială dintre agenți colectivi sau individuali, dintre organizații sau instituții (agenți colectivi) şi agenți individuali. În spatele obligației este o relație de putere. Cel ce-l obligă pe cineva are putere şi control asupra celui pe care-l obligă. Obligația ca relație socială reală presupune în mod necesar un agent imperator ce obligă şi un supus ce este obligat. Mai presupune, de regulă, *situații* sau *circumstanțe* în care cineva este obligat să facă ceva şi *acte* sau *stări rezultat* la care supusul este obligat să ajungă. Op este un operator idealizat, „degenerat" prin abstractizare din relații sociale complexe de forma: O (X,Y,C, B) = „Agentul colectiv X îl obligă pe agentul colectiv Y să se comporte astfel în situația C încât să devină adevărat , peste un interval de timp, starea sau faptul B. Variabila propozițională p din formula monadică Op coincide sau ține loc variabilei B din formula cu patru argumente O (X,Y,C, B).

Este important să facem distincție dintre o conceptualizare în care p şi respectiv B stau pentru stări sau rezultate ale unor acțiuni şi situația în care p sau B stau pentru acte sau conduite acționale. Aceste distincții au fost operate de noi încă la nivelul anilor 80' şi nu găsim potrivit să le reluăm în lucrarea de față.

Acceptând presupozițiile făcute de profesorul L Åqvist în studiul său şi aderând la nevoia de a extinde analizele inițiate de către von Wright şi Anderson prin cercetările lui T. J. Smiley şi W. H. Hanson, vom face, în continuare, câteva considerații despre fiecare dintre cele 10 sisteme de logică deontică.

4.1. *Sistemul OK*

Acesta reprezintă o tălmăcire deontic monadică a sistemului modal aletic K prezentat de noi mai sus în capitolul VI.

Axioma A1 definește permisiunea ca non interdicție. La rândul ei, interdicția este obligația de a nu face ceva sau nepermisiunea de a face ceva:

D1. $Fp =_{df} O\text{-}p$ sau $Fp =_{df} \text{-}Pp$

Universitatea Spiru Haret

Axioma A2 este o deontizare a schemei de inferență *Modus Ponens*. Ea coincide cu axioma sistemului modal K prezentat în capitolul 6.

Regulile de inferență ale lui OK sunt R1 şi R2, respectiv *Modus Ponens* şi *necesitarea.*

Sistemul OK satisface sintactic teoremele K1 –K9 din capitolul 6 consacrat logicilor modale. Dacă vom înlocui în acestea L prin O şi M prin P, vom obține teoreme ale sistemului OK de logică deontică monadică de tip Smiley-Hanson, primul sistem din cele enumerate de către L. Åqvist.

Transpunem sub forma unui tabel cu două coloane teoremele sistemului OK astfel obținute. Prima coloană descrie implicații; cea de a doua echivalențe.

OK1 O (p ∧ q) ⊃ (Op ∧ Oq)	OK3 O (p∧ q) ≡ (Op∧Oq)
OK2 (Op∧Oq) ⊃ O (p∧q)	OK5. Op≡ -P-p
OK4 (Op ∨ Oq) ⊃O (p∨ q)	OK6 P (p∨q) ≡ (Pp∨Pq)
OK7 P (p ⊃ q)⊃ (Op ⊃ Pq)	
OK8. P (p∧ q) ⊃ (Pp ∧ Pq)	

Tabelul 5. Teoreme ale sistemului OK obținute prin interpretarea deontică a sistemului aletic K

În sistemul OK sunt demonstrabile următoarele scheme sau reguli de inferență:

R3. A ⊃ B ├ OA ⊃ OB (DR1)
R4. A ≡ B ├ OA ≡ OB
R5. A ⊃ B ├ PA ⊃ PB
R6. A ≡ B ├ PA ≡ PB

Aplicând regula R5 la implicațiile din tabelul 5 obținem noi teoreme de forma:

OK1 PO (p ∧ q) ⊃ P (Op ∧ Oq)
OK2 P (Op∧Oq) ⊃ PO (p∧q)
OK4 P (Op ∨ Oq) ⊃ PO (p∨ q)
OK7 PP (p ⊃ q) ⊃ P (Op ⊃ Pq)
OK8. PP (p ∧ q) ⊃ P (Pp ∧ Pq)
OK9. PO (p∨q) ⊃ P (Op∨ Pq)

Tabelul 6 Teoreme obținute prin regula R5

Universitatea Spiru Haret

Teoremele din tabelul 6 sunt teoreme cu operatori deontici iterați. Este legitim să ne întrebăm ce înseamnă în sistemul OK formulele POp şi PPp.? Când îi este unui agent, într-un context ierarhic normativ, *permis să oblige* pe cineva la o acțiune dată sau *permis să permită* cuiva să întreprindă o anumită acțiune?

Dacă un agent acordă altui agent permisiunea de a obliga pe altcineva, pe un subordonat de al său, înseamnă că acesta transferă o parte din puterea sau competența sa imperativă altui agent mărindu-i acestuia puterea asupra subordonaților săi direcți sau libertatea de a-i coordona.

La fel, putem să ne întrebăm ce semnificație are, din punct de vedere ierarhic inversarea ordinii operatorilor iterați, respectiv *obligația de a permite* cuiva să întreprindă o anumită acțiune, respectiv OPp. (Aceasta poate fi obținută, sub raport sintactic, prin aplicarea regulii R3 asupra unor formule prefixate de operatorul P).

Când un agent superior impune unui subordonat de-al său obligația de a permite propriilor săi subordonați anumite conduite le extinde acestora spațiul de conduite libere şi restrânge corespunzător şefului lor direct dreptul de a menține anumite interdicții.

Teoria operatorilor deontici iterați este legată de teoria distribuirii competenților imperative şi a puterii într-o structură politică sau administrativă.

La fel, putem să ne întrebăm ce înseamnă pentru cineva care are un anumit statut că este *permis să fie obligat* (de către altcineva) să facă ceva sau invers că este obligat să permită cuiva să facă ceva?

Echivalențele din coloana a doua a tabelului 5 sau echivalențele din sistemele P sau O sau din logica deontică standard pot fi prelucrate prin schemele de inferență R4 şi R6. Utilizarea acestora va conduce şi ea la formule cu operatori deontici iterați, interzişi odinioară de von Wright. Astăzi putem ridica, fără riscuri, această interdicție, dacă vom construi pentru interpretarea acestora interpretări semantice adecvate şi explicații filosofice adecvate.

Ilustrăm demonstrarea unor teoreme din OK, pe mai multe căi.

Pentru început, vom arăta cum putem obține teoreme în OK pornind de la teoremele logicii propozițiilor.

Fie punctul nostru de plecare tautologia: $(p \wedge q) \supset p$

$T_{OK}1$ $O(p \wedge q) \supset Op$

1. $(p \wedge q) \supset p$	(LP)
2. $O((p \wedge q) \supset p)$	(Nec în O, aplicată la 1)
$O((p \wedge q) \supset p) \supset (O(p \wedge q) \supset Op)$	(RS, A2)

Universitatea Spiru Haret

O (p∧q) ⊃ Op (MP, 4,2)

Din $T_{OK}1$ putem obține prin schema de inferență R5 dată mai sus teorema:

$T_{OK}2$ *PO (p∧ q) ⊃ POp* (R5, $T_{OK}1$)

care este o teoremă cu operatori deontici iterați. Formulele cu astfel de operatori nu sunt bine formate în sistemele deontice wrightiene şi nici în cele standard în sensul definit de Hilpinen sau alți logicieni.

Să pornim pentru $T_{OK}3$ de la axioma lui G.Frege:

1. (p⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r))

Aplicăm la 1. regula necesitării în O. Obținem:

2. O[(p⊃ (q ⊃ r)) ⊃ ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r))]

Făcând o instanțiere adecvată în axioma A2 şi aplicând regula derivată R3 obținem:

3. O (p⊃ (q ⊃ r)) ⊃ O ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r))

O instanțiere similară construim pe baza lui A2 şi pentru consecventul lui 3 şi obținem:

4. O ((p ⊃q) ⊃ (p ⊃r)) ⊃ (O (p ⊃q) ⊃ O (p ⊃r))

Din 3 şi din 4 se obține prin tranzitivitate:

5. O (p⊃ (q ⊃ r)) ⊃ (O (p ⊃q) ⊃ O (p ⊃r))

Formula 5 este o nouă teoremă pe care o vom numerota ca $T_{OK}3$

$T_{OK}3$ *O (p⊃ (q ⊃r)) ⊃ (O (p ⊃q) ⊃ O (p ⊃r))*

Să dezvoltăm acum unele teoreme pornind de la A1:

1.Pp ≡ -O-p (A1)

2.-Pp ≡ --O-p (LP, 1)

3. -Pp ≡ O-p (Legea dublei negații la 2)

4. Fp ≡ O-p (RE, 3, D1 Fp $=_{df}$ O-p)

Formula 4 este o nouă teoremă, $T_{OK}4$ care spune că interdicția de a face ceva este tot una cu obligația de a evita acel lucru.

$T_{OK}4$ Fp ≡ O-p

Pe baza teoremei $T_{OK}4$ putem demonstra echivalența:

$T_{OK}5$. *F (Op∧-p) ≡ O (Op ⊃p)*

Fp ≡ O-p

F (Op∧-p) ≡ O- (Op∧-p) (RS, 1)

F (Op∧-p) ≡ O (-Op∨ --p) (De Morgan, 2)

F (Op∧-p) ≡ O (Op ⊃ p) (LP, 3)

Teorema $T_{OK}5$. susține că afirmația că este interzis ca cineva să fie obligat de a face p şi a se realiza –p este tot una cu obligația că dacă cineva este obligat să facă p, atunci p trebuie să fie adevărat.

Universitatea Spiru Haret

A se observa că termenul al doilea al echivalenței din $T_{OK}5$ coincide cu axioma A6

Exerciții

1. Demonstrați noi teoreme în sistemul deontic cu operatori iterați OK: a) pornind de la tautologiile logicii propozițiilor; b) pornind de la axioma A1; c) pornind de la A2 şi aplicând regulile R1-R6

Aplicați regulile R3 şi R5 asupra formulelor OK2,OK4 şi OK7 pentru a demonstra teoreme cu operatori deontici iterați şi interpretați semantic formulele obținute.

Construiți pentru fiecare din ele exemple adecvate din domeniul relațiilor ierarhice politico-administrative, militare şi economice.

Interpretați logic-modal teoria structurilor ierarhice în sistemele democratice.

Interpretați logic deontic conceptul de angajament al unui agent de a face o faptă oarecare.

Interpretați logic deontic relațiile de promisiune şi de amenințare.

Interpretați logic deontic relațiile contractuale din dreptul civil şi din codul familiei.

4.2. *Sistemul OM*

Să se obțină din sistemul OK prin adăugarea axiomei A6:

A6. O (Op ⊃ p)

Tălmăcim pe A6 prin propoziția metateoretică: „Este obligatoriu ca obligațiile într-un sistem de norme să fie îndeplinite.” Adăugarea la OK a unei astfel de axiome conferă sistemului OM un grad înalt de idealitate: admiterea supoziției că prescripțiile unui sistem de norme sunt obligatorii şi vor fi respectate. Dar lumea reală nu este o lume deontică perfectă în care toți agenții executanți îşi respectă, fără abatere, obligațiile şi interdicțiile ce le revin.

Admitem de dragul analizei această axiomă şi derivăm din ea câteva teoreme.

$T_{OM}1$. OOp ⊃ Op

1) O (Op ⊃ p) ⊃ (OOp⊃Op) (RS, A2)
2) O (Op ⊃ p) (A6)
3) OOp ⊃ Op (R1sau MP,1), 2*)*

$T_{OM}2$ Pp ⊃PPp

1) OOp ⊃ Op
2) OO-p ⊃ O-p (RS, 1))
3) -O-p ⊃ -OO-p (LP, 2))
4) Pp⊃PPp (RE, Interch, 3)

Universitatea Spiru Haret

$T_{OM}1$ afirmă că obligația de a fi obligat să faci ceva implică obligația de a face acel lucru. $T_{OM}2$ afirmă că permisiunea de a face ceva implică permisiunea permisiunii de a face.

Să ne imaginăm că avem de a face cu agenți situați pe niveluri ierarhice diferite. Atunci O (x, O (y, p)) ⊃ O (y, p) ar putea fi interpretată ca propoziția: Dacă x este obligat să-l oblige pe y să facă p, atunci y este obligat să facă p. La fel dacă x este superiorul lui y şi îi este permis lui y să facă p, atunci x îngăduie permisiunea lui y de a face p, respectiv este adevărată propoziția condițională :

P (y,p) ⊃ P (x, P (y, p))

Exerciții

Să se demonstreze în OM regulile de inferență R3-R6 pornind de la demonstrațiile similare din capitolul VI.

2. Să se utilizeze regulile R3-R6 pentru demonstrarea unor noi teoreme în sistemul OM. Să se demonstreze, de exemplu, că *OOOp ⊃ OOp* şi că *OPp ⊃ OPPp*

4.3. *Sistemul OS4*

Acesta se obține din sistemul OM prin adăugarea axiomei A4:

A4. Op ⊃ OOp

Axioma A4 este similară axiomei specifice din sistemul aletic S4. Este legitim să ne întrebăm dacă vor interveni şi aici reguli de reducere similare celor cercetate în logica modal aletică. (vezi regulile R3 şi R4 din capitolul 6 pag 262). Dar pentru a putea demonstra într-o manieră similară ca în S4 o teoremă de forma OOp ≡ Op, ar trebui să avem, mai întâi, o teoremă similară axiomei specifice sistemului T, Lp ⊃ p, respectiv Op ⊃ p, ceea ce ar însemna că toate obligațiile sunt întotdeauna şi înfăptuite.

Dar, este posibilă demonstrarea unor echivalențe de reducere pe o altă cale. Iată cum. Mai întâi, am demonstrat în OM teorema $T_{OM}1$ OOp ⊃ Op. Din aceasta şi din axioma specifică lui OS4, respectiv din A4, Op ⊃ OOp se obține, pe baza regulilor logicii propozițiilor, echivalența:

RR1 OOp ≡ Op.

Mai departe, din axioma specifică lui OS4, putem demonstra PPp ⊃ Pp. Într-adevăr:

PPp ⊃ Pp

1) Op ⊃ OOp (A4)

2) O-p ⊃ OO-p (RS, 1)

Universitatea Spiru Haret

3) -Pp ⊃ -PPp (P1,RE, 2)
4) PPp ⊃ Pp (LP, contrapoz, 3)

În sfârşit, din această teoremă şi din teorema TOM2, Pp ⊃ PPp din sistemul OM presupus de sistemul SO4 rezultă echivalența:

RR2 PPp ≡ Pp

Obținem astfel în logica deontică de tip OS4 două reguli de reducere RR1 şi RR2 care permit reducerea unor operatori iterați de acelaşi fel.

4.4. *Sistemul OB*

Acesta se obține prin adăugarea la axiomele lui OM a axiomei A7.

A7. *O (POp ⊃ p)*

În interpretarea noastră axioma A7 afirmă că obligațiile permise sau legale într-un sistem de norme trebuiesc îndeplinite de către adresanții lor. Axioma A6 afirma doar că este obligatoriu ca obligațiile dintr-un sistem de norme să fie îndeplinite. Noua axiomă adaugă o nuanță suplimentară. Ea spune că obligațiile *permise sau legale* dintr-un sistem de norme trebuiesc îndeplinite. Dar obligațiile permise sau legale dintr-un sistem de norme sunt tot obligații şi în consecință trebuie îndeplinite.

Putem demonstra în OB teoremele:

$T_{OB}1$. *OPOp ⊃ Op*

1. O (POp ⊃ p) (A7)
O (POp ⊃ p) ⊃ (OPOp ⊃ Op) (RS, axioma specifică lui K)
OPOp ⊃ Op (MP,2,1)

Să interpretăm într-un sistem ierarhic ternar cu patru trepte ierarhice teorema de mai sus. Dacă un agent superior y este obligat de un şef al său x să permită unui subordonat al său z să oblige pe un subordonat de al său u să facă p, atunci u este obligat de z să facă p.

Formula ce corespunde propoziției de mai sus este:

O (x,y, (P (y, z, (O (z,u, p)))) ⊃ O (z,u,p)

Desigur, putem lua în considerare şi interpretarea activă, când un agent x obligă pe altul y să permită unui al treilea z să oblige pe un al patrulea u să facă p.

Legarea logicii deontice cu operatori iterați de teoria sistemelor ierarhice reprezentate prin grafuri deschide, credem, o nouă perspectivă în logica deontică şi în aplicațiile ei.

Dar să ne menținem, deocamdată, în limitele supozițiilor acceptate de creatorii acestor 10 sisteme definite mai sus şi să demonstrăm alte câteva teoreme.

Universitatea Spiru Haret

Cum sistemul OB este întemeiat pe OM şi cum în OM este valabilă schema de inferență R5, putem aplica regula R5 la $T_{OB}1$ şi obține teorema:

$T_{OB}2$ $POPOp \supset POp$

Pe de altă parte din $T_{OB}1$ putem obține ca teoremă

$T_{OB}3$ $Pp \supset POPp$.

Textul demonstrativ pentru aceasta este*:*

1. $OPOp \supset Op$	($T_{OB}1$)
2. $OPO\text{-}p \supset O\text{-}p$	(RS,1)
3. $\text{-}O\text{-}p \supset \text{-}OPO\text{-}p$	(LP, 2)
4. $Pp \supset POPp$	(Interch, OP)

Dacă este permis p, atunci este permis ca cineva să oblige pe altcineva să permită înfăptuirea lui p. Orice permisiune trebuie să fie garantată prin îngăduirea unei obligații care o face posibilă. Cu alte cuvinte, permisiunile în logica deontică brouweriană sunt asigurate prin îngăduirea unor obligații care le fac posibile. Cel puțin, în acest mod putem noi înțelege teorema $T_{OB}3$.

$T_{OB}4$. $(OOp \vee OPOp) \supset Op$

1.$OOp \supset Op$	(TOM1)
2. $OPOp \supset Op$	($T_{OB}1$)
3. $(OOp \vee OPOp) \supset Op$	(LP, 1,2)

4.5. *Sistemul OS5*

Poate fi obținut din OK prin adăugarea axiomelor A4 şi A5, regulile de inferență rămânând aceleaşi, R1 şi R2 ca reguli inițiale şi R3-R6 ca reguli derivate. În afară de acestea, vor putea fi demonstrate unele reguli de reducție.

Axiomele lui OS5 sunt:

A0 Tautologiile logicii propozițiilor

A1. $Pp \equiv \text{-}O\text{-}p$

A2.$O (p \supset q) \supset (Op \supset Oq)$

A4. $Op \supset OOp$

A5 $POp \supset Op$

Axioma specifică a lui OS5 este A5. Ea este o axiomă cu functori deontici iterați diferiți. În ea se afirmă că dacă este permis cuiva să oblige pe altcineva la p, atunci p este obligatoriu pentru acea persoană.

Demonstrăm câteva teoreme în OS5

Universitatea Spiru Haret

$T_{OS5}1$. $Pp \supset OPp$
1. $POp \supset Op$ (A5)
2. $PO\text{-}p \supset O\text{-}p$ (RS, 1)
3. $\text{-}O\text{-}p \supset \text{-}PO\text{-}p$ (LP, 2)
$Pp \supset OPp$

$T_{OS5}1$ este duala lui A5 şi ea afirmă că permisiunile în OS5 sunt obligatorii să fie permise sunt garantate de sistemul normativ, aşa cum drepturile, care sunt tot un fel de permisiuni, convenabile sau avantajoase cuiva, sunt garantate de sistemele de norme.

$T_{OS5}2$. $POp \supset OOp$ (Tranz, A5, A4)

Profesorul Lennart Åqvist afirmă că axiomele A6 şi A7 din lista prezentată la inceputul subcapitolului 4 din capitolul de faţă sunt demonstrabile în OS5. În ceea ce ne priveşte nu am reuşit să construim un text demonstrativ pentru acestea. Menţionăm că L. Åqvist nu a dat în lucrarea sa citată demonstraţia nici unei teoreme din cele 10 sisteme menţionate mai sus şi că noi nu deţinem lucrările clasice citate ale lui W. H. Hanson şi T. J. Smiley. Teoremele date mai sus sunt o reconstituire grăbită propusă de noi pentru tezele sistemelor Smiley-Hanson.

În viziunea noastră :

Axioma A6 $O\ (Op \supset p)$

este lesne derivabilă într-un sistem logic-deontic inspirat de sistemul aletic T, pe care l-am putea nota prin OT:

$OT = OK + AxOT$

$AxOT = Op \supset p$

Se vor menţine în sistem R1 şi R2 şi desigur, regulile derivate R3-R6.

Dar nici un logician deontician nu a îndrăznit să propună un astfel de sistem contraintuitiv. AxOT spune că dacă ceva este obligatoriu, atunci este şi înfăptuit. Această axiomă are un grad înalt de idealitate şi contravine experienţei cotidiene. Ea descrie lumi deontice perfecte, lumi paradisiace în care toţi agenţii îşi îndeplinesc, fără reproş, toate prescripţiile ce le revin, adică fac tot ce trebuie să facă şi evită tot ce le este interzis să facă.

Axioma A6 este demonstrabilă printr-un singur pas din AxOT prin aplicarea lui R2 sau a regulii necesitării deontice. Întradevăr :

(A6) $O\ (Op \supset p)$
1.$Op \supset p$ (AxOT)
2.$O\ (Op \supset p)$ (R2 , 1 sau *Nec* în O la 1)

Universitatea Spiru Haret

Din sistemul OT este lesne derivabilă axioma A3 din lista inițială de axiome reprodusă după L. Åqvist. Pentru aceasta va trebui să demonstrăm mai întâi duala axiomei OK:

$T_{OT}1.\ p \supset Pp$

care ar putea fi interpretată: „Orice stare de fapt este permisă" În această interpretare formulele de logica propozițiilor vor descrie acțiuni umane sau stări rezultate din acțiuni umane şi nu stări posibile oarecare. Din faptul că o execută un agent deontic perfect ce-şi respectă toate îndatoririle, toate conduitele sale sau stările rezultate din conduitele sale vor fi acte sau stări permise, legale.

Din AxOT şi $T_{OK}1$ rezultă prin regula tranzitivității:

A3.$Op \supset Pp$

1. $Op \supset p$	(AxOT)
2. $p \supset Pp$	($T_{OK}1$)
3. $Op \supset Pp$	(Tranz, 1, 2)

După cum am remarcat mai sus, A3 este axioma consistenței deontice a prescripțiilor unui sistem de norme. Dar, din punct de vedere formal-axiomatic ea este axioma care permite trecerea de la sistemele OK,OM, OB,OS4 şi OS5 la sistemele OK^+,OM^+, OB^+,$OS4^+$ şi $OS5^+$.

Din AxOT pot fi demonstrate uşor alte două teoreme din OS5 şi anume teoremele:

$T_{OT}2$ $OPp \supset Pp$	(RS, AxOT, p / Pp)
$T_{OT}3$. $Op \supset POp$	(RS, $T_{OT}1$, p/Op)

teoreme care participă la demonstrarea regulilor de reducere din OS5 întemeiat pe axioma OT.

RR3 $Pp \equiv OPp$

RR4 $Op \equiv POp$

Iată demonstrația celor două reguli de reducere, dacă admitem axioma OT.

RR3 $Pp \equiv OPp$

1. $Pp \supset OPp$	($T_{OS5}1$)
2. $OPp \supset Pp$	($T_{OT}2$)
3. $Pp \equiv OPp$	(LP, 1,2)

RR4 $Op \equiv POp$

$Op \supset POp$	($T_{OT}3$)
$POp \supset Op$	(A5)
3. $Op \equiv POp$	(LP, 1,2)

Universitatea Spiru Haret

Ce spun cele două reguli de reducere? Mai întâi, prima regulă, RR1, spune că permisiunile în sistemul OS5 sunt permisiuni obligatorii a fi permise. Într-un fel , putem spune, mai liber, că sunt permisiuni „garantate" de obligaţiile pe care le postulează sistemul.

Cea de a doua regulă ne spune că, la rândul lor, obligaţiile în OS5 sunt obligaţii permise sau îngăduite de sistem şi că permisiunile de a obliga generează obligaţii pur şi simplu.

Ca şi în sistemele modale aletice, în sistemul OS5 este derivabilă ca teoremă axioma specifică a sistemului OS4:

A4 $Op \supset OOp$

1. $p \supset Pp$ ($T_{OT}1$)
2. $Op \supset POp$ (RS, 1, p/Op)
3. $Pp \equiv OPp$ (RR1)
4. $POp \equiv OPOp$ (RS, 3, p/Op)
5. $Op \supset OPOp$ (Tranz, 2, 4)
6. $Op \equiv POp$ (RR2)
7. $Op \supset OOp$ (RE, 5,Eq, 6)

Demonstraţia de mai sus ne arată că în sistemul OS5 este derivabilă axioma specifică sistemului OS4. Dacă la acest fapt adăugăm faptul că în ambele sunt valabile aceleaşi reguli de inferenţă R1 şi R2, respectiv *Modus Ponens* şi *regula necesităţii* în O, atunci pe baza acestora putem întemeia metateorema:

Metateoremă: *Sistemul SO5 conţine sistemul OS4*.

Mai departe, putem lesne arăta sistemul OS4 conţine sistemul OT, dacă admitem o axiomă contraintuitivă ca AxOT.

La rândul lui, sistemul OT conţine sistemul OM, căci, după cum am văzut, axioma specifică a acestuia este derivabilă din OT. Sistemul OK este conţinut în OM şi desigur în OT.

Din sistemul OT derivă, după cum am văzut din demonstraţia teoremei A3 de mai sus, sistemul deontic D sau „OD".

Întrucât sistemul OS5 conţine pe OS4 şi în OS4 am demonstrat regulile de reducţie:

$RO_{S4}1$ $OOp \equiv Op$.

$RO_{S4}2$ $PPp \equiv Pp$

Sistemul OS5 va beneficia de 4 reguli de reducţie: RR1, RR2 şi $RO_{S4}1$ şi $RO_{S4}2$.

Până acum a rămas nedemonstrată în OS5 axioma A7 din lista iniţială a lui L. Åqvist (vezi pag. 285).Să construim şi pentru aceasta un text demonstrativ.

Universitatea Spiru Haret

O (POp ⊃ p)	(A7)
POp ⊃ Op	(A5)
Op ⊃ p	(Ax OT)
POp ⊃ p	(Tranz, 1, 2)
O (POp ⊃ p)	(R2, Nec, 3)

Pe baza definițiilor lui L. Åqvist (vezi pag. 285, respectiv pag 666 în originalul lui Åqvist) putem defini sistemul deontic brouwerian OB:

OB = OK + A6, A7

Din această perspectivă sistemul brouwerian OB conține sistemul propus de noi OT, şi este conținut în OS5, căci una dintre axiomele sale specifice A7 poate fi demonstrată numai în OS5 făcând uz de A5.

Teoremele demonstrate mai sus ne îndreptățesc să conchidem asupra existenței a 12 sisteme logico-deontice cu operatori iterați. La cele 10 Smiley-Hanson cercetate de L. Åqvist adăugăm sistemele OT şi OT^+. Mai mult, putem reprezenta relațiile dintre aceste 12 sisteme deontice prin graful din figura 4.

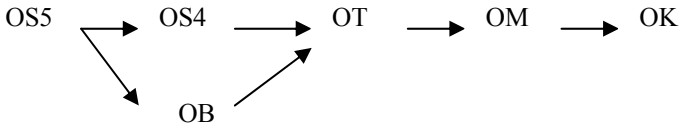


Fig. 4 Reprezentarea sistemelor deontice cu operatori iterați

Fiecare săgeată din Fig. 4 descrie o metateoremă care precizează relațiile dintre două sisteme.

Fie OSi oricare dintre cele 6 sisteme reprezentate în graf. Atunci conform convenției de notare adoptate de către L. Åqvist vom desemna prin OSi^+ sistemul OSi îmbogățit prin adăugarea axiomei A3, Op ⊃ Pp.

De aici rezultă că pentru orice sistem i, $6 \geq i \geq 1$:

$OSi^+ \longrightarrow OSi$ (R7)

Un sistem OSi^+ este mai tare decât un sistem Osi şi-l presupune sau implică logic pe acesta.

Un graf analog cu cel din Fig.4 putem construi pentru cele 6 sisteme OSi^+: $OS5^+$, $OS4^+$, OT^+,OM^+, OK^+ şi OB^+.

Universitatea Spiru Haret

5. **Demonstrabilitate şi consistență**

Profesorul Lennart Åqvist a definit pentru cele 10 sisteme Smiley-Hanson conceptele demonstrabilitate şi consistență. Fie L oricare dintre cele 12 sisteme descrise mai sus. Atunci mulțimea propozițiilor *L-demonstrabile* sau a teoremelor este cel mai mic set S $\subseteq \Sigma$ astfel că: 1). Orice instanțiere a unei scheme de axiomă din L va aparține lui S; 2). S este închis față de regulile R1 şi R2 (*Modus Ponens* şi Nec) şi față de regulile derivate R3-R6. Demonstrabilitatea este derivare sau deducere din axiome prin reguli de inferențe inițiale sau derivate.

Vom nota prin $\vdash_L A$ faptul că A este *L-demonstrabil* , respectiv demonstrabil în sistemul L. Similar, un set de propoziții S va fi *L-inconsistent*, dacă şi numai dacă, există în S o mulțime de propoziții $B_1,\ldots,B_n$ cu $n \geq 1$ astfel încât $\vdash_L (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow \perp$. Altfel spus, un set de propoziții este L-inconsistent dacă se poate deriva din el o contradicție logică. In caz contrar, setul în cauză va fi *L-consistent*.

Mai departe, vom spune că o propoziție A este *L-derivabilă dintr-un set S de propoziții*, în simboluri $S \vdash_L A$, dacă şi numai dacă,

$S \cup \{-A\}$ este L- inconsistent. În mod evident, $\vdash_L A$, dacă şi numai dacă, $\phi \vdash_L A$, respectiv vor fi propoziții L-derivabile doar acele propoziții care sunt derivabile din mulțimea vidă de ipoteze.

6. **Semantica sistemelor deontice Smiley-Hanson**

O teorie semantică atribuie semnificații într-un domeniu de obiecte oarecare simbolurilor primitive din alfabetul unui limbaj formal şi, pe baza acestora, tuturor formulelor bine formate în limbaj. Conceptul central într-o teorie semantică este cel de model.

Un *model* este o tripletă de obiecte $M = < W,R,V >$ unde:

W este o mulțime de stări sau lumi posibile;

$R \subseteq W \times W$ este o relație binară definită pe W numită relație de alternativitate;

V este o atribuire de valori prin care se asociază o valoare de adevăr de 1 sau 0 oricărei perechi ordonate < p, w >, unde p este o variabilă propozițională iar w este o stare sau lume posibilă din W. Tehnic, V este definit pe produsul cartezian: Prop × W cu valori în mulțimea $\{1,0\}$. Prop stă pentru mulțimea propozițiilor.

Universitatea Spiru Haret

Definiția modelului este o definiție recursivă dată pe „lungimea" sau modul de formare al propoziției de referință A.

Conceptul de adevăr în semantica logicilor modale este introdus ca un predicat binar. O propoziție este adevărată sau falsă într-un *model* dat şi într-o *situație* sau lume posibilă dată. Vom nota aceasta prin exprimarea prescurtată: M, w $\models$ A, care se citeşte: „Propoziția A este adevărată în situația sau lumea posibilă w din modelul M".

Dăm mai jos condițiile de adevăr pentru principalele tipuri de propoziții din sistemele deontice Smiley-Hanson.

M, w $\models$ p $\Leftrightarrow$ V (p,w) = 1 pentru o variabilă propoz. p din Prop;

M, w $\models$ T (Tautologiile sunt adevărate în orice situație)

Nu M, w $\models \perp$ (Contradicția nu este adevărată nici într-un model şi nici într-o situație);

M, w $\models$ -A $\Leftrightarrow$ Nu are loc: M, w $\models$ A;

M, w $\models$ OA $\Leftrightarrow$ Dacă pentru *orice* v din W astfel că R (w,v) are loc: M, v $\models$ A;

M, w $\models$ PA $\Leftrightarrow$ Dacă pentru *o* v din W astfel că R (w,v) are loc: M, v $\models$ A;

M, w $\models$ (A $\wedge$ B) $\Leftrightarrow$ M, w $\models$ A şi M, w $\models$ B;

M, w $\models$ (A $\vee$ B) $\Leftrightarrow$ M, w $\models$ A sau M, w $\models$ B;

M, w $\models$ (A $\supset$ B) $\Leftrightarrow$ M, w $\models$ -A sau M, w $\models$ B;

M, w $\models$ (A $\equiv$ B) $\Leftrightarrow$ M, w $\models$ A $\Leftrightarrow$ M, w $\models$ B;

Convenție: Citim simbolul $\Leftrightarrow$ dacă şi numai dacă.

Observații.

Obs. 1. O formulă atomară (variabilă propozițională sau atom predicativ) este adevărată într-un model M, dacă şi numai dacă, i se atribuie variabilei sau atomului în cauză în lumea sau situația w valoarea 1.

Obs. 2. Tautologiile sunt adevărate în orice model şi în orice lume posibilă.

Obs. 3. Contradicțiile nu sunt adevărate nici într-un model şi nici într-o lume posibilă.

Obs. 4. O formulă negată este adevărată într-un model şi o lume posibilă dacă şi numai dacă formula pozitivă nu este adevărată în aceleaşi condiții.

Obs. 5. O propoziție prefixată de un operator deontic OA sau PA este adevărată, dacă şi numai dacă, expresia ei propozițională devine adevărată în toate lumile ei alternative (in cazul lui O) sau cel puțin în una (în cazul lui P).

Universitatea Spiru Haret

Obs. 6. Numai formulele cu operatori modali au nevoie de relația de alternativitate R. Semantica conectivelor logice binare nu are nevoie de relația de alternativitate R.

Semantica sistemelor deontice Smiley-Hanson se diferențiază între altele după proprietățile relației de alternativitate R.

Pentru sistemul OK nu se stipulează nici o restricție sau proprietate specială a relației de alternativitate.

Axiomelor A3-A7 din lista dată la pag 285 li se asociază proprietăți speciale ale relației de alternativitate.

Redăm aceste proprietăți în tabelul 7.

R3	*A3. Op ⊃ Pp*	*∀x∃yR (x,y)*	*R este serială în W*
R4	A4. Op ⊃ OOp	*∀x ∀y ∀z ((R (x,y)∧R (y,z))⊃ R (x,z)*	*R este tranzitivă în W*
R5	A5. POp⊃ Op	*∀x ∀y ∀z ((R (x,y)∧R (x,z) ⊃ R (y,z)*	*R este euclidiană în W*
R6.	*A6. O (Op⊃ p)*	*∀x ∀y (R (x,y) ⊃R (y,y))*	*R este cvasi- reflexiv în W*
R7	*A7.O (POp⊃ p)*	*∀x ∀y ∀z (R (x,y) ⊃ (R (y,z) ⊃ R (z,y))*	*R este cvasi- simetric în W.*
R8.	*A8. Op ⊃ p*	*∀xR (x,x)*	*R este reflexiv în W*

Tabelul 7. Proprietăți ale relației de alternativitate în sistemele Smiley-Hanson

Mai întâi câteva observații despre proprietățile relației de accesibilitate asociate axiomelor A3-A8.

R3. Relația de accesibilitate asociată axiomei A3 are proprietatea de a fi serială. O relație este serială dacă din orice situație sau lume posibilă există o stare sau lume posibilă accesibilă în care prevederile normei sunt satisfăcute.

R4. Axioma A4 , specifică sistemului OS4, pretinde ca relația de accesibilitate asociată ei trebuie să fie tranzitivă.

R5. Axioma specifică sistemului OS5 cere ca relația de accesibilitate trebuie să fie euclidiană, respectiv pretinde ca două stări accesibile din aceiași stare inițială să fie accesibile între ele, respectiv să permită accesul de la prima la cea de a doua.

R6. Axioma A6, specifică sistemului OM cere ca relația de accesibilitate asociată ei să aibă proprietatea de *cvasi-reflexivitate* respectiv toate lumile accesibile să fie reflexive.

Universitatea Spiru Haret

R7.Axioma A7 specifică sistemului deontic brouwerian OB cere ca relația sa de accesibilitate trebuie să aibă proprietatea de *cvasi-simetrie.*

R8. Axioma AxOT, specifică sistemului deontic OT, pretinde ca relația sa de accesibilitate să fie *reflexivă*.

Putem asocia fiecăreia dintre proprietățile relației de accesibilitate menționate mai sus câte o reprezentare grafică adecvată.

Exercițiu. Construiți o reprezentare grafică pentru fiecare dintre proprietățile relației de accesibilitate enumerate mai sus.

Putem folosi proprietățile relației de accesibilitate definite în tabelul 7 şi explicate în R3 –R8 drept criterii pentru clasificarea mulțimii modelelor din sistemele de logică deontică Smiley-Hanson. Lennart Åqvist distinge următoarele clase de modele:

OK-modele = clasa tuturor modelelor în care nu se impune nici o restricție asupra relației de accesibilitate R.

OM-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de accesibilitate R cvasi-reflexivă.

OS4-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de accesibilitate R tranzitivă şi cvasi-reflexivă.

OB-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de accesibilitate R cvasi-reflexivă şi cvasi-simetrică.

OS5-modele = clasa tuturor modelelor în care relația de accesibilitate este euclidiană şi tranzitivă.

OK^+-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de accesibilitate serială.

OM^+-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de acesibilitate serială şi cvasi-reflexivă.

$OS4^+$-modele = clasa tuturor modelelor cu relația de accesibilitate tranzitivă şi cvasi-reflexivă.

OB^+-modele = clasa tuturor modelelor având relația de accesibilitate serială, simetrică şi cvasi-reflexivă.

$OS5^+$-modele = clasa tuturor modelelor având relația de accesibilitate serială, euclidiană şi tranzitivă.

La această listă de clase de modele putem adăuga încă două clase: clasa OT-modelelor în care relația de accesibilitate R este reflexivă şi clasa OT^+-modelelor în care relația de accesibilitate este reflexivă şi serială.

Universitatea Spiru Haret

7. **Validitatea şi realizabilitatea în sistemele Smiley-Hanson**

Fie L un sistem oarecare din cele 10 sisteme Smiley-Hanson OK, OM, OS5^{+}. Spunem că o propoziţie A este L-validă, în simboluri $\models_L$ A, dacă şi numai dacă , M, w $\models$ A pentru orice L-model M şi pentru orice w din W. De asemenea, vom spune că un set de propoziţii S este L-realizabil, dacă şi numai dacă, există un L-model M şi o lume w din W astfel că fiecare propoziţie A din S să fie adevărată în modelul M şi în lumea w din W. Evident, vom avea $\models_L$ A, dacă şi numai dacă, mulţimea unitară $\{-A\}$ nu este L-realizabilă.

Putem defini un concept semantic analog derivabilităţii sau demonstraţiei (proof) din teoria sistemelor axiomatice conceptul de *consecinţă logică semantică.* Spunem că o propoziţie A este o consecinţă logică semantică dintr-un set de propoziţii S, simbolic, S$\models_L$ A, dacă şi numai dacă, S$\cup\{-A\}$ nu este L-realizabil. Vom spune că A este o consecinţă logică semantică în L, în simboluri,$\models_L$ A, dacă şi numai dacă, A este o consecinţă logică semantică din mulţimea vidă, respectiv $\phi \models_L$ A.

8. **Noncontradicţia sistemelor Smiley-Hanson**

Pentru fiecare dintre cele 12 sisteme deontice cu operatori iteraţi putem construi demonstraţii de noncontradicţie şi completitudine. Demonstraţiile vor avea cursul firesc al oricăror demonstraţii de acest fel. Pentru noncontradicţie va trebui să arătăm mai întâi că fiecare dintre axiomele sistemului în cauză este lege logică sau formulă semantic validă. Pasul următor va consta în dovedirea faptului că fiecare dintre cele două reguli de inferenţă, R1, Modus Ponens şi R2, regula necesităţii conservă validitatea axiomelor.

Lennart Åqvist ilustrează verificarea validităţii axiomelor prin verificarea faptului că axioma specifică sistemului OS5, axioma A5, este validă. În verificarea validităţii acesteia, el ţine seama de proprietatea specifică a relaţiei de alternativitate pentru A5, aceasta fiind euclidiană, i.e. $\forall x \forall y \forall z$ ((R (x,y)$\wedge$R (x,z) $\supset$ R (y,z), unde x,y şi z sunt lumi posibile.

Această proprietate poate fi ilustrată prin graful din fig 5.

Universitatea Spiru Haret

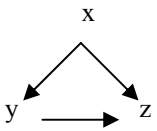


Fig. 5. Reprezentarea grafică a unei relații de alternativitate euclidiene

Enunțul metateoremei în forma sa abstractă este următorul:
Teorema noncontradicției. *Fie L unul dintre cele 10 sisteme cercetate de Lennart Åqvist OK, OM,OS4, OS5*$^{+}$*. Atunci pentru orice propoziție A din Σ, dacă* $\vdash_L$ *A, atunci* $\models_L$ *A. Cu alte cuvinte, toate propozițiile demonstrabile în L sunt L-valide sau tautologii* (legi logice).

Pentru demonstrarea metateoremei vom proceda astfel: 1. Verificăm, printr-un procedeu de decizie adecvat, validitatea fiecărei axiome a sistemului; 2 Demonstrăm că fiecare dintre regulile de inferențe formulate în sistem conservă această validitate; 3. Apoi verificăm printr-o inducție pe lungimea textului demonstrativ al unei demonstrații în L că, dacă aceasta este demonstrabilă în sistem, atunci ea este validă în sistem, respectiv dacă $\vdash_L$ A, atunci $\models_L$ A.

Să demonstrăm, de exemplu, noncontradicția sistemului OS5^{+}.

Axiomele sistemului sunt:

A0. Tautologiile logicii propozițiilor
A1. $Pp \equiv \text{-}O\text{-}p$
A2. $O(p \supset q) \supset (Op \supset Oq)$
A3. $Op \supset Pp$
A4. $Op \supset OOp$
A5. $POp \supset Op$

Testăm, mai întâi, validitatea axiomelor A0-A5.

A0 conține din enunț numai tautologii.

Verificăm prin metoda diagramelor celelalte axiome:

Axioma A1 este o echivalență. Verificăm, pe rând, cele două implicații la care se reduce aceasta. Construim diagrama pentru implicația de la stânga la dreapta:

Universitatea Spiru Haret

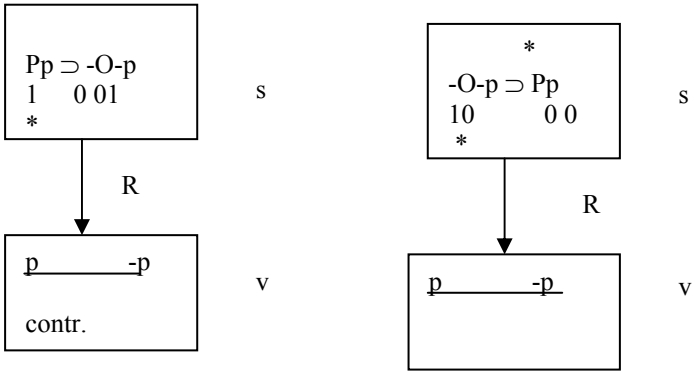


Fig. 6. Testarea validităţii axiomei A1

Implicaţiile de la stânga la dreapta şi de la dreapta la stânga ale axiomei A1 sunt valide.

Testăm, pe pagina următoare, axioma A2, specifică sistemului OK ce descrie o deontizare a schemei de inferenţă *Modus Ponens*.

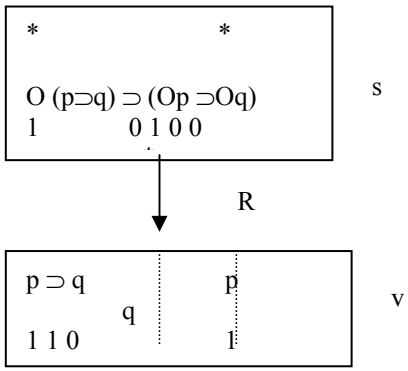


Fig. 7. Testarea validităţii axiomei A2

Axioma A2 este validă.

Relaţia de alternativitate în A3, axioma specifică sistemelor cu simbolul +, este serială. Ea stipulează că orice obligaţie trebuie să pretindă lucruri permise astfel încât sistemul să rămână consistent.

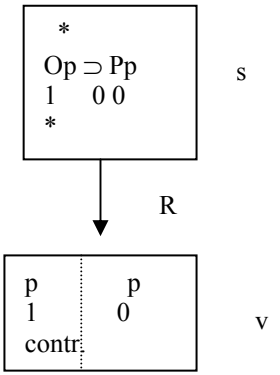


Fig. 8 Verificarea validității axiomei A3

Axioma A3 este validă. Relația de alternativitate în axioma A4 este tranzitivă. Testăm prin diagrame axioma A4.

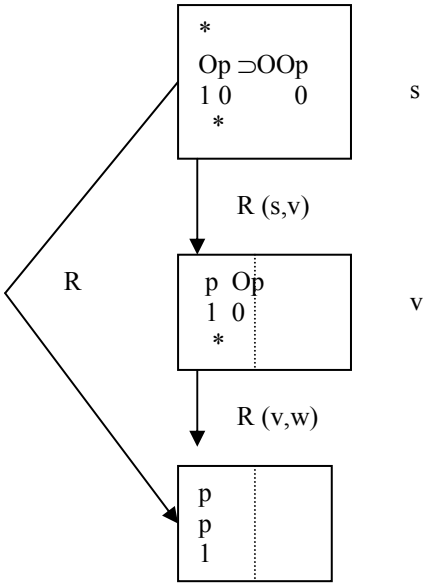


Fig. 9. Verificarea validității axiomei A4

Universitatea Spiru Haret

Axioma A4 este validă. A mai rămas de verificat axioma A5.

Relaţia de alternativitate în A5 este euclidiană. Două stări accesibile din aceiaşi stare sunt accesibile între ele de la prima la a doua. (vezi Tabelul 7, linia R5, coloana 3). Testăm axioma A5.

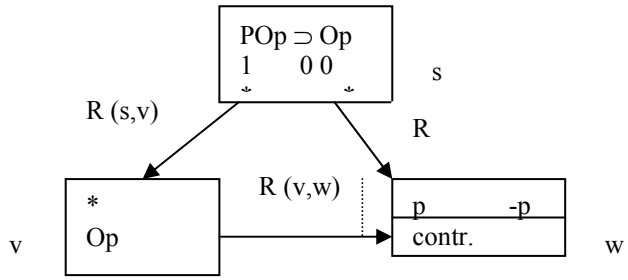


Fig. 10. Verificarea validităţii axiomei A5

Relaţia de alternativitate dintre lumile v şi w se întemeiază pe proprietatea A5 de a satisface cerinţa de a fi euclidiană. Analiza lui A5 conduce în lumea w la contradicţii. Axioma A5 este validă şi în consecinţă, toate axiomele sistemului $OS5^+$ sunt valide.

Mai trebuie să arătăm că cele două reguli R1, *Modus Ponens* şi R2, necesitarea conservă validitatea.

Admitem că A ⊃ B şi A descriu formule valide din $OS5^+$ şi presupunem, prin absurd că:

1. V (A ⊃ B) = T (taut) ip
2. V (A) = T (taut) ip
3. V (B) = 0 ip dem. indirecte

Substituind valorile atribuite lui A şi B în ipotezele 2 şi 3 în ipoteza 1obţinem:

4. V (T ⊃ 0) = T, ceea ce este inacceptabil, căci aceasta ar însemna să admitem că implicaţia dintre o tautologie şi valoarea de adevăr 0 ar fi tot o tautologie. Dar aceasta contrazice definiţia implicaţiei. Vom conchide că *Modus Ponens* conservă validitatea, căci o consecinţă degajată prin *Modus Ponens* din două tautologii este tot o tautologie.

A mai rămas să arătăm că regula R2, regula necesitării, conservă validitatea.

Regula necesitării se aplică numai la formule valide sau la legi logice. Fie α o formulă validă. Prefixarea lui α prin O şi scrierea Oα înseamnă a spune că tautologiile sau legile logice sunt obligatorii.

Universitatea Spiru Haret

Faptul sună puțin straniu, căci nici un organ legiuitor n-a stipulat vreodată obligativitatea legilor logice ale gândirii. Dar numai prelucrarea prin scheme valide de inferență ne îngăduie să deducem consecințe logice valabile din normele juridice (sau tehnice) şi diferite date factuale din viața socială sau activitățile tehnice.

Să admitem că α este o implicație de forma $A \supset B$ şi că o prefixăm prin operatorul O. Atunci prin axioma A2 obținem o teoremă validă de forma $OA \supset OB$.

Să admitem că α este o conjuncție de forma $A \wedge B$ şi o prefixăm prin operatorul deontic O. Atunci prin teorema din K, $O(p \wedge q) \equiv (Op \wedge Oq)$ obținem distribuirea lui O față de conjuncție, care este tot o lege logică.

În sfârşit, orice demonstrație într-un sistem axiomatic, inclusiv în sistemele deontice de tip Smiley-Hanson are ca punct de plecare o tautologie logic propozițională sau o axiomă Smiley-Hanson dintre cele 7 menționate la pag 285. Dar acestea sunt formule valide sau legi logice. O teoremă este obținută la capătul unui şir de paşi efectuat în construirea textului demonstrativ. Cum fiecare pas este mediat de o regulă validă de inferență, cum sunt R1 şi R2, propuse inițial sau de una dintre regulile derivate R3-R6 (vezi pag. 287) sau de regulile de reducție proprii sistemului OS4, (vezi RR1-RR2pp 292-93) sau de regulile de reducție proprii sistemului OS5 (vezi RR3, RR4, pag. 297) reguli ce conservă validitatea orice teoremă demonstrată va fi o lege logică sau formulă validă.

In concluzie, teorema de noncontradicție sau consistență ne spune că orice teoremă este sub raport semantic o formulă validă.

Exerciții

Demonstrați necontradicția sistemului OK.

Testați validitatea axiomei A6 şi demonstrați noncontradicția sistemului OM.

Testați validitatea axiomei O ($POp \supset p$) şi noncontradicția sistemului deontic brouwerian OB.

Demonstrați validitatea sistemului $OS4^{+}$.

Teoremă. Orice mulțime *realizabilă* de propoziții modale dintr-un sistem Smiley-Hanson este *consistentă.*

Fie L un sistem logic modal de tip Smiley-Hanson şi S un set de propoziții din mulțimea Σ a propozițiilor unui astfel de sistem. Atunci dacă S este realizabilă, atunci S este consistentă, respectiv nu putem obține pornind de la S şi folosind regulile de inferență a sistemului o contradicție redată prin simbolul $\perp$.

Universitatea Spiru Haret

Demonstraţie. Să presupunem, prin absurd, că o mulţime de propoziţii S este realizabilă, i.e. are un model şi o lume posibilă în toate propoziţiile din S devin adevărate şi, în acelaşi timp, ar fi logic L-inconsistentă. Atunci prin definiţia L-inconsistenţei în acel sistem trebuie să existe în S o submulţime B1, B2,…, Bn astfel că $\vdash_L$ (B1∧ B2∧… ∧Bn)→⊥. Atunci prin teorema noncontradicţiei demonstrată mai sus, obţinem $\models_L$ (B1∧ B2∧… ∧Bn)→⊥. Dar aceasta înseamnă că pentru o anumită lume w şi pentru un anumit model M ale căror existenţă este garantată de faptul că S este L –realizabilă noi vom avea în acelaşi timp M,w $\models_L$ B1∧ B2∧… ∧Bn şi M,w $\models_L$ (B1∧ B2∧… ∧Bn)→⊥, ceea ce este absurd, căci aceasta ar însemna că ar exista un model M,w $\models_L$ ⊥, ceea ce contrazice cerinţa a treia din definiţia inductivă a conceptului de model.

9. **Completitudinea sistemelor Smiley-Hanson**

Lennart Åqvist propune două versiuni ale demonstraţiei de completitudine, una tare şi alta slabă.

Versiunea tare este formulată de logicianul de la Uppsala astfel: *Fie L un limbaj al unuia dintre cele 10 sisteme şi S ⊂ Σ o mulţime de propoziţii din acel sistem. Atunci dacă S este L-realizabil atunci S este L-consistent, respectiv din S nu derivă ⊥.*

Pe scurt*, dacă S este o mulţime de propoziţii realizabilă, atunci S este L-consistentă, respectiv din S nu derivă nici o contradicţie.* Contradicţia se notează prin ⊥.

Versiunea slabă este cea care corespunde ideii clasice de teoremă de completitudine.

Versiunea slabă. Fie L, ca mai sus, *un limbaj al unui sistem modal de tip Smiley-Hanson şi A o propoziţie din Σ mulţimea propoziţiilor. Atunci dacă A este validă, simbolic* $\models_L A$*, atunci A este demonstrabilă ca teoremă în limbajul L al sistemului., simbolic* $\vdash_L A$

Pe scurt, *Dacă* $\models_L A$*, atunci* $\vdash_L A$.

Lennart Åqvist demonstrează mai întâi că versiunea tare implică versiunea slabă. Pentru aceasta el admite că versiunea slabă ar putea fi infirmată, respectiv că am putea avea o formulă A realizabilă care nu este în acelaşi timp L-consistentă.

$\models_L A$ ip.

not $\vdash_L A$. ip.

Universitatea Spiru Haret

Din 2, pe baza principiului bivalenței, {-A} va trebui să fie consistentă:

not: {-A} $\vdash_L \perp$

Prin urmare, în versiunea tare {-A} va fi L-realizabilă, respectiv pentru un L-model M şi pentru o lume posibilă w va trebui să avem:

4. M, w $\models_L$ -A

ceea ce contrazice ipoteza 1 de mai sus în care am admis că A este o consecință semantică în L.

Suntem, deci, îndreptățiți să ne concentrăm atenția în cele ce urmează asupra demonstrării versiunii tari, căci aceasta o implică pe cea slabă, care este demonstrația clasică de completitudine.

Pentru aceasta, vom introduce, după Åqvist, câteva definiții şi leme preliminare. Primul concept pe care-l propune este cel de mulțime L-saturată, unde L este unul din limbajele celor 10 sisteme Smiley-Hanson.

D.9.1. Fie L un limbaj al unui sistem Smiley-Hanson şi S un set de propoziții din Σ. Vom spune că mulțimea de propoziții *S este L-saturată*, dacă şi numai dacă:

S este L-consistentă, i.e. din S nu se poate deriva o contradicție;

Pentru orice propoziție A sau A$\in$ S sau -A $\in$ S

D.9.2. *Lema mulțimilor L-saturate.* Fie S o mulțime L-saturată de propoziții şi A şi B propoziții din S.Atunci:

Orice propoziție L-demonstrabilă va aparține lui S;

S este închisă față de Modus Ponens, respectiv dacă A$\in$ S şi A$\supset$B $\in$S, atunci B$\in$S;

T $\in$ S (Tautologiile aparțin lui S);

$\perp \notin$ S (Contradicțiile nu aparțin lui S);

-A$\in$S, dd A$\notin$ S;

A$\wedge$B$\in$S, dd A$\in$S şi B$\in$S;

A$\vee$B$\in$S, dd A$\in$S sau B$\in$S;

A$\supset$B$\in$S, dd -A$\in$S sau B$\in$S;

A$\equiv$B$\in$S, dd A$\supset$B$\in$S şi B$\supset$A$\in$S

Demonstrația acestei leme este lesne de construit din definiția mulțimilor L-saturate şi din definițiile conectivelor logic propoziționale.

Universitatea Spiru Haret

D9.3. *Lema lui Lindenbaum*. Orice mulțime S de propoziții L-consistente poate fi extinsă la o mulțime S^+ de propoziții L-saturate.

Cititorul poate găsi demonstrația acestei leme în D. Makinson, On some completeness teorems în modal logic „Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*"* 12, 379-384.

D9.4. *Lema lui Makinson.* Fie L, ca mai sus, un limbaj pentru un sistem Smiley-Hanson, S o mulțime L-saturată de propoziții, A o propoziție de forma -OA∈ S şi $S_A = \{B \in \Sigma : OB \in S\} \cup \{-A\}$. Atunci S_A este L-consistent.

Demonstrație. Presupunem că S_A nu este L-consistent. Atunci există un şir de propoziții B1,…,Bn (n ≥ 1) astfel că orice OBi∈ S şi $\vdash_L (B1 \wedge B2 \wedge \ldots \wedge Bn \wedge -A) \rightarrow \perp$. În virtutea faptului că schema de axiome A0, respectiv legile logicii propozițiilor, apar în orice limbaj L al unui sistem Smiley-Hanson vom avea:

$$\vdash_L (B1 \wedge B2 \wedge \ldots \wedge Bn) \supset A \qquad (1)$$

Să considerăm, mai întâi, cazul când n = 0. Aceasta înseamnă că A derivă din mulțimea vidă de ipoteze şi deci.

$$\vdash_L A \qquad (2)$$

Atunci prin regula R2 a O-necesitării, proprie fiecăruia din cele 10 sisteme, vom putea scrie:

$$\vdash_L OA \qquad (3)$$

Prin urmare, prin lema mulțimilor de formule saturate vom obține OA∈S. Aşadar, OA şi –OA (vezi def 9.4) vor fi amândouă în S astfel că S este L-inconsistent. Ajungem astfel la o contradicție.

Considerăm, în continuare, cazul când n ≥ 1.

Din (1) şi o tautologie a logicii propozițiilor (4):

$$(B1 \wedge B2 \wedge \ldots \wedge Bn) \supset A) \equiv (B1 \supset (B2 \supset \ldots (Bn \supset A)) \ldots) \qquad (4)$$

rezultă prin R1 sau *Modus Ponens*:

$$\vdash_L (B1 \supset (B2 \supset \ldots (Bn \supset A)) \ldots) \qquad (5)$$

Din (5) prin R2 sau regula O-necesitării obținem:

$$\vdash_L O (B1 \supset (B2 \supset \ldots (Bn \supset A)) \ldots) \qquad (6)$$

Mai departe, folosind schema de axiome A2 (vezi pag 285) de n ori împreună cu regula R1 sau *Modus Ponens* obținem:

$$\vdash_L (OB1 \supset (OB2 \supset \ldots (OBn \supset OA)) \ldots) \qquad (7)$$

De aici, obținem prin lema mulțimilor saturate că formula (7) aparține lui S:

$$(OB1 \supset (OB2 \supset \ldots (OBn \supset OA)) \ldots) \in S \qquad (8)$$

Dar fiecare OBi∈ S şi deci, prin condiția 2 a aceleiaşi leme aplicate de n ori, OA∈ S.

Universitatea Spiru Haret

$OA \in S$ (9)

Astfel ajungem la concluzia că atât OA cât şi –OA aparţin lui S. Prin urmare, L este inconsistent, deoarece am derivat în el o contradicţie. Ajungem în final la o contradicţie. Prin urmare S_A este L-consistent.

10. **Logica deontică dinamică**

Formularea normelor şi luarea deciziilor au nevoie, în opinia noastră, de o dublă întemeiere: una acţional-ontologică şi alta axiologică. Un obiectiv asumat de un decident sau o obligaţie a unui agent trebuie să fie, mai întâi, fezabil sau acţional accesibilă agenţilor executanţi din starea iniţială considerată şi, în al doilea rând, trebuie să fie dezirabilă şi să maximizeze utilitatea dobândită de către agenţi.

Ne propunem, în capitolul de faţă, să fundamentăm logica deontică pe teoria modalităţilor acţionale sau a posibilului uman relativizat la situaţii umane şi la abilităţile agenţilor şi pe logica acceptării ca teorie a judecăţilor de valoare acceptate de un agent, un grup sau o comunitate.

Teoria închegată de noi se articulează ca o construcţie pe trei niveluri.

În primul nivel ne ocupăm de structura şi dinamica conduitelor umane, de stări iniţiale şi stări terminale, de stări scop şi stări obligaţii asumate sau impuse unor agenţi, precum şi de secvenţele sau programele prin care pot fi acestea realizate. Pentru a descrie *abilităţile* agenţilor introducem, la acest prim nivel, un alfabet de acte elementare asociate unor agenţi individuali sau colectivi şi reprezentăm pe arbori etichetaţi sau pe automate nedeterministe conduitele posibile ale agenţilor şi pe mulţimea T a frunzelor arborilor ideile de scop stare şi obligaţie, precum şi noţiunile de scop sau obligaţie generică redată printr-o mulţime de stări terminale şi o descripţie sau model. Fiecărui agent individual îi asociem ca stare iniţială rădăcina unui arbore şi un arbore sau un automat. Conduitele vor fi descrise ca secvenţe de acte prin care pot fi atinse unele stări scop sau stări obligaţie.

In cel de al doilea nivel introducem două specii de operatori deontici, unii definiţi pe *Agenţi* × *Situaţii* × *Conduite*, alţii pe *Agenţi* × *Situaţii*[2]. În primul caz, vom avea de a face cu *obligaţia de a urma o conduită*: În cel de al doilea, cu *obligaţia de a atinge o stare posibilă*

Universitatea Spiru Haret

viitoare. Definim, totodată un număr de legi care descriu relațiile dintre aceste două specii de obligații.

Modelul conceput dă seama de dimensiunea dinamică sau diacronică a conduitelor umane şi de dimensiunea sincronică a acestora. Prima este redată prin *compunerea secvențială*, iar cea de a doua prin *compunerea în paralel*. Încorporăm în logica acțiunii operațiile de *planificare* şi *programare* a acțiunilor complexe, ca şi pe acelea de *execuție efectivă* sau *performanță* şi comparăm execuția efectivă cu programele anterior stabilite. Definim pe această bază conceptele de *eficacitate* şi *legalitate*, precum şi datele şi duratele acțiunilor umane compuse pe care le calculăm printr-un mecanism inductiv.

Folosim în construcția noastră unele rezultate din logica dinamică creată de W. Pratt [...], dezvoltată de K. Segerberg[...], David Harel şi aplicată prima dată la teoria normelor de J.J.Ch. Meyer.

Cel de al treilea nivel priveşte întemeierea axiologică a teoriilor logico-deontice. În acest tip de fundamentare folosim o variantă a noastră de logică a acceptărilor [95, 96] înțeleasă ca teorie logică a judecăților de valoare.

În sfârşit, vom lua în considerare într-un studiu viitor posibilitatea întemeierea logicii deontice pe conceptul logic-modal de putere politică definit de noi în ultimii 10 ani şi pe idea de pretenție sau cerință formulată de un agent puternic.

În primul subcapitol susținem teza că logica deontică trebuie fundată pe teoria modalităților acționale şi pe capacitățile performative ale agenților de referință.

În al doilea, prezentăm *un nou paradox în logica deontică standard legat de utilizarea legii comutativității* pentru descrierea secvențelor de acte şi arătăm că într-o logică deontică dinamică acesta poate fi evitat. Enumerăm totodată un număr de legi ale logicii deontice dinamice care dau seama de compunerea actelor în serie şi în paralel şi de exigențele actelor de decizie.

In al treilea, definim o semantică pe arbori pentru logica dinamică a acțiunilor şi pentru logica deontică introducând agenți înzestrați cu abilități, scopuri şi conduite eficace care duc la atingerea sau eşuarea scopurilor asumate şi care acționează într-un mediu normat de acțiune. Pentru fiecare operator deontic dinamic şi pentru fiecare formă de compunere în serie, paralel sau la alegere sunt date interpretări semantice pe arbori model.

Universitatea Spiru Haret

În al patrulea, prezentăm un număr de scheme de inferențe în logica acțiunii cu interpretări pe arbori şi în logica deontică dinamică şi definim două tipuri de scheme de inferență în logica acțiunii: o clasă de scheme care trece de la conduite marcate deontic pe stări sau rezultate şi conchide asupra unor conduite obligatorii, interzise sau permise şi alta care face tranziția inversă de la evaluarea deontică a conduitelor la evaluarea deontică a stărilor.

În al cincilea, prezentăm succint logica acceptării ca o versiune de teorie logică a judecăților de valoare.

În ultimul subcapitol prezentăm două căi alternative de întemeiere axiologică a logicii deontice dinamice pe logica acceptării, tot aşa cum teoria normelor poate fi fundată pe teoria valorilor.

10.1. *Logica deontică şi modalitățile acționale*

Logica deontică este o teorie modală despre evaluarea normativă a actelor şi conduitelor umane. Nu putem dobândi o reprezentare corectă a exigențelor normative față de actele şi conduitele umane, dacă nu precizăm mai întâi statutul ontic şi modal al acțiunilor umane.

Cu două decenii în urmă, în lucrarea noastră *Teoria acțiunii şi logica formală* (Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, 1984) am deosebit mai multe specii de modalități: logice, fizice, acționale, epistemice, doxastice, deontice, teleologice, axiologice etc. şi am arătat, încă de pe atunci, că modalitățile deontice presupun pe cele acționale şi se întemeiază pe acestea. [12, 27-35, 258-291, ,467-476].

$O\,(x, p) \supset M^a\,(x, p)$ *(M^a = este acțional posibil)*

Pentru ca un agent *x* să poată obliga pe alt agent *y* să execute o acțiune al cărei beneficiar este el sau o comunitate reprezentată de el, trebuie, mai întâi, sub raport fizic-material şi uman abilitar ca acțiunea să fie *fezabilă* sau accesibilă acestuia, mai exact, *acțional posibilă*, nu doar în genere pentru specia umană, ci pentru executantul vizat, cu abilitățile şi competența operațională deținută de acesta şi, în al doilea rând, trebuie ca agentul imperator sau instituitor de normă să fie mai puternic decât cel căruia i se adresează norma. Puterea relativă a doi agenți nu vizează doar sensul primar de forță fizică , ci statutul social al agenților şi capacitatea lor mutuală de *a* se *influența* unul pe altul. *Puterea* este capacitatea unui agent de a influența atitudinile şi conduitele semenilor săi.

Teoria logică a posibilului acțional este încă în faza sa incipientă. Cea mai importantă realizare formală a sa este logica

Universitatea Spiru Haret

dinamică creată de Pratt, interpretată de K. Segerberg ca teorie despre acțiunile umane. Paşi decisivi au făcut în această direcție, după opinia noastră, J. J. Ch. Meyer care a regândit logica deontică în termenii logicii dinamice şi Mihai Barbuceanu în *Agents That Work în Harmony*, AAAI, 1998, care a cercetat propagarea constrângerilor, a introdus noțiunea de cost al unei încălcări, a definit un algoritm al propagărilor deontice şi un planificator de acțiuni raționale într-un mediu normativ neconsistent.

Logica deontică trebuie, în opinia noastră, să aibă ca infrastructură logica modalităților acționale. De-a-lungul anilor am propus mai multe versiuni despre teoria posibilului acțional [Popa,1983, 1984, 1985, 1986, 1992]

Cu un an sau doi în urmă am formulat un program de „pragmatizare a logicilor modale" în care vizam regândirea mai multor sisteme clasice sau mai recente de logică modală aletică din perspectiva unei teorii a modalităților acționale. Despre acest program am discutat, între alții, cu profesorul Melvin Fitting cu prilejul unor conferințe ținute de către acesta în România. Cred şi în prezent că un astfel de program este de natură să sporească eficacitatea logicilor modale în construcția de modele aplicabile în ştiințele socio-umane şi în programele de inteligență artificială.

Ce înseamnă, de fapt, *pragmatizarea logicii modale*?

Mai întâi, introducerea de drept în logica modal acțională a agenților şi luarea serios în considerare a caracteristicilor acestora şi a funcțiilor a lor în comunicare, decizie, planificare sau programare, execuție sau conduită efectivă şi în evaluarea după criterii bine determinate a acesteia.

În al doilea rând, introducerea conceptului de stare sau *situație acțională* şi conectarea acestuia cu semantica sistemelor logico-modale cu agenți. O situație acțională o putem descrie, la limită, printr-o listă de atomi instanțiați sau propoziții descriptive adevărate despre acea stare. Într-un program logic lista de atomi instanțiați va coincide cu datele factuale.

Trecerea de la o situație acțională la o altă situație acțională se realizează printr-o *conduită efectivă* sau *execuție* a unui program. Conduitele efective pot fi descrise prin formule bine formate de logică dinamică de forma $[\pi]p$ sau $<\pi>p$, unde programul π va sta pentru conduita preconizată sau pentru conduita efectivă sau actul performativ, execuția.

Universitatea Spiru Haret

Este tentantă şi o logică dinamică ternară pe stări sau situaţii acţionale, cu operatori de forma: $s_1[\pi]s_2$, $s_1<\pi> s_2$, care se citesc: „Din starea s_1 caracterizată prin descripţiile din $lista_1$ se ajunge *întotdeauna* prin programul π la o stare s_2 caracterizată de descripţiile din $lista_2$", unde $lista_1$ şi $lista_2$ sunt modele ale situaţiilor s_1 şi s_2.

Trebuie să distingem între conduita preconizată într-un program şi conduita efectivă sau execuţia unui program sau îndeplinirea unui plan. La fel vom distinge între starea asumată ca scop şi starea atinsă efectiv prin executarea unei conduite. *Starea preconizată* sau considerată înainte de acţiune şi *starea atinsă* după conduita efectivă pot coincide sau pot diferi. Măsura coincidenţei lor dă *gradul de eficacitate* a acţiunii agentului.

Variabila p din formulele $[\pi]p$ sau $<\pi>p$ descrie complet sau parţial *starea rezultat* la care se ajunge prin programul sau conduita π.

Un alt aspect major al pragmatizării unei logici modale va fi dat de atribuirea către fiecare agent aflat într-o situaţie acţională a unor *abilităţi* sau conduite posibile pe care acesta le poate executa în acea situaţie. Aceste abilităţi le-am descris în cadrul unor automate nedeterministe ca drumuri etichetate într-un graf care legau clase de stări iniţiale şi clase de stări terminale pe care erau definite stările scop ale agenţilor sau stările obligaţii ce le erau impuse printr-un sistem de norme. Modelul pe automate nedeterministe a fost implementat de noi împreună cu profesoara Adina Magda Florea într-un program Prolog [6, pp 33-53.].

Modelul este apt de a ţine seama de *datele* şi *duratele* acţiunilor ca şi de costurile acestora şi de valoarea globală a produsului sau serviciului prestat şi, în ultimă instanţă, de *eficienţa* sau profitul acţiunii. Calcularea acestora a putut fi modelată şi implementată în Prolog printr-un mecanism inductiv.

Modelul dă seama de fezabilitatea unui proiect sau de statutul său modal acţional, precum şi de accesibilitatea scopurilor şi obligaţiilor şi de consistenţa lor mutuală.

In cadrul lui sunt definite şi conceptele de *legalitate* şi *ilegalitate* precum şi conceptele de *eficacitate* şi *eroare practică* precum şi cel de eficienţă economică.

Conceptul de abilitate este un concept major, căci el dă seama de posibilul acţional instanţiat la nivelul unui agent individual sau colectiv.

În rezumat, pragmatizarea unei teorii logico-modale reclamă determinarea ontologiei acelei teorii, raportarea ei la o teorie a

Universitatea Spiru Haret

posibilului prin acțiunea umană. Aceasta poate beneficia de unele rezultate esențiale obținute în logicile modale. Pragmatizarea introduce agenți, situații acționale, deschideri operaționale, rezultate sau stări accesibile, stări scop, stări obligații, date şi durate, conduite considerate şi conduite îndeplinite, căi şi metode de evaluare a conduitelor preconizate şi a celor executate, compararea acestora şi tragerea unor concluzii privind eficacitatea, erorile practice, eficiența, legalitatea sau ilegalitatea.

Vom admite, deci, că logica deontică presupune teoria posibilului acțional şi că este din mai multe puncte de vedere preferabil să dezvoltăm logica deontică ca o supraetajare a logicii dinamice.

10.2. *Un nou paradox în logica deontică standard*

Dacă u şi t descriu acte sau conduite (secvențe de acte) formula wrightiană clasică O (u∧t) poate genera confuzii. În logica propozițiilor conjuncția este comutativă, i.e. (u∧t) ≡ (t∧u). Prin regula substituirii echivalentelor, RE, şi regula modală derivată $\alpha \equiv \beta \Rightarrow O\alpha \equiv O\beta$ putem obține din axiomele logicii deontice standard teorema O (u∧t) ≡ O (t∧u) care este, evident, contra-intuitivă. Putem admite ca obligatorie succesiunea de acte „a murit şi l-a îngropat", dar nu putem admite, cu aceiaşi îndreptățire, obligația succesiunii de acte „l-a îngropat şi a murit" şi nu putem admite din punctul de vedere al bunului simț moral sau normativ echivalența deontică O (u∧t) ≡ O (t∧u).

Acest fapt contra-intuitiv l-am putea eticheta ca *un nou paradox în logica deontică clasică,* dacă numărul acestora n-ar fi şi aşa destul de mare.

10.3. *Logica deontică dinamică propusă de J. J. Ch. Meyer*

Evitarea acestui paradox poate fi realizată prin introducerea unei relații de ordine pe mulțimea actelor umane şi definirea conduitelor ca secvențe de acte elementare.

Introducerea secvențelor de acte într-o teorie logico-deontică şi definirea operatorilor deontici interdicție, permisiune, obligație în raport cu relațiile de succesiune serială, paralelă sau de alegere sau opțiune echivalează cu o reconstrucție profundă a logicii deontice. Meritul acestei reconstrucții revine logicianului J. J. Ch. Meyer.

Universitatea Spiru Haret

Acesta a folosit în lucrarea sa novatoare [5] trei relații de compunere a acțiunilor: 1. *secvențială*, notată prin; 2. *paralelă*, notată prin &. şi 3. de *alegere nedeterministă*, notată prin semnul reuniunii $\cup$.

Reproducem, după Mihai Barbuceanu [2], 10 teoreme care descriu proprietățile operatorilor deontici în raport cu aceste forme de compunere a actelor umane:

1. $F(\alpha;\beta) \equiv [\alpha] F\beta$

O secvența $\alpha;\beta$ este interzisă, dacă şi numai dacă, după orice executare a primei acțiuni restul acțiunilor sunt interzise.

Unui şofer, de exemplu, îi este interzisă secvența de acte „beau zdravăn" şi apoi „mă urc la volan". La fel, nu este lăudată conduita unui individ care intră în biserică, fluieră şi dansează. În orice *comunitate şi în orice instituție sunt secvențe de acte care nu pot fi urmate de cineva fără ca autorul lor să fie dezavuat şi, eventual, pedepsit.*

2. $F(\alpha \cup \beta) \equiv F\alpha \wedge F\beta$

O alegere dintr-o mulțime de alternative este interzisă, dacă şi numai dacă, sunt interzise toate alternativele.

Alegerea are loc într-o situație acțională prezentă în care agentul trebuie să ia o decizie în privința conduitei sale viitoare. Decidentul trebuie, în acea situație, să exploreze alternativele de conduită, consecințele economice şi sociale ale acestora, dezirabilitatea şi valoarea stărilor accesibile, ținând seama, totodată, de abilitățile şi mijloacele de care dispune.

Putem, evident, analiza şi deciziile luate de cineva în trecut, dar nu le putem anula. Le putem doar dezavua pe temeiuri de ordin ştiințific, tehnic sau pe temeiuri de ordin moral sau juridic.

Următoarea regulă se referă la acțiunile făcute în paralel şi la relațiile lor cu interdicția.

3. $(F\alpha \vee F\beta) \supset F(\alpha \& \beta)$

Dacă este interzisă una dintre componentele unei compuneri paralele este interzisă compunerea paralelă însăşi.

Execuția în paralel este posibilă numai între acțiuni permise.

Într-un proiect ingineresc putem propune ca două acțiuni să fie efectuate în paralel, numai dacă ambele sunt permise în condițiile date.

Un agent poate executa două acțiuni simultane. Un interpret de muzică uşoară poate cânta şi dansa în acelaşi timp. Petru se poate plimba şi fuma în acelaşi timp. Echipa 1 poate face acțiunea u1, în timp ce echipa 2 face acțiunea u2 (dacă acestea sunt mutual compatibile. Cineva nu poate fuma alături de o persoană ce spală cu neofalină !.)

Universitatea Spiru Haret

4.$O(\alpha;\beta) \equiv (O\alpha \wedge [\alpha]O\beta)$

O secvență de acțiuni este obligatorie, dacă şi numai dacă, este obligatorie prima acțiune şi după executarea acesteia este obligatoriu restul secvenței.

Obligația secvențială cere, mai întâi, ca primul act să fie fezabil sau acțional posibil executantului şi, în plus, să-i fie impus de un factor de putere sau ca acesta să se simtă interior atras de rezultatul imaginat al actului (autoobligare sau angajare teleologică). Mai departe, fiecare stare rezultat atinsă trebuie să fie, sub raport ontic, punct de plecare pentru actul următor şi, în plus , sub raport normativ, acesta să-i fie impus ca o obligație.

Obligația serială este descriptibilă printr-o inducție matematică, printr-un algoritm sau o procedură.

5. $(O\alpha \vee O\beta) \supset O(\alpha \cup \beta)$

Dacă una dintre componentele unei alegeri este obligatorie, atunci alegerea însăşi este obligatorie.

Simbolul $\cup$ *anunță o alegere sau o decizie. Prezența unei obligații pentru un agent conformist aflat într-o situație de decizie îi anulează inițiativa sau libertatea de acțiune. El are de ales doar între a-şi respecta obligația impusă de sistemul de norme şi a evita astfel o eventuală sancțiune şi a-şi încălca obligația şi a pune pe prim plan scopurile şi interesele proprii. Multe situații sau noduri de decizie evocă în mintea decidentului conflicte între aspirațiile şi dorințele proprii şi cerințele ordonate de legiuitor sau alcătuitorul regulamentului pe care trebuie să-l respecte. Cândva am descris astfel situații cu ajutorul noțiunilor de conflict teleodeontic şi concordanță teleodeontică. Pentru cercetarea acestora avem nevoie de sisteme modale mixte.*

6.$O(\alpha \& \beta) \equiv (O\alpha \wedge O\beta)$

O compunere în paralel a două acte sau a două conduite este obligatorie, dacă şi numai dacă, toate componentele ei sunt obligatorii.

Compunerea paralelă descrie executarea simultană a unor secvențe de acte. O compunere paralelă este obligatorie dacă fiecare dintre actele executate simultan sunt obligatorii. De exemplu, un medic poate prescrie unui pacient, alături de tratamentul medicamentos, un anumit regim de viață.

Formula 6 este net distinctă de cunoscuta axiomă wrightiană despre distributivitatea functorului O față de conjuncție, $O(p \wedge q) \equiv (Op \wedge Oq)$. *În formula 6 simbolul & stă pentru legarea în paralel a*

Universitatea Spiru Haret

actelor umane şi nu pentru semnul conjuncției, redat şi de Mihai Barbuceanu, ca şi de către noi, prin simbolul ∧.

7. *P (α;β) ≡ <α>Pβ*

O secvență este permisă, dacă şi numai dacă, există un mod de a executa prima acțiune şi după care restul secvenței este permisă.

Formula <α>p se citeşte: „Este posibil să se obțină prin executarea conduitei α starea p”. Ea descrie atingerea unui rezultat printr-o procedură sau conduită dată şi ține de ceea ce noi numim logica modalităților acționale. În trecut, în sistemele propuse, noi am redat <α>p prin formula M (α, p) sau prin M (x, α, p) = „Este posibil pentru x să ajungă prin conduita α într-o stare ce satisface p”. În alte încercări am simțit nevoia să specific şi starea de start şi am folosit formule de forma M (q, α, p) = „Este posibilă să treci din q prin α în p” sau L (q, α, p) = „În mod necesar din q se trece prin α în p”. Ultima formulă descrie schema unei directive practice de forma: „Pentru a trece din q în p, trebuie să execuți secvența α”.

Evident, <α>p este mai slabă decât [α]p şi este implicată de către aceasta.

8. *P (α∪β) ≡ (Pα ∨ Pβ)*

O alegere (choice) este permisă, dacă şi numai dacă, este permisă cel puțin una dintre componentele ei.

Alegerea unei alternative are loc, desigur, după criterii specifice fiecărui domeniu şi fiecărui agent decident, după interesele, cunoştințele şi valorile la care aderă acesta. Alegerea unei alternative echivalează cu fixarea unui scop (angajare teleologică) sau luarea unei decizie.

Fiecare nod de decizie are un număr de alternative accesibile unui agent în funcție de abilitățile şi informațiile pe care le deține acesta. Noi am numit cândva aceste alternative „deschidere operațională” a agentului x în situația q.

9. P (α&β) ⊃ (Pα∧Pβ)

Dacă o compunere în paralel este permisă, atunci sunt permise toate componentele ei.

Altfel spus dacă o compunere în paralel (sau în acelaşi timp CP) conține o acțiune sau o secvență nepermisă, atunci întreaga compunere în paralel este nepermisă sau interzisă. Un măr putred strică întregul coş!

10. *(O (α∪β) ∧Fα ∧ Pβ) ⊃ Oβ*

Dacă o alegere este obligatorie şi o componentă din două este interzisă şi cealaltă este permisă, atunci cea permisă este obligatorie.

Universitatea Spiru Haret

Vom încheia observând că logica deontică trebuie întemeiată pe o teorie formală a posibilului acțional relativizat la agenți, situații acționale de start şi terminale, stări inițiale, stări scop, stări obligație, stări rezultat al unor acte comportamentale considerate, proiectate sau realizate. Ea mai trebuie întemeiată şi pe o teorie a abilităților umane şi pe distincția esențială dintre conceperea sau considerarea unui program şi execuția sau îndeplinirea acestuia. Vom vedea mai departe, că putem găsi şi alte întemeieri pentru introducerea operatorilor deontici „Este obligatoriu să …" sau „Trebuie să …" sau „Este interzis să …" sau „Trebuie să nu faci …". Ne vom referi în capitolul următor la întemeierea logicii deontice pe logica judecăților de valoare sau pe logica acceptării ca o variantă de axiologie formală.

10.4. *O semantică a logicii deontice dinamice pe arbori etichetați*

Putem asocia logicii deontice dinamice o interpretare sau un model pe teoria arborilor etichetați.

1. Acțiunile elementare a, b, c,… vor fi redate prin etichetele unor arce. Alfabetul actelor elementare îl vom nota prin: A = { a, b, c, d,…,v, w }

2. Fiecărui agent ag1, ag2,…îi vom asocia un subalfabet de acțiuni elementare. Mulțimea agenților va fi Ag = { ag1, ag2,.. . , agn }

3. Abilitatea lui, Ab (x), va consta din mulțimea cuvintelor scrise cu acest alfabet.

4. Conduitele sale permise vor fi selectate din mulțimea cuvintelor ce nu contrazic definițiile operatorilor deontici, interdicție, permisiune şi obligație

5. Nodurile vor desemna stări sau situații acționale s1, s2, … sn sau rezultate ale parcurgerii unor drumuri. Mulțimea stărilor o vom nota prin S.

6. Fiecărei stări sau situații acționale putem să-i asociem un model constând dintr-o listă de atomi predicativi instanțiați sau dintr-o listă de literali din logica propozițiilor.

7. Etichetele unor drumuri vor descrie secvențe de acte sau conduite.

8. Conduitele vor fi redate prin litere mici din alfabetul elen ca: α, β, χ, δ, λ, μ, π, θ, ρ, σ sau, pentru comoditate, prin literele u, s, v, cu sau fără indici inferiori şi vor fi privite ca nişte programe de acțiune. Fiecare literă grecească va reda de fapt o secvență de litere mici latine ce desemnează acte elementare de conduită. Literele

Universitatea Spiru Haret

greceşti sau literele latine s, t, u, v vor putea fi cuprinse între paranteze drepte de forma [α] , [u] sau ascuțite de forma <β>, < s> şi urmate de o variabilă propoziţională p, q, r, … sau de o formulă deontică de forma Fp, Pq. Formula [α]p va fi o formulă de logică dinamică cu semnificaţia că după orice execuţie a conduitei α se va ajunge la o stare în care formula p va fi adevărată. Ea descrie necesitatea în logica dinamică. Formula <β>q descrie posibilul logic dinamic cu înțelesul particular că cel puțin o dată după executarea conduitei β se ajunge la o stare în care p este adevărată

9. Formula p din [α]p descrie efectul sau rezultatul executării de către un agent a conduitei α. Vom vedea mai departe că această distincție este utilă pentru formularea unor scheme de inferență despre legătura dintre scopuri şi mijloace. Conduitele pot fi văzute ca mijloace de a atinge scopuri sau de a-ți realiza obligațiile definite pe stări.

10. Un nod în care poate ajunge prin conduita sa un agent şi din care pleacă mai multe drumuri va fi un nod de decizie sau de alegere. Drumurile ce pleacă din acelaşi nod vor descrie deschiderea operațională a agentului în acea situație. Cardinalul asociat mulțimii drumurilor de plecare din nod descrie de fapt numărul alternativelor de conduită.

11. Două conduite care pleacă din acelaşi nod vor putea fi interpretate ca fiind legate în paralel sau având duratele de execuție parțial intersectate.

12. Dacă toate rădăcinile arborilor vor aparține unei mulțimi inițiale I şi toate nodurile de pe „frunze" vor fi plasate într-o mulțime terminală T şi vom asocia fiecărui agent un arbore cu rădăcina în I şi vom defini o funcție de angajare teleologică de forma: τ: $Ag \times I \rightarrow T^2$, atunci vom putea descrie asumarea de către agenți a scopurilor generice şi aplica la modelul pe arbori teleologica noastră cu agenți. În plus, vom putea dezvolta o teorie a raporturilor scop mijloc.

13. Acelaşi model va putea fi interpretat şi ca un automat nedeterminist în spiritul teoriei prezentate de noi în [6].

14. Compunerea în serie a două conduite revine la juxtapunerea a două segmente dintr-un drum complet din arbore sau din automat.

Punctele de mai sus redau caracteristicile generale ale teoriei semantice pe care dorim să o construim. Dincolo de aceste relatări intuitive începe construcția tehnică propriu zisă. Aceasta va consta, pe de o parte, din reactivarea unor cunoştințe de teoria grafurilor şi în particular de teoria arborilor etichetați, de teoria automatelor

Universitatea Spiru Haret

nedeterministe, a gramaticilor generative şi a limbajelor formale, căci va trebui să definim unele noţiuni specifice ca cele de rădăcină, frunză, drum complet, sub-cuvânt, prefix, sufix , inducţia pe secvenţe sau conduite etc. Pe de altă parte, va trebui să definim conceptul de model într-un astfel de arbore şi de formulă de logică dinamică deontică adevărată într-un arbore T.

Cum în logica dinamică deontică intervin trei forme de compunere a secvenţelor, în serie notată prin; , în paralel notată prin & şi de alegere sau decizie notată prin $\cup$, va trebui să propunem definiţii semantice pentru adevărul unor formulele obţinute prin aceste operaţii şi pentru operatorii deontici care le prefixează.

Mai departe, va trebui să definim noţiunile de realizabilitate, infirmabilitate, validitate şi contradicţie, ca şi conceptul de consecinţă logică semantică.

Începem prin câteva definiţii preliminare de teoria grafurilor.

Fie T un arbore. Numim rădăcină a unui arbore un nod sau stare ce le precede pe toate celelalte din arbore.

$root\ (s_0, T) \equiv \forall s\ (s \in S: s_0 < s)$ (d1)

Numim drum complet în arborele T un drum care începe în s_0 şi se termină pe frunze. Admiţând că lucrăm cu mai mulţi arbori simultan şi că aceştia sunt aşezaţi orizontal cu rădăcina la stânga şi frunzele la dreapta vom include în mulţimea iniţială a unui automat I toate rădăcinile arborilor şi într-o mulţime terminală T toate nodurile frunzelor. Vocabularul de intrare în automat va fi reprezentat de alfabetul de acte elementare A. Funcţia de tranziţie va fi definită pe produsul cartezian $S \times A$ cu valori în S: $S \times A \rightarrow S$. Într-o primă etapă, când nu suntem interesaţi de actele de comunicare dintre agenţi, nu vom defini o funcţie de ieşire. Automatul va rămâne doar un acceptor. În [6] am folosit un şir de acceptoare nedeterministe pe care le-am făcut, pe rând, apte de a descrie datele şi duratele, scopurile şi obligaţiile, conduitele posibile şi conduitele efective, conduitele eficace şi erorile practice, conduitele legale şi cele ilegale etc.

Fie μ un drum, cp un simbol predicativ pentru drum complet (complete path). Atunci scriem:

$cp\ (\mu) \equiv (begin\ (\mu) = s_0) \wedge end\ (\mu) \in T$ *(d2)*

Dăm trei definiţii ce ţin de teoria limbajelor formale în sensul gramaticilor generative, dar care ne vor fi de folos în demonstrarea unor teoreme. Definim termenii de sub-cuvânt, prefix şi sufix.

Universitatea Spiru Haret

Evident, termenii de mai sus au interpretări în teoria conduitelor umane şi ne vor servi, în acelaşi timp pentru demonstrația prin inducție a unor teoreme.

Dsc. sw (v, u) ≡ ∃s∃t:svt = u *(d3)*

Dpref pref (s, u) ≡ ∃t: st = u *(d4)*

Dsuf suf (m, u) ≡ ∃s: sm = u *(d5)*

Prefixele şi sufixele sunt cazuri limită de sub-cuvinte. Prefixul este un sub-cuvânt inițial care nu are un precedent şi sufixul este un sub-cuvânt terminal care nu are succesor. Sub-cuvântul corespunde unei sub-conduite.

Definim, în continuare, pe structura de arbore, compunerile în serie şi în paralel.

Fie T un arbore etichetat pe post de structură de model.

DS1. Spunem că formulele u;t sunt o compunere în serie în arborele T a conduitelor u şi t, dacă şi numai dacă: 1. Există în T un drum complet μ care are eticheta m; 2. În m există un sub-cuvânt s care are pe m ca prefix şi pe t ca sufix. Simbolic:

$T \models u;t \Leftrightarrow \exists\mu[cp\ (\mu) \wedge (lab\ (\mu) = m) \wedge sw\ (s, m) \wedge pref\ (u, s) \wedge suf\ (t, s)]$

În formula de mai sus am folosit convențiile: cp = complete path; lab = label (etichetă); sw = subword; pref = prefix; suf = sufix

DS2. Spunem că două secvențe u şi t din arborele T sunt compuse în paralel, dacă şi numai dacă, există în T două drumuri complete μ_1 şi μ_2 având etichetele m_1 şi m_2 care au un prefix comun pe m_3 astfel încât m_3 compus în serie cu u este un sub-cuvânt în m_1 şi m_3 compus în serie cu t este un sub-cuvânt în m_2. Simbolic:

$T \models par\ (u, t) \Leftrightarrow \exists\mu_1\exists\mu_2[\ cp\ (\mu_1) \wedge cp\ (\mu_2) \wedge (lab\ (\mu_1) = m_1) \wedge (lab\ (\mu_2) = m_2) \wedge pref\ (m_3, m_1) \wedge pref\ (m_3, m_2) \wedge sw\ (m_3; u, m_1) \wedge sw\ (m_3;t, m_2)]$

Definiția de mai sus a secvențelor compuse în paralel poate să pară unor cititori contorsionată. Ea şi este astfel, căci ne-am reținut de la introducerea în definiție şi a numelor nodurilor. Definiția este dată la nivelul etichetelor şi nu la nivelul drumurilor. La nivelul drumurilor ne-am fi sprijinit pe ideea de nod de scindare din care pleacă două drumuri. Într-o logică dinamică ternară cu operatori de forma $s_1[\pi]s_2$, $s_1<\pi>s_2$, definițiile compunerilor în serie şi în paralel vor deveni mult mai simple şi mai intuitive. Sugerăm cititorului, ca un exercițiu instructiv, construirea acestor definiții.

Universitatea Spiru Haret

Propunem acum o interpretare pe arbori a actelor de decizie sau alegere făcută de un agent într-o stare sau situație acțională.

Noi distingem două clase de decizii: decizii de scop şi decizii procedurale, de program sau conduită. Deciziile de scop constau în alegerea de către agentul decident a unei stări terminale acțional posibile ce satisface aspirațiile şi exigențele valorice ale acestuia. Deciziile procedurale constau în explorarea şi alegerea unei metode de a atinge o stare țintă anterior fixată.

În lucrarea de față ne vom ocupa numai de deciziile procedurale care țin de logica dinamică. De teoria deciziilor de stare sau a angajărilor teleologice ne-am ocupat pe larg în sistemele noastre teleologice[8-11, 13]

DS3. Spunem că un agent x, aflat într-o situație acțională s face o alegere între o mulțime de conduite $[m_1,.. ., m_n]$*, dacă şi numai dacă:*

1. situația s este începutul drumurilor $[\mu_1, \mu_2,.. ., \mu_n]$*, i.e.*

begin $(s, [\mu_1, \mu_2,.. ., \mu_n]$*,*

2. Pentru un drum μ_i*,* m_i *este eticheta drumului* μ_i *şi desemnează o conduită sau un program iar mulțimea etichetelor drumurilor ce încep în s descrie toate conduitele accesibile direct din s.*

$\cup m_i = lab\ (\mu_i) \qquad 1 \leq i \leq n$

3. Agentul x are în situația s ca scop starea descrisă de propoziția p; goal (x, s, p)

4. Există în mulțimea conduitelor $[m_1, m_2,. . ., m_n]$ *o conduită* m_j *pe care agentul x o poate executa care se încheie cu atingerea stării scop ce satisface propoziția p;*

$\exists m_j\ (m_j \in \cup m_i \wedge M^a\ (x, s, m_j) \wedge [m_j]p)$

5. Executarea de către x a conduitei m_j *este legală, dacă şi numai dacă, orice stare rezultată din execuția conduitei* m_j *este legală; i.e.*

$legal\ (x, mj) = \forall w\ (\ (w \in S \wedge do\ (x, m_j)) \wedge [, m_j]w) \supset legal\ (x, w)$

iar conceptul de legalitate a unei stări atinse se definește ca în lucrările noastre mai vechi prin referire la interdicțiile şi obligațiile ce revin unui agent şi la conduitele efective ale acestuia[20-22].

Un agent poate avea o conduită ilegală pentru că a săvârşit o secvență de acte ce duce la o stare rezultat ce-i este interzisă. În acest caz el a săvârşit infracțiunea de a fi executat ceva ce-i este interzis. Încălcarea unei prohibiții este o ilegalitate.

$IL1\ (x, w) \equiv F\ (x, w) \wedge Do\ (x, u) \wedge [u]w$ (d6)

Universitatea Spiru Haret

O altă specie de ilegalitate de stare provine din faptul că un agent nu a săvârşit tot ceea ce trebuia să săvârşească astfel încât să asigure cu orice preţ atingerea unei stări rezultat ce-i era impusă ca obligatorie. Neatingerea unei stări rezultat, accesibile ţie prin abilităţile de care dispui şi la care erai obligat să ajungi este o specie de conduită ilegală. Ca agent executiv ţi se poate reproşa numai neexecutarea unei conduite pe care o puteai executa, erai obligat să o execuţi, dar tu nu ai executat-o.

$IL2\ (x, w) \equiv \exists u\ (u \in Ab\ (x) \wedge [u]w \wedge \text{-}Do\ (x, u)$ (d7)

Putem acum defini *conduita legală* ca o conduită diferită de ambele specii de conduite ilegale.

$legal\_result\ (x, w) \equiv \text{-}\ (IL1\ (x, w) \vee IL2\ (x, w))$ (d8)

Revenim acum la definirea alegerii sau a actului de decizie.

DS3[#] Spunem că un agent x, aflat într-o situaţie acţională s *face o alegere* în o mulţime de conduite $[m_1,.. ., m_n]$, dacă şi numai dacă:

$T \models ch\ (x, s,[m_1,m_2,..., m_n]) \Leftrightarrow$

1. $begin\ (s, [\ \mu_1, \mu_2,..., \mu_n])$;
2. $\cup m_i = \cup\ lab\ (\mu_i)$ $(1 \leq i \leq n)$;
3. $goal\ (x, s, p)$;
4. $\exists m_j\ (m_j \in [\ m_1, m_2,..., m_n] \wedge M^a\ (x, s, m_j) \wedge [m_j]w$;
5. $legal\ (x,w)$.

Definiţiile DS1-DS3 explică în semantica pe arbori compunerea serială a actelor şi compunerea lor în paralel. Ele propun regândirea semanticii logicii dinamice în vecinătatea teoriei acţiunii. Compunerea în paralel dă seama în opinia noastră de acte desfăşurate simultan de către agenţi diferiţi sau chiar de acelaşi agent. În ele nu apar explicit operatori deontici, ci doar agenţi, situaţii acţionale, abilităţi şi scopuri ale agenţilor, conduite sau programe şi operatori de logică modală şi stări rezultate din executarea unor conduite.

Pasul următor constă în captarea operatorilor deontici dinamici în semantica definită pe arbori.

Precedăm aceasta de introducerea unui procedeu inductiv.

Fie $u = a_1; a_2; a_3;.. .; a_n$ o secvenţă de acte. Pentru facilitarea inducţie matematice, ca în Prolog, scindăm orice secvenţă în primul element al secvenţei sau „capul" secvenţei şi în „restul" sau „coada" acesteia. Scriem aceasta sub forma: h (u); q (u). Mai departe, q (u) se scindează şi ea în capul cozii, h (q (u)) şi în coada cozii, q (q (u)). Cum însă cardinalul lui u este un număr finit, să zicem n, după n astfel de scindări, ajungem să considerăm drept „cap" ultimul element din

Universitatea Spiru Haret

secvența u şi drept coadă mulțimea vidă de elemente. Convenim să notăm conduita vidă prin η.

Să presupunem acum că are loc pentru un agent executiv oarecare obligația de a înfăptui secvența u, Ou. Prin acelaşi procedeu, vom putea conchide că dacă este obligatorie pentru un agent întreaga secvență, atunci este obligatoriu pentru acesta primul act sau „capul" şi după aceea este obligatoriu pentru el „coada". Procedeul se repetă, până .ce vom conchide că este obligatoriu ultimul element şi după aceea ultima coada a acestuia mulțimea vidă ce are cardinalul 0.

Dacă $u = a_1; a_2;.. . , a_n$ şi este obligatoriu u, i.e. are loc Ou, atunci va avea loc echivalența:

$Ou \equiv Oh\ (u); Oq\ (u)$ (d9)

Cum însă $h\ (u) = a_1$ şi $q\ (u) = a_2;a_3;.. . , ;a_n$ putem scrie în de (d6):

$Ou \equiv Oa_1; O\ (a_2;a_3;.. . , ;a_n)$ (d10)

După fiecare nouă scindare apare un nou cap marcat de operatorul O. In cele din urmă obținem formula:

$O\ (u_1; u_2;.. . , u_n) \equiv Oa_1;Oa_2; Oa_3;.. . , ;Oa_n)$ (d11)

Dar (d11) este analoga deontic-dinamică a unei bine cunoscute formule de logică deontică clasică luată de Georg von Wright ca axiomă în cel de al doilea sistem axiomatic de logică deontică standard. Deosebirea dintre (d11) şi axioma lui von Wright rezidă în faptul că în (d11) nu mai apare explicit operatorul $\wedge$, cum apare acesta în teoria wrightiană, locul lui fiind luat de conectivul serial; , care este de fapt relația binară succesor imediat astfel că $a_1; a_2$ se poate citi: „Succesorul lui a_1 este a_2". Logica deontică dinamică face uz de o relație de succesiune şi nu de operația conjuncție. În logica deontică dinamică întemeiată pe o relație de ordine nu poate apare un paradox de tipul celui semnalat de noi în paragraful 2 pe care l-am numit paradox al comutativității conjuncției.

Putem acum să definim în semantica pe arbori operatorii deontici dinamici pentru compunerile în serie, în paralel şi pentru actele de decizie sau alegere.

DOS. Spunem că o *secvență de acte este obligatorie într-un arbore model T*, simbolic $T \models O\ (u;t)$, dacă şi numai dacă:

$T \models u; t$

$T \models O\ (u; t) \equiv (Ou; Ot)$

$T \models [u; t]p \supset (Op \supset O\ (u; t))$

Condiția 1 postulează o condiție ce ține de infrastructura logicii deontice dinamice, de teoria posibilului acțional: secvențele de acte

Universitatea Spiru Haret

sau conduitele u şi t trebuie să fie compuse în serie în arborele T (vezi definiția DS1).

Condiția 2 reduce o obligație serială la obligația în ordine a fiecărei componente din serie şi invers.

Condiția 3 spune că dacă o stare rezultat a unei compuneri de conduite este obligatorie, atunci este obligatorie şi compunerea de conduite ce duce la acea stare rezultat. Dacă este acceptată o obligație de stare trebuie să fie acceptată şi o conduită ce duce la acea obligație de stare.

DPS. Spunem că o secvență de acte compuse în serie este permisă într-un arbore model T, simbolic $T \models P(u; t)$*, dacă şi numai dacă:*

$T \models u; t$

$T \models P(u; t) \equiv (Pu; Pt)$

$T \models P[u; t] \supset (\forall v\,(sw(v, u; t) \wedge [v]q) \supset Pq)$

Primele două condiții din definiția DPS sunt similare primelor două din definiția DOS de mai sus.

Condiția 3 afirmă că dacă este permisă o compunere serială a două conduite, atunci trebuie să fie permise toate stările rezultat obținute ca urmare a execuției unei sub-conduite din conduita compusă. Cerința 3 descrie un transfer de la permisiunile de conduite sau sub-conduite la permisiunile de stări rezultat.

DFS. Spunem că o secvență de acte compuse în serie este interzisă într-un arbore model T, simbolic $T \models F(u; t)$*, dacă şi numai dacă:*

$T \models u; t$

$T \models F(u; t) \equiv Pu; F\,t$

$T \models \forall v[\,(sw(v, u; t) \supset (Fv \supset F(u; t))]$

Obs. 1. Interdicțiile, ca şi obligațiile şi permisiunile se definesc pe mulțimea conduitelor acțional posibile. Nu are sens să interzici cuiva o acțiune care oricum acesta nu o poate executa.

Obs. 2. O compunere în serie este interzisă, dacă şi numai dacă, are un sufix acțional interzis.

Obs. 3. O compunere secvențială de conduite este interzisă dacă are o sub-conduită interzisă.

Definițiile DOS, DPS şi DFS introduc semantica logicii deontice secvențiale sau a compuneri în serie a conduitelor.

Nu am introdus în construcția noastră semantică agenții, scopurile şi abilitățile lor, ci ne-am limitat, deocamdată, la operatorii deontici ce

Universitatea Spiru Haret

determină conduite şi numai în trecere am menţionat legăturile acestora cu obligaţiile, interdicţiile sau permisiunile de stări rezultat.

Pasul următor va consta în definirea operatorilor deontici pentru conduitele desfăşurate în paralel.

DPO. Spunem că două *secvenţe de acte compuse în paralel sunt obligatorii într-un arbore model T*, simbolic $T \models O(u\&t)$, dacă şi numai dacă:

$T \models par(u, t)$ *(sau o notaţie alternativă* $T \models u\&t$ *)*

$T \models O(u\&t) \equiv Ou \& Ot$

$T \models [u]p \supset (Op \supset O(u))$

$T \models [t]q \supset (Oq \supset O(t))$

Obs. 1. Condiţia 1 este o condiţie preliminară la nivelul posibilului acţional.

Obs. 2. Obligaţia de a executa în paralel două secvenţe este tot una cu obligaţia de a executa în acelaşi timp secvenţa u şi secvenţa t.

Obs. 3. Condiţiile 3 şi 4 stipulează că dacă este obligatorie starea terminală a unei secvenţe de acte este obligatorie secvenţa însăşi.

Obs. 4. Compunerea în paralel descrie secvenţe de acte dintr-un plan preconizate a fi executate simultan de către acelaşi agent sau de către agenţi diferiţi. Expresia „*În timp ce* ag1 face u, ag2 face t".

Obs. 5. Vom distinge între preconizarea sau prevederea executării în paralel a două secvenţe de acte şi execuţia simultană a acestora.

Obs. 6. Este important de observat că două secvenţe prevăzute într-un plan ca executabile în acelaşi timp pot fi realizate uneori de către acelaşi agent şi în acelaşi loc sau de către agenţi diferiţi şi în locuri diferite. Simultaneitatea nu presupune în mod necesar şi coincidenţa sau vecinătatea spaţială.

DPF. Spunem că două *secvenţe de acte compuse în paralel sunt interzise într-un arbore model T*, simbolic $T \models F(u\&t)$, dacă şi numai dacă:

$T \models par(u, t)$ *(sau o notaţie alternativă* $T \models u\&t$ *)*

$T \models (Fu \vee Ft) \supset F(u\&t)$

$T \models [u]p \supset (Fp \supset F(u\&t))$

Obs. 1. Posibilitatea acţională a compunerii în paralel a două secvenţe de acte este o precondiţie pentru trecerea la promulgarea interdicţiilor, căci este un nonsens să interzici cuiva ceea ce acesta un poate orişicum face. Dănilă Prepeleac spunea că se abţine să arunce cu buzduganul în lună de teamă ca unii locuitori ai lunii de profesie

Universitatea Spiru Haret

fierari să nu i-l reţină acolo. Ca să te abţii de la ceva sau să-ţi interzică cineva să faci ceva trebuie mai întâi să poţi face acel lucru.

Obs. 2. Dacă una dintre conduitele preconizată a fi executată în paralel cu altele este interzisă atunci va fi interzisă întreaga compunere în paralel.

Obs. 3. Dacă o stare rezultată dintr-o conduită este interzisă, atunci este interzisă acea conduită şi o dată cu aceasta va fi interzisă orice compunere în paralel ce conţine acea conduită.

DPP. *Spunem că două secvenţe de acte compuse în paralel sunt permise într-un arbore model T, simbolic* $T \models P\ (u\&t)$*, dacă şi numai dacă:*

$T \models P\ (u\&t) \supset (Pu \wedge Pt)$

$T \models ([u]p \wedge [t]q) \supset (P\ (u\&t) \supset P\ (p\&q))$

Obs. 1 Pentru a putea norma ca permise anumite conduite compuse în paralel trebuie mai întâi ca acestea să fie accesibile unor agenţi sau fezabile. După terminologia noastră acţional posibile.

Obs. 2. Dacă este permis să executăm două secvenţe de acte în paralel, atunci este permisă fiecare dintre ele luată individual şi este adevărată conjuncţia acestor conduite permise.

Obs. 3. Dacă două secvenţe de acte sau conduite au ca stări terminale două stări în care sunt adevărate propoziţiile p şi q, atunci este permisă compunerea în paralel a celor două stări rezultat descrise de p şi q.

Pentru a încheia construcţia noastră semantică trebuie să combinăm operatorul alegerii $\cup$ sau ch (x, s, u) cu operatorii deontici dinamici O, F şi P.

DCO. *Spunem că o alegere făcută de un agent conformist x într-o situaţie s între opţiunile* $[u_1, u_2, \ldots u_n]$ *este obligatorie într-un arbore model T, dacă şi numai dacă:*

1. $T \models ch\ (x, s, [m_1, m_2, \ldots, m_n])$ *(sau* $T \models ch\ (x, s, [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n])$

2. $T \models O\ (x, s, [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n] \equiv \exists u_i\ (u_i \in [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n] \wedge O\ (x, s, u_i))$

Obs. 1. Prima condiţie ţine de întemeierea deciziei pe teoria posibilului acţional. Agentul decident *x* trebuie să se afle într-un nod sau situaţie s de bifurcare sau la „răscruce de drumuri": Aceste drumuri trebuie să fie etichetate cu acte elementare pe care agentul le poate executa (aparţin abilităţii acestuia). Mulţimea de conduite alternative $[u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n]$ constituie ceea ce noi numeam odinioară *deschiderea sa operaţională*. La capătul fiecăreia dintre conduite există stări terminale mai mult sau mai puţin dezirabile pe care agentul

Universitatea Spiru Haret

le poate evalua după propriile sale criterii sau după criteriile organizației pe care o reprezintă. Putem defini un cardinal al deschiderii operaționale pe care o are agentul x în situația s.

Obs. 2.Condiția 2 afirmă că o alegere este obligatorie pentru un agent x, dacă şi numai dacă, în situația s începe o conduită pe care agentul x este obligat să o urmeze. Se acceptă opinia că agentul x este un adept al respectării legilor sau un conformist. Prezența unei obligații pentru un agent conformist într-un nod de decizie îi anulează libertatea de opțiune.

DCF. Spunem că o alegere făcută de un agent conformist x într-o situație s între opțiunile $[u_1, u_2, \ldots u_n]$ *este interzisă într-un arbore model T, dacă şi numai dacă:*

1. $T \models ch\ (x, s, [m_1, m_2, \ldots, m_n])$ *(sau* $T \models ch\ (x, s, [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n])$

2. $T \models F\ (x, s, [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n] \equiv \forall u_i\ (u_i \in [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n] \supset F\ (x, s, u_i))$.

3. $(/[m_1, m_2, \ldots, m_n] /= n \wedge /m_i : F\ (x, s, m_i) /= p) \supset$
$/[m_j : P\ (x, s, m_j] /= n\text{-}p$

Obs. 1. Şi interdicțiile au un sens numai într-un spațiu de alternative de conduite accesibile agentului.

Obs. 2. O alegere într-o situație s este blocată sau interzisă dacă şi numai dacă sunt interzise toate conduitele alternative. Aceasta reprezintă o eroare de legiferare. Un membru al unei comunități trebuie să aibă în orice situație acțională o conduită accesibilă, chiar dacă aceasta îi este mai puțin convenabilă.

Obs. 3. Dacă agentul x are în situația s de ales între n conduite alternative (cardinalul deschiderilor operaționale este n) şi dintre acestea sunt interzise p (cardinalul conduitelor interzise este p), atunci numărul conduitelor eligibile va fi de n-p. Am folosit în 3 noțiunea de cardinal al unor mulțimi. Orice interdicție a unei conduite diminuează spațiul de opțiune cu o alternativă.

DCP. Spunem că o alegere făcută de un agent conformist x într-o situație s între opțiunile $[u_1, u_2, \ldots u_n]$ *este permisă într-un arbore model T, dacă şi numai dacă:*

1. $T \models ch\ (x, s, [m_1, m_2, \ldots, m_n])$ *(sau* $T \models ch\ (x, s, [u_1 \cup u_2 \cup \ldots \cup u_n])$

$T \models P\ (x, s, [m_1, m_2, \ldots, m_n]) \equiv P\ (x, s, m_1) \vee P\ (x, s, m_2) \vee \ldots \vee P\ (x, s, m_n)$

$T \models Free\ (x, s, [m_1, m_2, \ldots, m_n]) \equiv P\ (x, s, m_1) \wedge P\ (x, s, m_2) \wedge \ldots \wedge P\ (x, s, m_n)$

Universitatea Spiru Haret

Obs. 1. Permisiunea unui agent x aflat într-o situație acțională s de a alege dintre n conduite este definită într-un spațiu de conduite accesibile acestuia.

Obs. 2. O alegere a unui agent x aflat într-o situație s este permisă, dacă şi numai dacă, este permisă cel puțin o alternativă, i.e. nu-i sunt interzise toate alternativele.

Obs. 3. Un agent x aflat într-o situație s în care i se deschid n alternative sau n opțiuni este *liber să aleagă pe oricare dintre alternative*, dacă şi numai dacă, îi sunt permise *toate* alternativele.

Construcția semantică definită mai sus a avut două etape sau niveluri distincte Am construit mai întâi o interpretate semantică de tip logic dinamic pentru *acțiunile umane* legate în serie, în paralel şi pentru alegerile sau opțiunile făcute de către agenți în punctele de deschidere operațională. (Nu am adăugat o semantică pentru acțiunile repetate, ca în logica dinamică definită de V. Pratt şi D. Harel).

Cea de a doua etapă a constat în definirea operatorilor deontici interdicție, obligație şi permisiune pe speciile de conduite umane legate în serie, paralel sau la alegere.

În aceste două etape atenția noastră a fost concentrată asupra structurii de arbore, graf sau automat şi asupra agenților ce obligă sau sunt obligați, asupra situațiilor acționale inițiale şi asupra situațiilor acționale terminale.

Am făcut abstracție de structura logic predicativă a formulelor, de variabilele individuale, constantele individuale şi simboluri funcționale ce intervin în structura atomilor predicativi şi de conectivele logice ce intervin în formulele predicative complexe.

Întregirea semanticii noastre cu aceste aspecte ce țin de semantica logicii predicatelor şi logicii propozițiilor este la îndemâna oricărui cititor ce şi-a însuşit semantica logicii propozițiilor şi a logicii predicatelor. Aceste teorii semantice au fost prezentate în capitolele anterioare ale lucrării de față. A se vedea în acest sens capitolele 1 din vol. I şi cap 3 din secțiunea a doua din volumul I şi paragrafele 3.2 şi 4.2 din capitolul VII din volumul de față consacrate prezentării semanticii logicii dinamice. Aceasta va putea conduce la definirea conceptelor clasice de realizabilitate, validitate, infirmabilitate, irealizabilitate, consecință logică semantică.

Universitatea Spiru Haret

10.5. *Scheme de inferență în logica deontică dinamică*

În logica deontică clasică s-a păstrat o anumită ambiguitate asupra obiectelor vizate de operatorii deontici O, F, sau P astfel că Op putea să însemne că *starea* descrisă de propoziția p este obligatorie sau *conduita* descrisă de propoziția p este obligatorie sau amândouă la un loc.

Noi vom face o distincție netă între obligația unui agent de a atinge o anumită stare țintă şi obligația aceluiaşi agent de a urma o anumită conduită u încheiată cu o anumită stare t în care este satisfăcută o propoziție q.

O stare țintă poate fi atinsă, de regulă, prin mai multe căi. Pe de altă parte, o conduită, care durează în timp, poate trece prin mai multe stări intermediare şi se poate termina, după un interval într-o stare ultimă, intenționată sau nu. Un scop al capitolului de față este de a opera o distincție dintre aceste două specii de operatori deontici, unii definiți pe stări finale şi alții definiți pe conduite şi determina nişte reguli de trecere de la unii la alții.

Pentru început ne vom ocupa de reprezentarea conduitelor prin arbori etichetați.

Reprezentarea pe arbori sau pe grafuri a conduitelor umane introduce o relație de ordine strictă şi nu lasă spațiu de îndoieli şi ezitări, cum se întâmplă cu ordinea unor mulțimi de formule ce descriu acte. Două conduite alcătuite din aceleaşi acte elementare, dar în ordine diferită, nu mai sunt ca în logica deontică standard echivalente. „A murit şi l-a îngropat" nu mai e tot cu „L-a îngropat şi a murit".

Reprezentând conduitele prin drumuri etichetate ajungem să reprezentăm o conduită prin etichetele arcelor, respectiv prin secvența numelor actelor elementare. Fiecărei conduite îi corespunde un cuvânt scris în alfabetul actelor elementare.

Aceasta ne permite, între altele, să redăm structura unei conduite u într-o manieră inductivă, asemeni unei liste dintr-un program în Prolog.

Din motive de comoditate în redactare, în cele ce urmează nu vom nota conduitele prin litere din alfabetul elen α,β, χ, δ, γ etc. şi vom folosi pentru acestea litere de la mijlocul sau sfârşitul alfabetului ca: u, v, t, h, q.

$$u = [h \mid q] \qquad (1)$$

unde h stă pentru primul act sau „capul" conduitei (head) şi q stă pentru restul celorlalte acte sau „coada" (queue).

Universitatea Spiru Haret

Pe această cale obligația de a realiza o conduită o *u* se reduce la obligația de a realiza actul inițial *h* şi apoi în starea rezultată din execuția acestuia obligația de a rezulta restul celorlalte acte. Dar restul celorlalte acte este şi el un cuvânt q care şi el are un „cap", să zicem, h1 şi o „coadă", să zicem, q1. Şi procedeul de analiză se repetă. Cum numărul actelor este finit, să presupunem de cardinal n+1, vom ajunge la un cuvânt care are drept „cap" pe hn şi drept „coadă" pe qn = ϕ.

Obligația de a executa o secvență de acte sau o conduită se reduce la obligația de a executa, *în ordine*, fiecare act din care este alcătuită conduita.

$$Ou \equiv O(h;q) \equiv Oh \wedge [h]Oq \qquad (2)$$

Dar expresia (2) coincide cu formula 4 din capitolul 2. Echivalența (2) poate fi parcursă analitic sau reductiv, de la complex spre elementar şi poate fi parcursă sintetic sau constructiv de la simplu la complex.

O analiză similară putem întreprinde şi pentru interdicția unei secvențe de acțiuni.

$$Fu \equiv F(h;q) \equiv [h]\,Fq \qquad (3)$$

O secvență de acte sau o conduită este interzisă, dacă şi numai dacă, după executarea „capului" secvenței (a primului act al conduitei) este interzisă executarea restului conduitei.

O conduită este permisă dacă este permis sau primul act al conduitei („capul") şi după execuția acestuia este permisă executarea restului (a „cozii").

$$Pu \equiv P(h;q) \equiv Ph \wedge [h]\,Pq \qquad (4)$$

Nu am considerat necesar să mai stipulez posibilitatea acțională a lui h, deoarece, în viziunea noastră, logica deontică, precum şi teleologică se edifică pe infrastructura logicii modalităților acționale sub forma sa de logică dinamică acționalistă cu modele pe grafuri sau automate nedeterministe, apte de a fi transpuse în instrucțiuni Prolog.

Ne-am referit până acum la compunerea secvențială şi am considerat doar formule în care operatorii deontici determinau secvențe sau conduite.

Este nevoie să cercetăm relația dintre formulele deontice ce determină secvențe sau conduite şi cele care determină stări sau rezultate obținute ca urmare a execuției conduitelor şi să cercetăm interacțiunile dintre aceste două specii de formule deontice.

Vom scrie mai întâi o schemă de inferență care conduce de la o modalitate acțională la o modalitate stare rezultat (şi sub ea o teoremă

Universitatea Spiru Haret

inter-modală. (notată prin cs, dacă descrie o trecere de la o modalitate conduită la o modalitate stare şi sc dacă trecerea este invers.

$\{O(x, u), u \in Ab(x), [u]p\} \Rightarrow O(x, p)$ (5)

$(O(x, u) \supset O(x, p))$ (5cs)

Formula (5) se citeşte: Dacă un agent x apt de a executa conduita u este obligat să o execute şi aceasta are ca rezultat starea p, atunci agentul x este obligat să realizeze starea p.

Obligațiile de conduită se propagă în obligații de stări rezultate. Invers, interdicția de a atinge anumite stări conduce la interdicția tuturor conduitelor ce au ca rezultat acea stare. În speță, dacă îi este interzisă unui agent o stare rezultat, atunci i se interzice orice conduită a sa ce conduce la starea prohibită. Dacă am interzis o stare rezultat, interzic toate mijloacele de a o atinge.

$\{F(x, p), [u]p\} \Rightarrow F(x, u)$ (6)

$(F(x, p) \supset F(x, u))$ (6sc)

Dăm o regulă pentru tranziția de la conduite permise la stări permise.

$\{[u]p, P(x, u)\} \Rightarrow P(x, p)$ (7)

$(P(x, u) \supset P(x, p)$, unde p este rezultatul executării lui u) (7cs)

Dacă îndeplinirea conduitei u duce întotdeauna la starea p, atunci permisiunea de a executa u implică permisiunea de a atinge starea p. In loc de „starea p" este mai potrivit să spunem „o stare în care p este adevărat" sau o „stare ce satisface p". Implicația inversă nu este valabilă. Dacă este permisă atingerea stării p nu înseamnă că aceasta este permisă pe orice cale ce duce la p. Unele conduite ca mijloace de a atinge o stare rezultat pot denatura însuşi scopul prin daunele pe care le poate provoca metoda sau calea de realizare.

Conduitele pot fi interpretate ca metode, proceduri, tehnologii. Nivelul de performanță al unui agent depinde de mulțimea conduitelor sale încheiate cu stări rezultat relevante pentru comunitatea din care face parte. Orizontul posibilului acțional poate fi relativizat la un agent individual, la o echipă, la o întreprindere, la o corporație sau la societatea umană dintr-o epocă dată. De la posibilul acțional putem trece la stări rezultat.

$\{M(x, u), [u]p\} \Rightarrow M(x, p)$ (8)

$(M(x, u) \supset (M)x, p)$ (8cs)

Dacă un agent poate înfăptui o conduită care are ca rezultat starea p, atunci acesta poate realiza starea p. Avem de a face cu o tranziție de la o conduită la o stare rezultat ambele marcate de

Universitatea Spiru Haret

operatorul M (Mai exact ar fi să scriem în loc de M, M^a simbolul posibilului acțional.)

Dăm o schemă în care intervine operatorul Done (x, u) care se citeşte: „Agentul x a realizat conduita p".

$\{[u]p, Done (x, u)\} \Rightarrow Done (x, p)$ (9)

$(Done (x, u) \supset Done (x, p)$, dacă$[u]p)$ (9cs)

Din Done (x, p) se poate conchide M^a (x, p). Realizarea efectivă a unei performanțe atestă irefutabil abilitatea sau posibilul acțional al agentului.

O conduită este interzisă, dacă are o sub-conduită interzisă. Invers, o sub-conduită este obligatorie, dacă conduita ce o cuprinde este obligatorie. Avem schemele:

$\{sc (v, u), Fv\} \Rightarrow Fu$ (11)

Formula (11) afirmă că o conduită ce are un act interzis este şi ea interzisă.

$\{sc (v, u), Ou\} \Rightarrow Ov$ (12)

Formula (12) conchide de la caracterul obligatoriu unei conduite la caracterul obligatoriu al fiecărei sub-conduite componente.

Un agent poate *cunoaşte* sau *şti* (K (x, u)) să execute anumite conduite. Dacă un agent ştie să execute o conduită ştie să execute, *a fortiori* , orice sub-conduită a acesteia.

$\{K (x, u), sc (s, u)\} \Rightarrow K (x, s)$ (13)

Din contrapoziția lui (13) rezultă:

$\{-K (x, s), sc (s, u)\} \Rightarrow -K (x, u)$ (14)

Introducem o schemă ce priveşte învățarea unui agent z de la alți doi precursori ai săi x, şi y.

$\{K (x, u), K (y, v), t = u;v , K (z, K (x, u)), K (z, K (y, v)), K (z, t = u;v)\} \Rightarrow K (z, t)$. (15)

Dăm în continuare câteva scheme despre compunerea în paralel a unor acțiuni.

Două conduite sunt paralele dacă sunt concepute a fi executate simultan sau efectiv sunt executate simultan de acelaşi agent sau de agenți diferiți ce se află între ei în raporturi de cooperare sau competiție.

Dacă o secvență dintr-o compunere în paralel a două sau mai multe secvențe este interzisă, compunerea în întregul ei este interzisă.

$\{(u \& t), Fu\} \Rightarrow F (u \& t)$ (16)

Fie secvențele $u_1,u_2,\ldots, u_n$ compuse în paralel, respectiv $(u_1 \& u_2 \& \ldots \& u_n)$. Atunci din obligația compunerii în paralel a acestor secvențe (conduite) rezultă caracterul obligatoriu al fiecărei secvențe (conduite).

Universitatea Spiru Haret

$\{O(u_1 \& u_2 \& \ldots \& u_n)\} \Rightarrow Ou_i, \ 1 \le i \le n.$ (17)

Dacă este permisă o compunere paralelă a unor conduite este permisă fiecare dintre conduitele paralele.

$\{P(u_1 \& u_2 \& \ldots \& u_n)\} \Rightarrow Pu_i, \ 1 \le i \le n.$ (18)

Dăm, în sfârşit, câteva scheme despre alegere sau decizie.

$P(s \cup t) \Leftrightarrow (Ps \vee Pt)$ (19)

$(Os \vee Ot) \Rightarrow O(s \cup t)$ (20)

$\{P(s \cup t), Fs\} \Rightarrow Pt$ (21)

$F(s \cup t) \Leftrightarrow (Fs \wedge Ft)$ (22)

Acestea spun:

Alegerea între mai multe conduite este deductiv echivalentă cu disjuncţia dintre permisiunea fiecăreia dintre ele (19).

Dacă într-un nod de decizie una dintre alternative este obligatorie, atunci decizia este obligatorie. De fapt, obligaţia anulează pentru un agent conformist libertatea de alegere (20).

Permisiunea de a alege între două alternative şi interdicţia unei dintre ele, conduce la permisiunea celeilalte (21)

Interdicţia unei alegeri este logic echivalentă cu interdicţia tuturor alternativelor (22).

10. 6. *Întemeierea logicii deontice pe logica acceptării*

Ne propunem să prezentăm aici două tentative de fundamentare a logicii deontice dinamice pe logica acceptării. Logica acceptării va fi prezentată de sine stătător în capitolul următor.

Admitem, pentru început o definiţie a interdicţiei într-o logică deontică cu agenţi de forma celei propuse odinioară de A.R. Anderson [1].

D1. $F(x, p) =_{df} L(Do(x, p) \supset S(x, p))$

Îi este interzisă agentului x conduita încheiată prin starea p, dacă şi numai dacă, săvârşirea ei reclamă, *în mod necesar*, sancţionarea acestuia.

Admiţând definiţia D1 putem introduce, după uzanţa acceptată în logica deontică, definiţiile pentru permisiune, obligaţie, libertate şi coerciţiune:

D2. $P(x, p) =_{df} -F(x, p)$

D3. $O(x, p) =_{df} F(x, -p)$

D4. $Liber(x, p) =_{df} P(x, p) \wedge P(x, -p)$

D5. $Constr(x, p) =_{df} F(x, p) \vee O(x, p)$.

Universitatea Spiru Haret

Să introducem acum în definițiile noastre componenta logic dinamică. Admitem că o stare p marcată de un operator deontic este rezultatul execuției unei conduite sau a unui program π. Atunci *agentului x îi este interzisă producerea stării p*, dacă şi numai dacă, după *orice* execuție de către *x* a programului π ce are ca rezultat starea *p*, îl face pe *x,* în mod necesar, sancționabil pentru atingerea stării p.

D1. F (x, p) = $_{df}$ [x, π]p; S (x, p)*

Putem construi pornind de la definiția *D1*,*prin analogie cu D1 şi D2-D5 definițiile *D2* - D5** pentru operatorii deontico-dinamici derivați:

D2 P (x, p) ≡ -F (x, p) ≡ $_{df}$ [x, π]p; - S (x, p)*

D3. O (x, p) ≡ F (x,- p) ≡ [x, π] -p; S (x, -p)*

D4. Liber (x, p) ≡ ([x, π]p; - S (x, p))∧ ([x, π] -p; - S (x,- p))*

D5.Constr (x, p) ≡ ([x, π]p; S (x, p)) ∨ ([x, π] -p; S (x,- p))*

Am introdus mai sus interpretarea dinamică a operatorilor deontici. Putem acum trece la îndeplinirea obiectivului nostru principal privind reconstruirea logicii deontice ca o derivare din logica dinamică şi din logica acceptării. Propunem pentru aceasta două versiuni ale conceptului de interdicție, de la care pornind introducem ceilalți operatori, permisiunea, obligația şi la nevoie, constrângerea şi libertatea.

Prima versiune: V1

Prima definiție a interdicției este mai tare decât a doua, dar a doua ne pare mai aproape de realitatea socială şi pe deplin concordantă cu sistemul instituțiilor democratice. Luăm mai întâi în considerare prima versiune.

Spunem că stare p rezultată din conduita α a unui agent oarecare x din comunitatea C este interzisă în comunitate, dacă şi numai dacă, starea p este *respinsă* de către *toți* membrii comunității:

DV1.1. F (x, p) ≡ ∀x ∀y[(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ⊃ ((y∈C ∧ y ≠x) ⊃ R (y, p))]

Definim, în continuare permisiunea ca non-interdicție:

D2V1.2. P (x, p) ≡ -F (x, p) ≡ - ∀x ∀y[(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ⊃ ((y∈C ∧ y ≠x) ⊃ R (y, p))] ≡ ∃x∃y -[(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ⊃ ((y∈C ∧ y ≠x) ⊃ R (y, p))] ≡ ∃x∃y [(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ∧ - ((y∈C ∧ y ≠x) ⊃ R (y, p))] ≡ ∃ x∃ y [(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ∧ (y∈C ∧ y ≠x)) ∧ - R (y, p)]

D2V1.2 poate fi redată, pe scurt, ca:

D2V1.2 P (x, p) ≡ ≡ ∃x∃y [(x∈C ∧ α∈Ab (x) ∧ [α]p) ∧ (y∈C ∧ y ≠x)) ∧ - R (y, p)]

Universitatea Spiru Haret

DV1.2 afirmă că o stare p a unui agent din C rezultată din conduita sa α este *permisă* acestuia de către comunitate, dacă şi numai dacă, *există în C un alt agent care îi tolerează starea p.*

Potrivit definiţiei D2 din tabelul 4 cap. 3, *tolerabilitatea* este tot una cu nerespingerea unei stări atinse prin conduită şi are două forme: acceptarea stării şi rămânerea în dubiu faţă de acceptarea sau respingerea ei.

Tot pornind de la *D1*** introducem definiţia obligaţiei:

DV1.3. $O(x, p) \equiv \forall x \forall y[(x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]\text{-}p) \supset ((y \in C \wedge y \neq x) \supset R(y, \text{-}p))]$

Definiţia *DV1. 3* spune că o stare p rezultată dintr-o conduită α este *obligatorie* pentru un agent *x*, dacă şi numai dacă, contrară ei, *- p*, este respinsă de către *toţi* membrii comunităţi. Contrara unei stări este negaţia sau absenţa ei, respectiv neexecutarea conduitei ce duce la realizarea ei.

Câteva observaţii finale privind versiunea V1 vor fi probabil utile.

Obs. 1. Interdicţia, ca operator deontic ce descrie actele prohibite este definită pe baza unor concepte de logică dinamică relativizate la agenţi şi pe baza judecăţilor de valoare emise de membrii unei comunităţi. În viziunea adoptată de noi, logica deontică presupune logica dinamică şi teoria abilităţilor.

În elaborarea normelor, interdicţiile şi obligaţiile impuse membrilor unei comunităţi trebuie să se sprijine pe teoria posibilului acţional şi pe respectarea tuturor condiţiilor necesare ale menţinerii vieţii. Nu putem obliga pe cineva să îndeplinească o sarcină peste puterile sale, şi nici să-i interzicem prin prescripţii satisfacerea unor cerinţe vitale.

Obs. 2. Interdicţia unui agent *x* de a atinge o stare *p* este condiţionată de *respingerea* speciei de conduită executată de el de către *toţii* membrii comunităţii din care face parte. Dacă un singur agent din comunitate i-ar tolera conduita, atunci interdicţia nu ar mai avea loc !. Evident, conceptul de interdicţie astfel definit este excesiv de tare şi se distanţează mult de practica curentă a judecăţilor de valoare din comunităţile umane reale.

În mod analog, permisiunea derivată din *DV1.1* este una excesivă foarte largă, neutilizabilă. Cuiva dintr-o comunitate îi este *permis* să execute o acţiune oarecare, dacă există în acea comunitate *un* individ care *nu respinge* rezultatul acţiunii săvârşite de acesta.

Universitatea Spiru Haret

Obs. 3. Teoria logică a normelor valabile într-o comunitate trebuie să fie, în viziunea noastră, dependentă de teoria judecăților de valoare din acea comunitate. Teoria valorilor stă la baza teoriei normelor. Mai mulți filosofi au formulat de-a lungul secolelor astfel de puncte de vedere.

A doua versiune: V2

Avem nevoie de un concept mai slab de interdicție care să nu se întemeieze pe respingerea de către toți, ci doar pe respingerea de către *majoritatea* membrilor comunității. Dacă o anumită conduită este respinsă de către majoritatea membrilor, înseamnă că dintre ceilalți, mai puțin de 49 la %, o parte o *acceptă* şi alta *rămân indecişi* în privința ei. Căci, nu trebuie să uităm că în logica acceptării avem ca teoremă:

$A(x, p) \vee R(x, p \vee D(x, p)$ (vezi şi P3 din cap. 3)

Conceptul slab de interdicție susține că o stare p rezultată din conduita α agentului este interzisă, dacă şi numai dacă, ea este respinsă de *majoritatea* membrilor comunității.

Introducem cea de a doua variantă, notată prin V2, a reducerii conceptelor logicii deontice dinamice la logica logica acceptării. Dăm, mai întâi, definiția formală a *interdicției „slabe”*.

DV2.1 $F(x, p) \equiv \forall x \forall y[(x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p) \supset (y \neq x \supset / \{ x \in C:R(y, p) \} / \geq / C // 2]$

O stare terminală *p* rezultată din conduita α a unui agent oarecare din *C* este interzisă, dacă şi numai dacă, majoritatea membrilor din *C* diferiți de *x* , resping starea *p.* Aceasta este redată în definitor prin faptul că numărul celor care exprimă cardinalul mulțimii celor ce resping starea p este cel puțin egal cu numărul ce descrie jumătate din cardinalul comunității.

Putem defini majoritatea ca un predicat binar:

DMaj maj (B,C) $\equiv / B / \geq / C // 2$

Spunem că mulțimea B desemnează cel puțin majoritatea din mulțimea de referință C, dacă şi numai dacă, cardinalul lui B este mai mare sau egal cu jumătatea cardinalului lui C. În definiția interdicției în versiunea V2 (vezi, mai sus, DV2.1) mulțimea celor ce resping starea rezultată din conduita α, starea în care este adevărat p are cardinalul mai mare sau egal cu jumătate din cardinalul lui C, mulțimea membrilor comunității. (Simbolic: $| \{ x \in C:R(y, p) \} | \geq | C | / 2$). Astfel definită, interdicția are un temei social, moral, căci se întemeiază pe atitudinea şi judecata de valoare a majorității membrilor unei comunități.

Universitatea Spiru Haret

Pe baza definiției interdicției slabe (vezi DV2.1), introducem definițiile permisiunii şi obligației.

DV2.2. $P(x, p) \equiv -F(x, p) \equiv - \forall x \forall y[(x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p) \supset (y \neq x \supset |\wr x \in C:R(y, p) \wr| \geq |C|/2] \equiv \exists x \exists y -[(x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p) \supset (y \neq x \supset |\wr x \in C:R(y, p) \wr| \geq |C|/2] \equiv \exists x \exists y (x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p \wedge y \neq x) \wedge - (|\wr x \in C:R(y, p) \wr| \geq |C|/2) \equiv \exists x \exists y (x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p \wedge y \neq x) \wedge |\wr x \in C:R(y, p) \wr| < |C|/2$

Legând direct primul termen al echivalenței de ultimul putem scrie:

DV2.2. $P(x, p) \equiv \exists x \exists y (x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]p \wedge y \neq x) \wedge |\wr x \in C:R(y, p) \wr| < |C|/2$

Conceptul de *permisiune* propus de definiția DV2.2 (obținută pe baza lui DV2.1) ne spune că unui agent din comunitatea C îi este permis să execute o acțiune α având ca rezultat starea p, dacă şi numai dacă, cei care resping rezultatul sau starea p sunt mai puțini decât jumătate din membrii comunității. Îți este permis tot ceea ce nu îți este respins de majoritatea membrilor comunității căreia îi aparții.

Definim în continuare obligația.

DV2.3. $O(x, p) \equiv \forall x \forall y[(x \in C \wedge \alpha \in Ab(x) \wedge [\alpha]-p) \supset (y \neq x \supset |\wr x \in C:R(y,- p) \wr| \geq |C|/2]$

Starea $-p$ este rezultatul omiterii sau neexecuției, deliberate sau din culpă de către agent a conduitei α, ce ar fi dus la adevărul descripției p.

Definiția DV2.3. spune că starea descrisă de propoziția *p* este *obligatorie* pentru un agent ce deține capacitatea de a executa conduita α, dacă şi numai dacă, starea $-p$, rezultată din neexecuția de către agent a lui α, este *respinsă de mai mult de jumătate* din numărul membrilor comunității de referință C. Eşti obligat să faci o acțiune deoarece starea la care se ajunge prin omiterea ei de către tine este percepută de majoritatea membrilor comunități ca un neajuns, carență sau pierdere în buna funcționare a comunității.

Fiecare dintre versiunile cercetate întemeiază logica deontică dinamică pe teoria judecăților de valoare sau pe ceea ce noi am numit „logica acceptării".

Aceasta înseamnă că putem deriva din sistemul de logica acceptării mai multe versiuni de logică deontică, dacă convenim să cercetăm de fapt atitudinile şi judecățile de valoare ale membrilor unei comunități şi să formulăm nişte reguli de conduită în concordanță cu acceptările şi respingerile acestora. Regulile de conduită pe care le vom formula vor trebui să satisfacă exigențele tripletelor de definiții date pentru varianteleV1 şi V2.

Universitatea Spiru Haret

*

Logica acceptării poate fi privită ca o axiologie universală, ca o teorie generală a judecăţilor de valoare, esenţială pentru întemeierea raţională a unui punct de vedere, a unei soluţii date unei probleme, a unei decizii sau a unui program. Logica acceptării este o componentă sau un modul central într-un vast program de logică a acţiunii care cuprinde ca unităţi logica modalităţilor acţionale, teleologica ca teorie a scopurilor şi programelor, teoria organizaţiilor (agent colectiv) şi a structurilor ierarhice, logica relaţiilor de cooperare, competiţie şi conflict, logicile deontice, logica preferinţelor. Ea poate fi văzută ca o disciplină de nivel metateoretic care cercetează judecăţile de valoare, atitudinile şi evaluările date de agenţi, criteriile şi temeiurile acestora.

Argumentarea ca teorie logică aplicată la o situaţie acţională se ocupă de întemeierea discursivă a judecăţilor de valoare făcute de către agenţi şi de disputa dintre interlocutori. Putem accepta o teză pentru că este adevărată, pentru că este justă sau echitabilă.

Putem accepta o soluţie pentru că este legală. Putem accepta un program pentru că este eficace şi accesibil nouă. Preferăm sau acceptăm cu încântare o actriţă pentru că este frumoasă şi talentată şi un violonist pentru că este virtuos şi sensibil. Logica acceptării are un spectru mai larg decât sistemele de logică clasică. Aceasta poate fi văzută şi din tabelul următor reprodus din lucrarea noastră [7].

$\models\alpha$ $\models A\alpha$ 1	$\alpha=\perp$ $R\alpha$ 2	K (x, w, p) A (x, w, p) 3	B (x, w, p) A (x, w, p) 4	B (x, w, K) $K \models p$ A (x, w, p) 5	S (x,w,p) A (x,w, p) 6

Tabelul 4. Conexiuni între logica acceptării, logica clasică şi logicile modale

Tabelul 4 stabileşte o punte între logica acceptării, pe de o parte şi logica clasică, logicile epistemice, doxastice şi teleologică pe de altă parte.

Accept α,deoarece α este o lege logică.

Resping α deoarece este o contradicţie.

Agentul x acceptă în starea w p, deoarece x ştie în starea w că este adevărat p.

Universitatea Spiru Haret

Agentul x acceptă în starea w p, deoarece x crede în starea w că p.

Dacă x crede în starea w opiniile K şi din acestea se deduce p, atunci x acceptă p.

Dacă x îşi asumă în situaţia w scopul descris de p, atunci x acceptă în w propoziţia p.

Concluzii

1. Ne-am propus în capitolul de faţă o dublă întemeiere a logicii deontice. Mai întâi, am întemeiat logica deontică pe o teorie a modalităţilor acţionale sau a posibilului acţional relativizat la agenţi şi la situaţii acţionale şi, în al doilea rând, am întemeiat logica deontică dinamică creată de J.J.Ch. Meyer pe logica acceptării ca o teorie generală a judecăţilor de valoare.

2. Logica deontică sub forma sa standard sau sub forma sa de logica deontică dinamică nu poate fi legată direct de logica modală aletică, aşa cum au încercat, cu decenii în urmă, profesorii A.R Anderson şi Stig Kanger.

Nu susţinem că definiţiile propuse de distinşii înaintaşi n-ar fi fost fertile şi instructive. Dorim doar să insistăm asupra faptului că *între modalităţile deontice şi cele aletice se interpun modalităţile acţionale*.

3. Logica deontică presupune ca infrastructură o teorie a fezabilităţii sau a posibilului acţional de care au nevoie inginerii şi managerii ce elaborează planuri sau programe de acţiune, de care au nevoie constructorii de sisteme expert şi de programe de inteligenţă artificială cu aplicaţie în domeniul ştiinţelor sociale.

4. Logica propoziţiilor asertorice de care s-a ocupat logica clasică şi logica matematică, logica propoziţiilor şi logica predicatelor, instrumente create pentru fundamentarea disciplinelor matematice, nu epuizează aria disciplinelor logice necesare în mileniul trei.

5. Logica nu se limitează la enunţurile declarative; ea se extinde dincolo de orizontul descripţiilor şi de valorile de adevăr 1 şi 0; *ea dă seama de discursul raţional sub toate formele sale*, *se ocupă de argumentare care este logică aplicată la o situaţie acţională.* Teoria argumentării pe care am dezvoltat-o în ultimii ani face uz de o logică pragmatizată, cu agenţi, situaţii acţionale, scopuri, judecăţi de valoare. Logica este astăzi din ce în ce mai mult interesată de *lumea scopurilor şi mijloacelor, de decizii şi programe, de concordanţa şi conflictele dintre opinii, programe şi conduite.*

Universitatea Spiru Haret

6. Logica judecăților de valoare, teoria acceptărilor şi respingerilor, a problematizării şi a dubiului, care cercetează toate enunțurile legate de acțiunile umane, decizii, programe, oferte etc. (vezi în capitolul următor Tabelul 1 cu cele 20 de specii de acte) poate fi privită deopotrivă ca o teorie logică a opiniilor şi ca o teorie logică a întemeierii deciziilor, programelor şi conduitelor umane. Alegerea, evaluarea mediului, acceptarea şi respingerea sunt atribute fundamentale ale deciziilor umane şi într-o formă specifică a oricărui sistem viu. Structurile formale ale sistemelor de logica acceptării descriu mecanisme de scheme de conduită rațională care pot apare în clase diferite de activități umane.

7. Principalul rezultat al cercetării de față îl constituie *construirea unei teorii semantice pe arbori pentru logica deontică dinamică şi pentru logica deontică pe stări rezultate din conduitele umane.* Construcția semantică propusă dă seama de conduitele umane posibile şi de stările terminale accesibile prin conduite, ca şi de stările intermediare.

8. Un rezultat minor al cercetării de față este *descoperirea unui nou paradox* ce apasă asupra calității logicii deontice standard. Important este faptul că acest paradox este exclus într-o logică deontică dinamică, care face uz de secvențe de acte sau de conduite.

9. Teoria logică a posibilului acțional am dezvoltat-o în cadrul unor limbaje formale dezvoltate pe arbori etichetați şi pe baza unor limbaje formale generate de mai multe specii de acceptoare nedetermi-niste.

10. Atât teoria posibilului acțional, cât şi variantele de logică deontică dinamică sau de teleologică, dată fiind semantica lor pe arbori şi pe automate nedeterministe pot fi convertite lesne în programe Prolog.

11. Teoriile logice explorate sunt teorii logice pragmatizate care asimilează dimensiuni şi aspecte noi ale activităților umane cum sunt agenții, scopurile acestora, abilitățile agenților, relațiile dintre scopuri şi mijloace, compunerea secvențelor de acte în serie, în paralel sau analiza actelor de decizie.

12. Am arătat că operatorii deontici pot fi definiți pe secvențe de stări sau conduite, dar şi pe stări terminale sau intermediare. Am cercetat în capitolul IV mai multe scheme de inferență care leagă cele două clase de operatori deontici.

13. Este ispititoare perspectiva construirii unei logici dinamice ternare având operatori dinamici de forma $s_1[\pi]s_2$, $s_1<\pi>s_2$, unde s_1 stă pentru stare inițială la care se aplică programul π sau secvența de acte şi s_2 stă pentru starea rezultat obținută după executarea programului.

Universitatea Spiru Haret

Logica deontică ternară dă seama de relaţiile dintre o stare iniţială o stare scop şi programul care poate transforma starea iniţială într-o stare scop.

Acestea pot fi legate uşor prin instrucţiuni Prolog şi descrie ceea ce noi am numit directive practice.

do (x,s_1, u):- goal (x, s_1, s_2), u$\in$Ab (x), s_1[u] s_2

Agentul x execută în situaţia s_1 conduita u dacă s are în situaţia s_1 drept scop starea s_2 deţine abilitatea de a executa u şi conduita u duce în toate cazurile din s_1 în s_2.

O logică dinamică ternară este adecvată pentru o teorie a dependenţelor necesare ca şi pentru o teorie a dependenţelor posibile sau probabile.

14. Capitolul V rezumă câteva caracteristici ale logicii acceptărilor, prezentată de noi în alte articole pentru a putea fi folosită în fundamentarea axiologică a logicii deontice. Este un vechi deziderat ca operatorii deontici, normele de conduită, obligaţiile şi interdicţiile să poată fi întemeiate pe ideile de bine şi de rău. Acceptarea şi respingerea , dubiul sunt atitudini axiologice de bază.

Putem trece de la un sistem ternar de logica acceptării la o teorie logică asertorică bivalentă. Anulăm cea de a treia valoare, dubiu şi restrângem domeniu la propoziţiile declarative. Mai departe, înlocuim valorile de acceptat şi respins cu cele de adevăr sau fals. Conjuncţia va lua valoarea minimă dintre valorile celor două „argumente"; disjuncţia va lua valoarea maximă dintre ele. Negaţia devine un inversor de valoare.

15. Am văzut că logica deontică dinamică poate fi fundată pe teoria judecăţilor de valoare a membrilor unei comunităţi de referinţă. Vom edifica logica deontică pe baza cunoaşterii judecăţilor de valoare ale membrilor unei comunităţi. Acestea pot fi evidenţiate de anchete de psihologie socială şi prin anchete şi sondaje sociologice. O dată cunoscute acestea, putem trece la codificarea normativă sau la formularea regulilor de conduită. Putem adopta versiunea V2 şi să interzicem orice conduită ce duce la stări finale respinse de majoritatea indivizilor adulţi din comunitate. Vor fi obligatorii toate acele conduite ce conduc la stări terminale a căror absenţă comunitatea o califică drept inacceptabilă şi demnă de a fi sancţionată.

16. Fundamentarea propusă de varianta V2 pentru o teorie logică deontică dinamică este în linii mari compatibilă cu exigenţele unui sistem politic democratic, căci pune la baza promulgării normelor de conduită atitudinile şi opţiunile membrilor comunităţii de referinţă.

Universitatea Spiru Haret

17. Accentul a căzut în cercetarea de față pe dubla întemeiere a logicii dinamice, ontic acționalistă și axiologică și nu pe o tratare axiomatică sau pe definirea unor procedee de decizie. Putem încerca în alte studii viitoare, deopotrivă, o tratare axiomatică sau definirea unor procedee de decizie.

18. O direcție de cercetare atractivă este dezvoltarea pe modelul semantic prezentat a unor sisteme modale mixte și cu operatori modali iterați de forma A (x, s,O (y, z, s_1, Do (z, s_2, u;t))) care spune că „Agentul x acceptă în situația s, ca y să oblige pe z în situația s1 ca z să execute în situația s_2 secvența serială u;t."

Probleme de logică deontică

1. Geneza logicii deontice.
2. Modalitățile aletice și alte specii de modalități.
3. Sistemele wrightiene P și O.
4. Logica deontică standard și sistemele modale normale.
5. Pătratul logic, hexagonul logic și relațiile dintre operatorii deontici monadici.
6. Limitele sistemelor de logică deontică monadică.
7. Sistemele de logică deontică diadice.
8. Sistemele deontice monadice Smiley –Hanson și conceptul de normalitate Lennart Aqvist.
9. Sistemele OM și OS4.
10. Sistemele OB și OS5.
11. Relațiile dintre sistemele Smiley –Hanson.
12. Demonstrabilitate și consistență în sistemele de logică deontică.
13. Semantica sistemelor Smiley – Hanson.
14. Validitate și realizabilitate în sistemele Smiley – Hanson.
15. Noncontradicția sistemelor Smiley –Hanson.
16. Completitudinea sistemelor Smiley –Hanson.
17. Logica deontică dinamică.
18. Logica deontică și modalitățile acționale.
19. Un nou paradox în logica deontică. Paradoxul comutativității conjuncției obligațiilor.
20. Logica deontică dinamică a lui J.J.Cr. Meyer.
21. Semantica logicii deontice dinamice pe arbori etichetați.
22. Scheme de inferență în logica deontică dinamică.
23. Întemeierea logicii deontice pe logica dinamică și pe logica acceptării.

Universitatea Spiru Haret

Cap. 10. **LOGICA ACCEPTĂRII**

Revenim, Vingt Ans Après, ca în Al. Dumas tatăl, asupra unor tentative şi îndeletniciri care ne-au reţinut odinioară atenţia. În anii 1980 am propus, în vreo trei articole şi comunicări, o teorie logic formală despre ideea de acceptare a unor enunţuri, declaraţii sau ipoteze şi despre consecinţele logice ale acestora. Ceea ce accepta sau respingea atunci un subiect cunoscător erau nişte axiome sau ipoteze, nişte date de intrare şi ceea ce ne preocupa erau consecinţele logice ale acceptărilor făcute de subiecţii cunoscători. Ideea subiacentă era că intelectul nostru procedează ca un automat epistemic: dacă am acceptat anumite principii şi reguli şi acceptăm anumite date de intrare, atunci nu putem, ca fiinţe raţionale, să nu acceptăm consecinţele logice ce derivă din primele.

Astăzi problematica logicii acceptării îmi revine în minte în alte contexte şi din cu totul alte considerente. Ne interesează acceptările şi respingerile a doi sau mai mulţi subiecţi cunoscători implicaţi într-o dispută argumentativă. Şi în plus, astăzi suntem tentaţi să legăm teoria logică a acceptărilor şi respingerilor de teoria deciziilor şi axiologia formală, de teoria raporturilor de cooperare şi conflict dintre agenţii individuali şi colectivi.

Capitolul de faţă este un rezumat al unei cercetări mai extinse dintr-o carte în pregătire despre teoria argumentării. Textul complet cuprinde, între altele, reflecţii despre natura opiniilor, cercetarea acestora cu mijloace logice, conceptele primitive şi cele derivate ale unei teorii logice trivalente a acceptărilor de fapt, raportul dintre acceptare şi acceptabilitate, acceptare accidentală şi convingere, semantica logicii acceptării, metode de decizie în logica acceptării, concordanţe şi conflicte între aserţiuni, opinii şi adevăr, sinceritate şi minciună. Atingem, în treacăt, şi alte teme de interes cum ar fi problema raportului dintre logica acceptării şi logicile epistemice, doxastice şi teleologice, axiomatica logicii acceptării şi sistemele normale de logică modală, pragmatizarea logicii acceptării, logica acceptării cu agenţi şi teoria conflictelor sociale.

Universitatea Spiru Haret

1. **Statutul logicii acceptării. Logica acceptării, actele de vorbire şi acţiunile umane**

Prima întrebare filosofică este: Ce acceptăm ?. Despre ce specii de acte de vorbire sau fapte, acţiuni, decizii, proiecte putem spune că un agent sau altul le acceptă sau le respinge ? Altfel, spus ne putem întreba pe ce domenii de obiecte sunt definite relaţiile de acceptare şi în ce domenii iau valori aceste relaţii ?

Domeniul de definiţie a logicii acceptării va putea fi produsul cartezian: Ag × W × D, unde D poate fi oricare dintre subdomeniile D1 –D17, iar Ag este mulţimea agenţilor şi W mulţimea situaţiilor acţionale sau lumilor posibile.

D1. lumea opiniilor;
D2. judecăţi de valoare sau evaluări
D3. propunerile;
D4. ofertele;
D5. pretenţiile unei părţi;
D6. proiecte sau programe;
D7. metode de acţiune;
D8. un set de reguli de comportare sau norme;
D9. un set de cereri sau rugăminţi;
D10. căi alternative de conduită; conduite;
D11. ordine;
D12. sfaturi;
D13. scuze;
D14. decizii într-un domeniu;
D15**.** argumente, explicaţii, justificări;
D16. teorii, ipoteze, presupuneri;
D17. soluţii ale unor probleme teoretice sau practice
D18. aserţiuni

Domeniul în care vor lua valori variabilele propoziţionale p, q, r sau atomii predicativi p (a), q (b,c) etc. va fi mulţimea de calificative sau etichete V1 = {a, r, d} având înţelesul de „acceptat”, „respins”, „îndoielnic” sau „ în dubiu”.

În afară de varianta trivalentă căreia îi dăm aici prioritate, ne pare demnă de interes şi teoria logică pentavalentă a acceptării, având drept etichete valorice V2 = {c, a, d, r, s}, unde c are semnificaţia „acceptă cu deplină convingere”, iar s are semnificaţia „respinge cu deplină convingere (cu indignare)”, iar a, d şi r îşi păstrează înţelesurile anterior introduse.

Universitatea Spiru Haret

Logica acceptării poate fi văzută ca o teorie a judecăților de valoare. Ea este de cert interes pentru filosofia morală, ştiinţele politice şi manageriale, dar şi pentru teoria şi practica elaborării unor sisteme expert şi de inteligenţă artificială.

Fie L limbajul logicii predicatelor şi A_P un alfabet de atomi primitivi într-un astfel de limbaj, iar V o listă de valori sau o listă ordonată de calificative ale unor subiecţi într-un sondaj de opinii ca: „foarte bine", „bine", „nici bine, nici rău", „rău", „foarte rău". Atunci, putem defini trei sisteme de logică a acceptărilor sau judecăților de valoare:

val_1: $Ag \times W \times A_P \rightarrow V1$, cu $V_1 = \{a, r, d\}$

val_2: $Ag \times W \times A_P \rightarrow V2$, cu $V_2 = \{c, a, d, r, s\}$

val_3: $Ag \times W \times A_P \rightarrow V3$, cu $V_3 = \{fb, b, i, r, fr\}$

Toate trei sistemele fac uz de functori ternari care specifică agentul ce evaluează sau acceptă, situaţia acţională în care face evaluarea şi actul de vorbire sau acţiunea ce este evaluată.

Prima funcţie de valorizare val_1 descrie o logică trivalentă având valorile „acceptat", „respins" şi „în dubiu" sau „indecis". Următoarele două descriu sisteme pentavalente.

Putem, evident, schimba codomeniul funcţiilor de valorizare astfel încât să obţinem un sistem decimal de evaluare, ca în învăţământul românesc, etc. .

Teze

1. Logica acceptării este o teorie formală despre actele de decizie: acceptare, respingere, dubiu sau amânare, indecizie;

2. Logica acceptării este o teorie abstractă a judecăților de valoare făcute de către agenţi în contexte acţionale;

3. Logica acceptării este o logică metateoretică care supraetajează logica doxastică, epistemică, teleologică;

4. Logica acceptării este o teorie formală despre semnificaţia axiologică a actelor de vorbire în contexte pragmatice;

5. Logica acceptării este o teorie despre agenţii ce comunică, decodifică şi valorizează din propriul lor punct de vedere mesajele decodificate.

De ce acceptăm ?

Răspunsul la această întrebare îl dă teoria argumentării

1. Contextul lingvistic al teoriei argumentării şi teoria sistemelor de comunicare;

Universitatea Spiru Haret

2. Contextul acțional al comunicării şi dimensiunea acționalistă a argumentării;

3. Contextul psihologic al comunicării şi teoria atitudinilor emoționale;

4. Contextul cognitiv al comunicării. Argumentarea şi adevărul;

5. Contextul logic al comunicării. Argumente valide şi argumente invalide;

6. Contextul axiologic al comunicării şi argumentarea şi valorile.

2. **Logica trivalentă a acceptărilor de fapt**

Prezentăm telegrafic o versiune de logică trivalentă a acceptărilor de fapt. Admitem că p, q, r sunt variabile propoziționale care descriu enunțuri sau acte de vorbire, propuneri, etc. ce pot fi acceptate --notate **v**(p)=a, respinse –notate **v**(p)=r, rămase indecise – notate **v**(p)=d, analog pentru **v** semnificând val_2 şi val_3. Atunci putem defini în logica trivalentă a acceptării operațiile logice negație, conjuncție, disjuncție, implicație şi echivalență, după cum urmează:

p	-p
a	r
r	a
d	d

Tabelul nr. 1. Definirea negației în logica acceptării

P1. $p = a \vee p = r \vee p = d$

Într-o logică de rang superior putem transforma valorile „de adevăr” {a, r, d} în predicate descriptoare ale variabilelor propoziționale sau ale atomilor predicativi:

P2. $A(p) \vee R(p) \vee D(p)$

P2 este o formulă ce ține de logica predicatelor de ordinul al doilea a cărei semnificație este o disjuncție de forma „p este acceptat sau p este respins sau p este îndoielnic.”

Putem transcrie enunțul P2 ca un enunț de logică modală supraetajat logicii propozițiilor sau logicii predicatelor, transformând pe A, R şi D în operatori modali:

P3. $Ap \vee Rp \vee Dp$ (trivalența atitudinilor în logica modală a acceptării)

Universitatea Spiru Haret

P4. Ap ⊃-Rp
P5. Ap ⊃-Dp
P6. Rp ⊃-Dp
P7 Dp ≡ -Ap ∧ -Rp
P8. Tp ≡-Rp ≡ Ap ∨ Dp
P9. Cp ≡Ap ∨ Rp (*commitment*)
P10 –(Ap ∧ A-p) (Princip. Noncontr). (angajare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p	q	-p	-q	p ∧ q	p ∨ q	p ⊃ q	q ⊃ p	p ≡ q
1	a	a	r	r	a	a	a	a	a
2	a	r	r	a	r	a	r	a	r
3	a	d	r	d	d	a	d	a	d
4	r	a	a	r	r	a	a	r	r
5	r	r	a	a	r	r	a	a	a
6	r	d	a	d	r	d	a	d	d
7	d	a	d	r	d	a	a	d	d
8	d	r	d	a	r	d	d	a	d
9	d	d	d	d	d	d	d	d	d

Tabelul 2. Definirea conectivelor binare în logica trivalentă a acceptării

Pe coloanele 2-3 din tabelul nr. 2 sunt date cele 9 atribuiri de valori posibile pentru două variabile într-o logică trivalentă. În coloanele 4 şi 5 am definit negaţia lui p şi a lui q. În coloanele 6-10 sunt definite valorile conectivelor binare: conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, implicaţie inversă şi echivalenţă.

Probabil câteva observaţii vor fi utile pentru cititorul mai puţin iniţiat în logicile polivalente sau în cele modale.

1. În negaţie, acceptarea şi respingerea sunt una opusa celeilalte. Negaţia unei propoziţii îndoielnice este tot o propoziţie îndoielnică.

2. Acceptarea se comportă similar adevărului din logica binară. O conjuncţie este acceptată, dacă şi numai dacă, ambele sale argumente sunt acceptate. Este respinsă dacă şi numai dacă, vreuna dintre componentele sale este respinsă. Şi rămâne îndoielnică sau dubitativă, dacă şi numai dacă, vreuna dintre componentele sale este îndoielnică sau dubitativă (C6). Dacă asociem acceptării valoarea numerică 1, îndoielii valoarea ½ sau 0.5 şi respingerii 0, atunci putem spune că operaţia conjuncţie ia întotdeauna valoarea minimă dintre valorile argumentelor sale.

Universitatea Spiru Haret

Definirea acceptării, respingerii şi dubiului unei conjuncții

$val(A(p \wedge q)) = in(val(Ap),val(Aq))$.

$val(A(p \wedge q)) =1 \Leftrightarrow val(Ap) = 1 \wedge val(A\ q) = 1$

C1. $A(p \wedge q).\equiv (Ap \wedge Aq)$

C2. $Rp \supset R(p \wedge q)$

C3. $(Rp \wedge Aq) \supset R(p \wedge q)$

C4. $Dp \supset D(p \wedge q)$

C5. $(Dp \wedge Aq) \supset D(p \wedge q)$

C6. $D(p \wedge q) \equiv Dp \vee Dq$

C7 $R(p \wedge q) \equiv Rp \vee Rq$

Formulele C2-C5, ar putea fi descrise de formularea plastică după care „Slăbiciunea sau viciul unei piese componente se transferă agregatului în care este aceasta încorporată". O conjuncție va fi îndoielnică sau în dubiu, dacă vreunul dintre argumentele ei este în dubiu(C6). La fel o conjuncție este respinsă, dacă vreunul dintre argumentele ei este respins (C7).

Acceptarea, respingerea şi dubiul față de o disjuncție

Spre deosebire de conjuncție, o disjuncție va fi acceptată dacă cel puțin una dintre propozițiile componente va fi acceptată. Va fi respinsă numai dacă ambele sale componente sau alternative, vor fi respinse şi va rămâne indecisă sau în dubiu numai dacă cel puțin una dintre componente este indecisă. Acceptând convențiile de mai sus privind notarea numerică a valorilor logicii acceptării { a,d, r } prin numerele {1, ½, 0}, atunci putem spune că operația disjuncție ia întotdeauna valoarea maximă dintre valorile argumentelor sale.

$val(A(p \vee q)) = max(val(Ap),val(Aq))$.

$val(A(p \vee q)) =1 \Leftrightarrow val(Ap)=1 \vee val(Aq) = 1$

Menționăm dintre formulele sugerate de caracterizarea de mai sus a acceptării şi respingerii disjuncției următoarele legi:

D1. $A(p \vee q)) \equiv (Ap \vee Aq))$

D2. $R(p \vee q) \equiv (Rp \wedge Rq)$

D3. $Ap \supset A(p \vee q)$

D4. $(Ap \wedge Aq) \supset A(p \vee q)$

D5. $(Ap \wedge Rq) \supset A(p \vee q)$

D6. $(Ap \wedge Dq) \supset A(p \vee q)$

D7. $(Rp \wedge Aq) \supset A(p \vee q)$

D8. $(Dp \wedge Aq) \supset A(p \vee q)$

D9. $(Dp \wedge Rq) \supset D(p \vee q)$

D10. $(Dp \wedge Dq) \supset D(p \vee q)$

Universitatea Spiru Haret

Definiția implicației
Acceptând a =1, d = ½ şi r = 0, putem scrie:
val(A(p ⊃q)) = max(val(A-p), val(Aq))
val(A(p ⊃q)) =1 ⇔ val(Ap) ≤ val(Aq)
I1. (Ap ∧ Rq) ⊃R(p ⊃q)
I2. Rp ⊃ A(p ⊃q)
I3. Aq ⊃ A(p ⊃q)
I4. (Rp ∨ Aq) ⊃ A(p ⊃q)
I5. A(p ⊃q) ⊃ (Rp ∨ Aq).
I6. A(p ⊃q) ≡ (Rp ∨ Aq).
I8. A(p ⊃q) ≡ (A-p ∨ Aq).
I9. D(p ⊃q) ⊃Dp ∨.Dq
Definiția echivalenței
val(A(p ≡ q)) = a ⇔ val(Ap) = val(Aq)
E1. A(p ≡ q) ≡A(p ⊃q) ∧ A(q ⊃ p)
E2 A(p ≡ q) ≡ (Ap ∧ Aq) ∨ (Rp ∧ Rq)
E3. R(p ≡ q) ≡ (Ap ∧ Rq) ∨ (Rp ∧ Aq)
E4 D(p ≡ q) ≡ Dp ∨ Dq
E5. A(p ≡ q) ≡ A(p∧q) ∨ R(p ∨ q)
P10. –(Ap ∧ A-p) Nu putem accepta simultan şi opinia p şi negația ei.

3. **Concepte primitive şi concepte derivate**

Considerăm drept primitiv Ap. Definim conceptele derivate: respingerea, Rp, ca acceptare a negației enunțului inițial, tolerarea Tp, ca nerespingere a enunțului inițial, îndoiala sau dubiul Dp ca neacceptare şi nerespingere, Cp ca angajarea (în engleză commitment) sau respingere.

D1. Rp $=_{df}$ A-p D2. Tp $=_{df}$ –Rp D3. Dp $=_{df}$ –Ap ∧ -Rp D4. Cp $=_{df}$ Ap ∨ Rp D5. Îp $=_{df}$ –Ap D6. -Ap ≡ Rp ∨ Dp D7. –Rp ≡ Ap ∨ Ip D8 -Ip ≡ Ap ∨ Rp	D1. Rp = A-p D2. Tp = -Rp D3. Dp = Ap ∨ Rp D4. Ip = -Dp

Universitatea Spiru Haret

Definiţiile D1 –D5 din prima coloană şi D6-D8 de mai jos descriu concepte derivate în ceea ce am numit logica acceptărilor de fapt. Definiţiile D3 şi D4 din coloana dreaptă aparţin unor sisteme axiomatice de logica acceptării în care am folosit alte convenţii de notare. Dp va însemna, în acest caz, angajare doxastică sau decizie în privinţa privinţa lui p, iar Ip din coloana dreaptă va avea semnificaţia de indecis sau în dubiu. (vezi D3 în coloana stângă).

p	Ap	Rp	Tp	Dp	Cp	Ip
1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0.5	0.	0.	1	1	0	1

Tabelul 3 Definirea unor concepte derivate

Din tabelul nr. 3 rezultă că acceptarea şi respingerea implică angajarea opiniei agentului şi că dubiul sau îndoiala este neangajare. Se observă, de asemenea, că acceptarea implică tolerarea.

4. **Acceptare şi acceptabilitate**

Predicatul accept(X, W, P) care se citeşte: „agentul X acceptă în situaţia W enunţul P" descrie o stare doxastic epistemică sau o judecată de valoare a unui agent. Aceasta este, în opinia noastră, deosebită de ideea modală de acceptabilitate care descrie posibilitatea ca ceva să fie acceptat.

accept(X, W, P),
acceptabil(X, W, P) ≡ Maccept(X, W, P) (1)
accept(X, W, P) ⊃ M accept(X,W,P) (2)
Ap ⊃ MA p (3)
p ⊃ M p (4)
rejectabil(X, W, P) ≡ M respins(X, W, P) (5)
rejectabil(X, W, P) ≡ M accept(X, W,-P) (6)
convins(X,W, P) ≡ -M accept(X, W,-P) (7)
convins(X,W, P) ≡ L accept(X, W,P) (8)
convins(X,W, P) ⊃ accept(X, W,P) (9)

Formula (1) defineşte acceptabilitatea. Formulele (2) şi (3) exprimă acelaşi conţinut: acceptarea de fapt implică acceptabilitatea; (3) este o notaţie simbolică mai laconică a lui (2). Formula (5) defineşte rejectabilitatea ca posibilitate a respingerii

Universitatea Spiru Haret

Convingerea fermă a unui agent (vezi (7) şi (8)) este acceptarea continuă, în starea inițială şi în orice stare ulterioară, a opiniei P şi inaceptabilitatea pentru agent a altor stări de opinie, diferite de aceasta.

O ființă umană poate avea convingeri interioare profunde transformate în atitudini, reguli şi norme de comportare. Admitem că o persoană bine educată poate avea convingeri ferme în privința: respectului față de părinți, respectului față de adevăr, comportamentului urban, politicos, regulilor elementare de igienă, în privința unor aspirații politice, dragostei față de patrie, respectării legilor țării, eticii profesionale, etc.. O conduită care să respecte toate acestea poate deveni pentru un agent al conduitelor practice un stil de viață. La fel putem stipula reguli de conduită pentru alt profil de agent, cu alte reguli, cu alte convingeri şi cu alt stil de viață.

Ce concluzii putem desprinde din analiza conceptuală făcută mai sus ?.

1.Putem avea o teorie logică trivalentă a acceptării cu o sintaxă şi semantică apropiată de sistemul lui S. C. Kleene.

2. Putem avea o teorie logico-asertorică a acceptării, respingerii şi îndoielii care să descrie corelațiile dintre faptele de acceptare, respingere, acceptările explicite şi cele implicite, consistența enunțurilor, propunerilor şi programelor acceptate, adecvarea programelor la clasele ce tranziții ce urmează să fie efectuate.

Logica acceptării în această variantă va face joncțiune cu ceea ce noi numim de mai multe decenii logica acțiunii. Mai exact, logica acceptării, legată de angajare sau decizie va fi un capitol din logica acțiunii în care vor intra, de drept, logica scopurilor şi programelor, logica deontică, teoria conduitelor efective sau a performanțelor, teoria agenților şi instituțiilor, logica relațiilor de cooperare, competiție şi conflict, logica epistemică, logica doxastică, teoria argumentării şi convingerii.

3. Putem dezvolta mai multe variante de teorii dinamice, temporale şi modale despre evoluția în timp a atitudinilor de acceptare şi respingere pe care le au agenții.

5. **Decizia prin arbori de decizie**

Pentru a decide prin metoda arborilor de decizie trebuie, mai întâi, să identificăm nişte reguli. Regulile pe care le propunem trebuie să respecte definițiile şi legile identificate în tabloul 2 şi în formulele pe care le-am identificat prin analiza acestuia.

Universitatea Spiru Haret

Reguli de introducere a acceptării

$\models\alpha$ $\models A\alpha$ 1	$\alpha=\perp$ $R\alpha$ 2	K(x, w, p) A(x, w, p) 3	B(x, w, p) A(x, w, p) 4	B(x, w, p) K $\models$ p A(x, w, p) 5	S(x, w,p) A(x,w, p) 6

Un agent acceptă: legile logicii; ceea ce cunoaşte; ceea ce crede şi ceea ce derivă din ceea ce crede şi îşi acceptă scopurile asumate. Respinge ceea ce duce la contradicţii (vezi coloana 2).

La acestea mai putem adăuga două reguli întemeiate pe relaţia de preferinţă: P(x, w, p, q) = „x preferă în situaţia w pe p lui q”

Relaţia de preferinţă şi acceptarea

P(x, w, p, q)	P(x, w, p, q)
A(x, w, p)	R(x, w, q)

Dacă x preferă în situaţia w pe p lui q, atunci x acceptă pe p şi x respinge pe q.

Reguli de consistenţă

7 Ap -Rp -Dp	8 Rp -Ap -Dp	9 Dp -Ap -Rp	10 wDp w1 Ap Rp w2

Dacă un agent acceptă o teză p atunci nu o respinge şi nici nu are dubii faţă de ea: La fel, dacă respinge o teză, atunci nu o acceptă şi nici nu este în dubiu faţă de ea. Dacă un agent are într-o situaţie w dubii faţă de p, atunci va avea acces în viitor la o situaţie w1, în care va accepta pe p sau la o situaţie w2, în care va respinge pe p.

Regulile negării valorizărilor elementare A, R, D

11 -Ap Rp $\vee$ Dp	12 -Rp Ap $\vee$ Dp	13 -Dp Ap $\vee$ Rp

Reguli ale acceptării şi respingerii formulelor moleculare

$\underline{A(p\wedge q)}$	$\underline{A(p\vee q)}$	$\underline{R(p\wedge q)}$	$\underline{R(p\vee q)}$	$\underline{A(p\supset q)}$	$\underline{R(p\supset q)}$
Ap	Ap$\vee$ Aq	Rp$\vee$ Rq	Rp	Rp $\vee$ Aq	Ap
Aq			Rq		Rq
14	15	16	17	18	19

Mai dăm două reguli pentru echivalență:

20		21	
A(p ≡q)		R(p ≡q)	
Ap	Rp	Ap	Rp
Ap	Rq	Rq	Aq

Observații

Obs. 1. Sunt două clase de reguli de introducere a acceptării: logic analitice şi empirice. Primele două reguli sunt logic analitice. Prima regulă, ce corespunde sub aspect sintactic regulii necesitării, spune că agentul raţional trebuie să accepte toate legile logicii clasice: logica propoziţiilor şi logica predicatelor de ordinul întâi. A doua regulă spune că acesta trebuie să respingă contradicţiile. Am fi putut adăuga cu îndreptăţire şi o regulă care să enunţe că agentul trebuie să respingă o bază de cunoştinţe dacă din ea rezultă o contradicţie. Mai departe, vom arăta că acesta trebuie să revizuiască baza sa de cunoştinţe astfel încât aceasta să rămână adecvată situaţiei şi să redevină consistentă.

Obs. 2. Regulile 3-6 sunt reguli „empirice". Un agent acceptă ceea ce cunoaşte sau ceea ce crede şi ceea ce derivă logic din acestea. Regulile empirice sunt reguli de intrare în sistem. Ele receptează judecăţile sau evaluările subiective ale agentului, după criteriile şi sistemul de valori al acestuia, după preferinţele lui. Ceea ce preferăm, acceptăm şi ceea ce nu preferăm, respingem.

Obs. 3. Un agent acceptă scopurile pe care şi le-a asumat.(R6)

Obs. 4. Nu am mai introdus o clasă de reguli de acceptare prin care agenţii să accepte programele pe care le aplică sau directivele practice care le reglementează trecerea de la starea iniţială la starea scop. Pare firesc, dacă am acceptat un scop să acceptăm şi o procedură

Universitatea Spiru Haret

sau mod de conduită ce duce la realizarea acestuia. Nu putem însă accepta regula: „Scopul scuză mijloacele”. Un scop „bun” atins prin mijloace „rele” este el însuşi degradat, şi, deci, rejectabil.

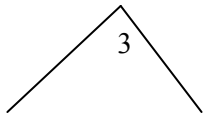
Obs. 5. Într-o teorie logică a acceptării un agent poate accepta şi respinge deopotrivă date factuale şi reguli ce descriu dependenţele într-un domeniu de activitate.

Obs. 6. Regulile 7-9 sunt reguli de consistenţă. Ele interzic ca o opinie, propunere, etc. să fie în acelaşi timp şi acceptată şi respinsă şi respinsă şi în dubiu, etc. .

Obs. 7. Regula 10 asociază unei stări de îndoială asupra unei propoziţii p două lumi alternative, una în care aceasta devine acceptată şi alta în care aceasta va fi respinsă. Acceptarea sau respingerea se pot face fiecare dintre ele, dar numai una odată, în lumea de referinţă. Dimpotrivă, pentru dubiu trebuie să considerăm două lumi alternative, pentru a evita starea de inconsistenţă.

Exemplul .1 este axioma sistemului K din logica modală.

1. $A(p \supset q) \supset (Ap \supset Aq)$
2. $-[A(p \supset q) \supset (Ap \supset Aq)]$
3. $A(p \supset q)$
4. $-(Ap \supset Aq)$
5. Ap
6. $-Aq$



7.Rp .Aq (R18, 3)
(8, 6)

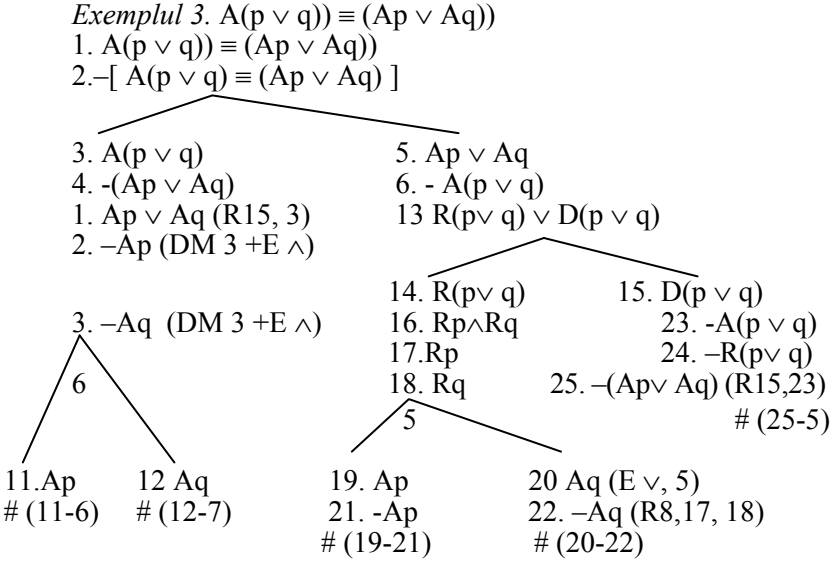
9.-Ap (R8, 7)
(9, 5)

Exemplu 2. $-(Ap \wedge Rq)$

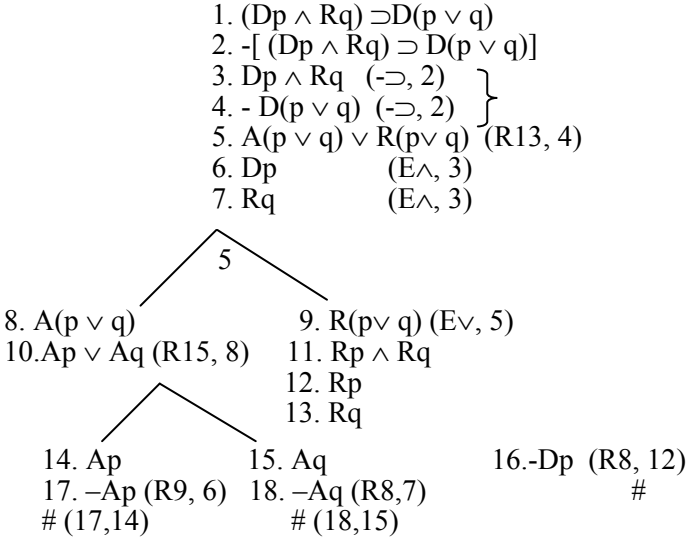
1. $-(Ap \wedge Rq)$
2 -[$-(Ap \wedge Rq)$]
1. $Ap \wedge Rq$ - - 2
2. Ap (E∧, 4)
3. Rq (E∧, 4)
4. –Ap (R8, 6)
(7, 5)

Universitatea Spiru Haret

Exemplul 3. $A(p \vee q)) \equiv (Ap \vee Aq))$



Exemplul 4. $(Dp \wedge Rq) \supset D(p \vee q)$


1. (Dp ∧ Rq) ⊃D(p ∨ q)
2. -[(Dp ∧ Rq) ⊃ D(p ∨ q)]
3. Dp ∧ Rq (-⊃, 2)
4. - D(p ∨ q) (-⊃, 2)
5. A(p ∨ q) ∨ R(p∨ q) (R13, 4)
6. Dp (E∧, 3)
7. Rq (E∧, 3)
5
8. A(p ∨ q)
10.Ap ∨ Aq (R15, 8)
14. Ap
17. –Ap (R9, 6)
(17,14)
15. Aq
18. –Aq (R8,7)
(18,15)
9. R(p∨ q) (E∨, 5)
11. Rp ∧ Rq
12. Rp
13. Rq
16.-Dp (R8, 12)
#

Universitatea Spiru Haret

6. **Problema criteriilor de acceptare şi respingere**

Orice persoană care acceptă sau respinge ceva are temeiurile şi criteriile sale de exigenţă. Dăm mai jos câteva sugestii privind modul cum ar putea un agent receptor justifica acceptarea sau respingerea de către el a unei opinii, oferte, propuneri etc. . Scriem aceste criterii sub forma unor instrucţiuni Prolog.

accept(X, W, P):- cunoaşte (X,W, P).
accept(X, W, P):- crede (X,W, P).
accept(X, W, P):- scop (X,W, P).
accept (X, W, Prop):- aplicabil (Prop, W), satisface (Prop, criterii(X)).
accept(X, Y, W, Prop):- place (X, Y).
acept(X, W, Oferta): - convenabila (X, Oferta).
accept(X, W, Prog):- scop (X, W, Scop), mijloc (Prog, [W, Scop]),
abil (X, Prog).
accept(X, W, Teza):- accept (X,W, temei (Teza)).
accept(X,W,Cand):- examen (List), element (Cand,List), mark (Cand) =
max(mark (Z),∀Z element (Z,List)).
accept(X, W, Pers):- competent (Pers), adecvat (Pers, Post), placut (Pers).

Logica acceptării este o teorie formală despre judecăţile de evaluare făcute de către agenţii individuali sau colectivi. Un agent poate singur să-şi facă explicite criteriile sale de evaluare, după cum poate să le lase în ceaţă şi acestea să fie identificate, mai târziu, de către alţi agenţi pe baza analizei critice a judecăţilor de valoare făcute, în timp, de către acesta, după cercetarea, ce a acceptat, apreciat şi elogiat acesta şi a ceea ce a respins sau blamat acesta în diferite situaţii.

7. **Opinii şi aserţiuni. Ce credem şi ce declarăm**

Stările de credinţă, opiniile şi convingerile oamenilor nu sunt transparente. Rămân deseori opace şi ochiului şi auzului. Răzbesc, din când în când prin rostire, dar, destul de des, tot în rostire se ascund. Putem adesea descifra opiniile şi credinţele profunde ale unei fiinţe umane prin deciziile şi conduitele acesteia. Credinţele şi convingerile, faptele şi intenţiile, regretele şi greşelile făcute pot ieşi uneori la iveală prin confesiuni religioase sau laice. Preoţii sunt legaţi prin taina

Universitatea Spiru Haret

confesiunii la tăcere şi discreţie, iar laic ne confesăm destul de rar şi numai celor apropiaţi care, de regulă, ne apără şi ne ocrotesc.

În ce măsură opiniile şi credinţele unei persoane pot fi cercetate prin intermediul declaraţiilor pe care le face aceasta cu privire la anumite probleme? Exprimă declaraţiile unui subiect starea lui reală de opinie sau uneori vorbitorii declară anumite propoziţii care descriu mai de grabă modul cum cred ei că le-ar place anumitor interlocutori să fie văzuţi ? Candidatul unui partid la ocuparea unui loc în Parlament, care vrea să obţină asentimentul cetăţenilor dintr-o circumscripţie electorală va declara în faţa acestora acele enunţuri despre care el crede că vor fi plăcute, dezirabile sau acceptabile pentru auditorii săi şi mai puţin va vorbi despre opiniile lui reale, despre interesul său personal.

Scriitorii, psihologii şi sociologii se ocupă fiecare dintre ei, cu mijloace specifice, de tainele sufletului omenesc, de credinţele aspiraţiile şi zbuciumul individului uman. Ca logicieni noi explorăm situaţii şi lumi posibile şi mai rar indivizi umani reali.

Să considerăm o variabilă propoziţională sau un atom predicativ p care descrie o problemă asupra căruia un agent de referinţă x poate avea deopotrivă o opinie exprimată prin valorile logicii acceptării V = { a, r, d }, respectiv A(x, w, p), R(x, w, p), D(x, w, p) şi o conduită asertorică redată ternar prin Asert(x, w, p), Asert(x, w, -p) şi Tace(x, w, p). Ca şi mai sus, să considerăm fixate agentul şi situaţia acţională. Dacă luăm simultan în considerare stările de opinie posibile ale agentului în privinţa subiectului p şi atitudinile asertorice pe care acesta le poate avea în situaţia dată, atunci obţinem 9 situaţii relevante.

	Opinii	**Aserţiuni**	**Evaluări**
1	Accept (p)	Asert(p)	Concordanţă
2	Accept (p)	Asert(-p)	Conflict
3.	Accept (p)	Tace (p)	Discreţie
4.	Respinge (p)	Asert(p)	Conflict
5	Respinge (p)	Asert(-p)	Concordanţă
6	Respinge (p)	Tace (p)	Discreţie
7	Dubiu(p)	Asert(p)	Amplificare
8	Dubiu(p)	Asert(-p)	Diminuare
9	Dubiu(p)	Tace(p)	Concordanţă

Tabelul nr 4. Opinii şi aserţiuni

Universitatea Spiru Haret

Concordanța dintre opinie şi asertare se numeşte în mod curent sinceritate, iar conflictul dintre ceea ce afirmă un agent şi starea lui de opinie se numeşte reacredință sau felonie. Reaua credință este, desigur, nesinceritate, dar este ceva mai mult decât nesinceritatea; ea este intenția de a dezinforma pe interlocutorul tău asupra fondului atitudinilor tale doxastice.

Amplificarea este o formă de neconcordanță dintre starea de opinie a emitentului şi ceea ce afirmă acesta, când conținutul afirmării depăşeşte valoarea fondului de credință. Emitentul îşi ascunde o îndoială față de interlocutorul său. În cazul diminuării emitentul dă interlocutorului său drept respingere (categorică) o stare de îndoială a sa.

A tăcea despre ceea ce accepți (crezi) sau despre ceea ce tu respingi este discreție sau abținere de a influența pe cineva în direcția opiniilor împărtăşite de tine.

Conceptele discutate mai sus sunt cu toate relevante pentru evaluarea morală a conduitelor asertorice ale unui emitent pe parcursul unei convorbiri. Ele țin de teoria atitudinilor doxastice, probleme subtile destul de rar luate în considerare în teoria comunicației la nivel de grup şi la nivel social. Ele sunt relevante în privința calificării conduitelor asertorice ca binevoitoare, amiabile, sau dimpotrivă nebinevoitoare, ostile, dezinformatoare, cel puțin în privința stărilor tale de spirit.

În toate aceste distincții am pornit de la ipoteza că noi cunoaştem din surse certe atitudinile doxastice ale emitentului asertării. De exemplu, din răspunsurile acestuia la o anchetă de opinie. Din jurnale şi însemnări personale, din mărturisiri anterioare, etc. . Dar, repet, este extrem de greu să obținem informații certe asupra fondului de credințe şi opțiuni ale unui agent, astfel încât să-i putem aprecia conduitele sale publice în actele de asertare sau contestare.

De un interes imens este cercetarea drumului invers. Cum se schimbă percepția unui ascultător asupra stărilor de opinie ale vorbitorului sau oratorului pe măsura emiterii, receptării şi analizei critice a discursului acestuia. Adresantul unui argument este ținta sau obiectul presiunii psihice, discursiv-raționale exercitate de vorbitor. Acesta trebuie să-şi păstreze tot timpul starea de luciditate, spiritul critic şi puterea de discernământ, astfel încât să rețină informațiile, aserțiunile emitentului şi să-i judece argumentele pro şi contra, să-i ceară la nevoie lămuriri şi explicații asupra aspectelor rămase în umbră. Gesturile oratorului, floricelele stilistice nu trebuie să-l împiedece să judece la rece fondul problemei, datele şi informațiile

Universitatea Spiru Haret

factuale, ca şi prevederile sistemelor de norme juridice în privinţa calificării conduitelor reale ale participanţilor dint-o speţă supusă analizei şi judecăţii.

Următorul nostru scurt popas priveşte tocmai problema raporturilor dintre opinie şi adevăr, dintre adevăr şi asertare.

8. **Stare de fapt, stare interioară, discurs, evaluare**

Cu ajutorul declaraţiilor noi ne exprimăm opiniile şi convingerile, dar şi cunoştinţele. În mod curent, cunoştinţele sunt opinii ale unui agent care concordă cu starea de fapt a lucrurilor. Altfel spus, cunoştinţele sunt opinii veridice. Dar cine poate selecta dintre opiniile unui subiect cunoscător care dintre acestea sunt cunoştinţe şi care sunt simple impresii sau aserţiuni ce nu corespund realităţii. ?. Tot subiectul cunoscător individual, dar mai ales ceilalţi subiecţi cunoscători, înarmaţi cu tehnici şi metode adecvate, în timp, prin observaţii şi experienţe, prin raţionamente şi calcule. Aserţiunile unor subiecţi pot fi comparate cu cele ale experţilor care sunt fiinţe umane dotate, care au studiat sistematic şi aprofundat o anumită clasă de probleme. Cunoştinţele sunt opinii ale unor agenţi care descriu corect lumea reală. Ele sunt aserţiuni intersubiectiv controlabile, verificabile şi de către alţi subiecţi cunoscători care privesc o clasă de obiecte din lumea reală sau din domeniul realităţilor construibile mental cu ajutorul unor procedee şi metode de acţiune. În acest paragraf sunt în joc raporturile dintre opinii, cunoştinţe, stări de fapt sau relaţii la nivel ontic, descrise prin aserţiuni şi, desigur, aserţiunile făcute de agenţi cu referire la o stare sau alta a realităţii. Ca să putem opera sistematic cu aceste concepte le vom fixa cu ajutorul unor scheme predicative: Crede(x, p), Cunoaşte(x, p), În_fapt_are_loc(p), Asertează(x, p).

Dacă admitem teza după care cunoştinţele sunt opinii veridice deţinute de către un agent, atunci admitem că tot ce cunoaştem acceptăm. De altfel, în capitolul despre arborii de decizie am admis între regulile de introducere a acceptărilor schema după care ceea ce cunoaştem acceptăm:

$$\frac{K(x, w, p)}{A(x, w, p)}$$

Dacă x cunoaşte în situaţia w că are loc p, atunci x acceptă în situaţia w înţelesul lui p. Reamintim că, la începutul acestui capitol, am acceptat ideea că opiniile sunt conţinuturi informaţionale descriptibile prin expresiile unui limbaj acceptate de către un agent. Din schema de

Universitatea Spiru Haret

mai sus reținem ideea că toate cunoştințele, oricât ar fi ele de legate de un domeniul al realității, sunt, în acelaşi timp, opinii ale unor subiecți cunoscători. Nu există cunoştințe care să nu fie deținute de un subiect cunoscător sau care să nu fi debutat prin a fi o opinie a unui subiect cunoscător. Dar ele nu rămân doar opinii ale unui subiect cunoscător; ele devin socialmente acceptate, organizate în mulțimi coerente de enunțuri despre un domeniu al realității, înlesnesc explicații şi predicții ale unor evenimente din lumea reală, sunt consemnate în tratate şi în manuale sunt învățate în şcoli, fundamentează clase de activități umane eficiente.

Dacă cunoştințele sunt opinii, atunci este adevărată teza lui Hintikka după care, cunoaşterea de către x a lui p implică acceptarea sau credința lui x în p.

$K(x, p) \supset B(x, p)$.

Putem admite, fără risc, ideea după care cunoştințele sunt opinii. Trebuie doar să specificăm ce fel de opinii. Cunoştințele sunt opinii adevărate cărora le corespund, într-un domeniu din realitate, fapte sau relații dintre clase de obiecte; opinii care sunt admise de foarte mulți oameni, sunt verificabile sau demonstrabile; care au o mare persistență în timp, dar care sunt şi ele supuse evoluției lente sau schimbărilor bruşte.

Să admitem un atom sau o variabilă propozițională ce poate descrie o stare de fapt p sau opusă acesteia –p plasate într-un tabel pe o coloană. Pe o a doua coloană vom considera mai multe atitudini doxastice şi cognitive. Pe o a treia coloană vom considera atitudinile discursive, asertare, respingere sau contestare şi pe cea de a patra coloană vom eticheta specii sau evaluări ale opiniilor umane din punctul de vedere al funcțiilor lor cognitive sau social comunicative.

	Stare de fapt	Stări de opinie sau cunoaştere	Discurs	Evaluări
1	p	K(x, p)	Asert(x, p)	Enunț adevărat sincer
2	p	K(x, p)	Asert(x, -p)	Minciună
3	p	B(x, -p)	Asert(x, -p)	Enunț fals sincer
4	p	B(x, p)	Asert(x, -p)	Enunț fals nesincer
5	-p	K(x, -p)	Asert(x, -p)	Enunț adevărat sincer
6	-p	K(x, -p)	Asert (x, p)	Minciună
7	-p	B(x, p)	Asert(x, p)	Enunț fals sincer
8	-p	B(x, -p)	Asert(x, p)	Enunț fals nesincer

Tabelul nr. 5 Adevăr, opinie, aserțiuni

Universitatea Spiru Haret

Calificarea unui enunț ca adevărat sau fals rezultă din compararea coloanei 4 cu coloana 2, respectiv din compararea aserțiunii (coloana 4) cu starea de fapt (coloana 2), adevărul fiind, după Aristotel, concordanța asertărilor cu starea de fapt. Calificarea unui enunț ca sincer sau nesincer rezultă din compararea coloanei 4 cu coloana 3, respectiv din compararea aserțiunilor cu stările de opinie, cu ceea ce cunoaşte sau crede agentul ce face aserțiunea.

Un enunț este adevărat şi sincer dacă asertarea lui concordă, deopotrivă, cu starea de fapt şi, în plus, asertarea lui concordă şi cu starea de cunoaştere sau opinie a acestuia (a se observa în tabel liniile 1 şi 5).

Minciuna este o aserțiune neadevărată şi nesinceră. Ea este o dublă infracțiune şi față de adevăr şi față de sinceritate. Mincinosul nu descrie nici realitatea şi nici nu-şi exprimă sincer opiniile. El este în divorț şi cu realitatea şi cu propriile sale credințe. Dar probabil, el este în concordanță cu propriile sale aspirații, interese, dorințe sau vicii. Dimensiunea teleologică nu este însă captată în tabelul nostru. Minciuna este caracterizată de liniile 2 şi 6.

Enunțul fals sincer este definit de neconcordanța dintre aserțiune şi starea de fapt şi de concordanța dintre aserțiune şi opinia sau credința agentului. El este caracterizat de liniile 3 şi 7. Agentul asertează ceea ce crede, dar aserțiunea şi credința sa nu corespund realității. Agentul nu cunoaşte realitatea, crede sau acceptă ceva ce este fals, dar este sincer căci declară ceea ce crede.

Enunțul fals nesincer descrie o neconcordanță între aserțiune şi starea de fapt şi o neconcordanță între ceea ce crede agentul şi ceea ce afirmă el. Credința lui coincide cu starea de fapt, dar el nu afirmă nici ceea ce crede, nici ceea ce este sau are loc în realitate. El denaturează şi realitatea, căci nu afirmă ceea ce este şi nu este credincios nici propriei sale credințe, căci el nu afirmă ceea ce crede.

Este uşor de reținut că şi adevărul şi sinceritatea au fost definite drept concordanțe. Primul între aserțiune şi starea de fapt, cea de a doua între aserțiune şi starea de opinie sau fondul de convingeri.

Putem în încheiere scrie următoarele patru definiții. În definițiile de mai jos D1-D4, V stă pentru „verum" sau adevăr, iar S stă pentru „sincer", F stă pentru „fals", M pentru minciună.

D1 $VS(p) = Fapt(p) \wedge K(x, p) \wedge Asert(x, p)$ aserțiune veridică sinceră

D2. $M(p) = Fapt(p) \wedge K(x, p) \wedge Asert(x, -p)$ minciună

D3. $FS(p) = Fapt(p) \wedge B(x, -p) \wedge Asert(x, -p)$ aserțiune falsă sinceră

Universitatea Spiru Haret

D4. F-S(p) =Fapt(p) $\wedge$ B(x, p) $\wedge$ Asert(x, -p) aserţiune falsă nesinceră

Definiţiile D1-D4 corespund liniilor 1-4 din tabelul 5. Dacă substituim în ele pe p prin –p, obţinem definiţiile D5-D8 corespunzătoare liniilor 5-8 din acelaşi tabel redat tabelul 5.

VS(p) se citeşte „Enunţul p este veridic şi sincer” şi corespunde liniilor 1 şi 5.

În loc de M(p) care se citeşte „Enunţul p este o minciună” putem scrie:

-V-S(p) care se citeşte „Enunţul p este neveridic (fals) şi nesincer”, cea ce revine la a spune un lucru intuitiv acceptabil după care o minciună este în acelaşi timp un enunţ neveridic şi o aserţiune nesinceră.

FS(p) din definiendum-ul definiţiei D3 se citeşte: „Enunţul p este fals şi sincer”. El corespunde rândurilor 3 şi 7 din tabelul 5.

Definiţia D4 diferă de definiţia D2 (a minciunii) doar prin faptul că în D4 apare B(x, p) în loc de K(x, p). K(x, p) este mai tare decât B(x, p).

Atât în D2, cât şi în D4 intervin aserţiuni neconcordante cu starea de opinie a agentului emitent, pe care le-am numit „nesincere”; la fel, în ambele intervin neconcordanţe între ceea ce se afirmă şi starea de fapt. Deosebirea dintre ele poate fi relevată doar de comparaţia coloanelor 3 cu 2. În cazul minciunii emitentul ştie că p este adevărat iar în cazul lui D4, al enunţurilor false nesincere, emitentul doar crede că p este adevărat. Este evident că D2 implică pe D4.

Noţiunile de sinceritate şi de minciună captate de multă vreme în teoriile morale şi în cele juridice pot fi discutate de drept şi într-o teorie logică a opiniilor.

9. **Ce acceptăm şi ce respingem în legătură cu acţiunea umană ?**

1. Acceptăm sau respingem obiective considerate de noi sau propuse de altcineva. Este impropriu să spunem că acceptăm o intenţie. Intenţiile putem să le avem sau să nu le avem, dar este impropriu să spunem că ne acceptăm sau respingem propriile noastre intenţii.

2. Acceptăm sau respingem: programe de acţiune, metode, reguli, date sau termene de execuţie, posturi sau funcţii, recompense, cereri, pretenţii, rugăminţi.

Universitatea Spiru Haret

3. Acceptăm sau respingem conduite.

4. Acceptăm sau respingem rezultare, judecăți de valoare, critici sau elogii.

Când intervin acceptarea, respingerea şi dubiul, îndoiala ***?***

1. La încheierea unui proces de deliberare, când trebuie să evaluăm sau să judecăm ceva.

2. Când evaluăm o idee, un scop sau obiectiv, o metodă de acțiune, un rezultat.

3. Logica acceptării intervine în partea finală a procesului de decision making**,** atunci acceptăm sau respingem.

Tot ceea ce acceptăm sau respingem trebuie să fie argumentat.

Argumentăm un obiectiv sau scop propus unui interlocutor arătându-i că acesta:

1. este cel mai bun dintre cele accesibile, cel mai dezirabil**;** Aceasta duce la axiologie, valori**,** criterii.

2. este accesibil sau acțional posibil. Aici teoria modalităților acționale !; praxiologie, logică modală !!

3. este moral şi juridic permis, legal**;** morală, drept.

4. că deținem abilități şi deprinderi de a-l înfăptui; educație, instrucție.

5. este economic rentabil, management.

Orice scop acceptat are nevoie de un program pe baza căruia să fie înfăptuit.

10. **Logica acceptării şi metoda rezoluției**

Fie λ un literal, iar C şi B clauze disjunctive. Atunci $\lambda \vee C$ şi $-\lambda \vee B$ vor fi clauze disjunctive, iar $C \vee B$ rezolventul lor. Principiul rezoluție postulează că dacă două clauze $\lambda \vee C$ şi $-\lambda \vee B$ sunt ambele adevărate, atunci rezolventul lor va fi şi el adevărat..

$\lambda \vee C$	$A(\lambda \vee C)$	$(A(\lambda \vee C) \wedge A(-\lambda \vee B)) \supset A(C \vee B)$
$-\lambda \vee B$	$A(-\lambda \vee B)$	Acceptance Resolution Principle (P Rez)
---	---	
$C \vee B$	$A(C \vee B)$	

Universitatea Spiru Haret

Cineva care acceptă două clauze ce conțin o pereche opusă de literali şi care unifică între ele, va trebui să accepte şi rezolventul lor ca o consecință logică imediată.

Principiul rezoluției este extins la consecințe oricât de îndepărtate prin teorema derivării rezolutive.

Transpus în logica acceptării acesta afirmă: Cineva care acceptă o bază de cunoştințe K redată în formă normală conjunctivă K_{FN} sau ca un set de clauze, va trebui să accepte, de asemenea, toate clauzele derivate din K prin rezoluție.

$A(x, K), K \vdash C$

$A(x, C)$

În particular, cineva care acceptă regulile şi baza factuală ale unui program în Prolog, va trebui să accepte orice formulă derivată din acel program.

Invers, dacă din motive de ordin empiric factual respingem o consecință C derivată printr-un astfel de program Prolog dintr-un set de reguli KR şi dintr-un set de date factuale KF, atunci va trebui să respingem cel puțin un fapt din KF sau o regulă din KR.

Să presupunem că respingem pe motive observaționale sau experimentale o clauză k1 derivată dintr-un set de reguli KR şi dintr-un set de date factuale KF, atunci va trebui să respingem cel puțin un fapt din KF sau o regulă din KR. Demersul poate fi redat după cum urmează:

$A(KR \wedge KF \models k)$	(1)	hypothesis
Rk	(2)	hypothesis
then::		
$A(KR \wedge KF \supset k)$,	(3)	(Deduction Theorem, 1)
$R(KR \wedge KF)$	(4)	(Modus Tollens, 2, 3)
$R(KR) \vee R(KF)$	(5)	(Conjunction Rejection Schema)

Astfel de scheme de respingere vor fi folosite în mod curent la revizuirea unor baze de cunoştințe, astfel încât să redobândim din nou modele veridice şi consistente în pas cu o realitate dinamică.

Relațiile de dependență demonstrativă pe care le-am definit în forma extinsă a compendiului de față şi modelarea pe automate epistemice ne voie ajuta să refacem acceptabil bazele noastre de cunoştințe. Acelaşi lucru este atins şi prin diferite sisteme de logici nemonotone.

Universitatea Spiru Haret

11. **Axiomatizări ale logicii acceptării**

11.1 *Sistemul modal K şi axiomatizarea logicii acceptării. Sistemul AK*

Sistemul modal K presupune logica propoziţiilor sau logica predicatelor de ordinul întâi. După cum am văzut anterior (vezi cap. VI Logica modală aleativă) în sistemul K avem axioma:

$K(p \supset q) \supset (Kp \supset Kq)$ (K)

În plus, la această infrastructură se admite regula necesitării:

$$\frac{\models \alpha}{\models K\alpha} \text{ i.e. } \frac{\models \alpha}{\models A\alpha} \quad \text{(AN)}$$

Regula necesitării poate transforma orice formulă validă din logica propoziţiilor sau din logica predicatelor de ordinul întâi într-o formulă bine formată de logica acceptării. Regula necesitării a fost introdusă de către logicianul austriac Kurt Gödel creatorul sistemelor modale normale. Aplicând regula necesitării la logica epistemică, de exemplu, se conchide formal că tautologiile logicii propoziţiilor sau ale logicii predicatelor sunt cunoscute de către agenţii epistemici. Evident, aici avem de a face cu un grad înalt de idealizare. În fapt, este greu de admis că există un subiect cunoscător, în carne şi oase, care cunoaşte şi aplică infailibil toate legile logicii clasice.

Din fericire, regula necesitării ne apare mult mai firească pentru cazul logicii acceptării, decât pentru cazul logicii epistemice.

Ea ne spune că, dacă α este o lege logică, atunci α va fi acceptată de către agentul de referinţă.

Dacă $\models \alpha$, atunci $\models A\alpha$ (AN)

Analog sistemului modal K, sistemul modal de logica acceptării AK va admite ca schemă de inferenţă regula necesitării. Vom admite, totodată, ca infrastructură logica propoziţiilor şi logica predicatelor şi regulile clasice din axiomatizarea acestora, respectiv regula substituţiei uniforme SR, regula Modus Ponens MP, regula extensionalităţii (i.e. regula substituirii echivalentelor).

Prima axiomă va fi exact formula care modalizează prin acceptare schema Modus Ponens.

$A(p \supset q) \supset (Ap \supset Aq)$ AK)

În plus, postulăm definiţiile de care am făcut uz şi în expunerea neaxiomatică de până acum:

Universitatea Spiru Haret

D1. $Rp = A\text{-}p$
D2. $Tp = \text{-}Rp$
D3. $Cp = Ap \vee Rp$
D4. $Ip = \text{-}Cp$

Definițiile D1-D4 introduc, în ordine respingerea, tolerarea, angajarea şi indecizia sau îndoiala.

A tolera ceva înseamnă, pur şi simplu, a nu-l respinge. A fi angajat sau decis în privința a ceva înseamnă a-l accepta sau a-l respinge. A fi indecis sau în îndoială în privința a ceva. Indecizia este opusul angajării.

Vom prezenta mai întâi o variantă slabă de logica acceptării, sistemul AK. Vom trece apoi la un sistem puțin mai evoluat, de tăria sistemului modal D. Doar atât ne putem îngădui în etapa actuală, din motive de spațiu.

Dar utilitatea unor sisteme de logica acceptării devine mult mai relevantă pentru activitățile umane pe măsură ce depăşim sistemele modale abstracte, fără agenți, fără condiții, fără abilități sau competențe acționale, fără statut ierarhic, fără restricții de ordin normativ şi fără problema adecvării conduitelor la scopuri sau obiective, etc. .

Vom deriva, pentru început, câteva reguli suplimentare de inferență de genul celor derivate de către Hughes şi Cresswell

DR1. If $\alpha \supset \beta$ este o lege logică, atunci: $A\alpha \supset A\beta$ va fi, de asemenea, o lege logică:

$\alpha \supset \beta$	hyp
$A(\alpha \supset \beta)$	(AN, 1)
$A(\alpha \supset \beta) \supset (A\alpha \supset A\beta)$,	(RS, AK)
$A\alpha \supset A\beta$	(MP, 3, 2)

O altă regulă derivată de inferență va fi:

DR2. Dacă $\alpha \equiv \beta$ este o lege în logica propozițiilor, atunci $A\alpha \equiv A\beta$ va fi o lege în logica acceptării:

$\alpha \equiv \beta$	ip.
$\alpha \supset \beta$	(PL, 1)
$\beta \supset \alpha$	(PL, 1)
$A\alpha \supset A\beta$	(D R1, 2)
$A\beta \supset A\alpha$	(DR1, 3)
$A\alpha \equiv A\beta$	(PL, 4, 5)

În mod similar, vom demonstra regula de inferență:

DR3. Dacă $\alpha \equiv \beta$ este o lege în logica propozițiilor, atunci $A(\gamma \vee \alpha) \equiv$

Universitatea Spiru Haret

$A(\gamma \vee \beta)$, va fi o lege în logica acceptării:
$\alpha \equiv \beta$ ip
$\gamma \vee \alpha \equiv \gamma \vee \beta$ (PL, 1)
$A(\gamma \vee \alpha) \equiv A(\gamma \vee \beta)$ (DR2,2)
Vor fi demonstrate în sistemul AK teoremele:
A 1 $A(p \wedge q) \supset (Ap \wedge Aq)$
1. $(p \wedge q) \supset q$ (PL)
2. $A(p \wedge q) \supset Ap$ (DR1, 1)
3. $(p \wedge q) \supset q$ (PL)
4. $A(p \wedge q) \supset Aq$ (DR1, 3)
5. $A(p \wedge q) \supset (Ap \wedge Aq)$ (PL, 2, 4)

A 2 $(Ap \wedge Aq) \supset A(p \wedge q)$
1. $p \supset (q \supset (p \wedge q))$ (PL)
2. $Ap \supset A(q \supset (p \wedge q))$ (DR1,1)
3. $A(q \supset (p \wedge q)) \supset (Aq \supset A(p \wedge q))$ (SR, AK)
4. $Ap \supset (Aq \supset A(p \wedge q))$ (PL Tranz, 2, 3)
5. $(Ap \wedge Aq) \supset A(p \wedge q)$ (PL Import, 4)

A 3 $A(p \wedge q) \equiv (Ap \wedge Aq)$
1. $A(p \wedge q) \equiv (Ap \wedge Aq)$ (PL, A1, A2)

A 4 $(Ap \vee Aq) \supset A(p \vee q)$
1. $p \supset (p \vee q)$ (PL)
2. $Ap \supset A(p \vee q)$ (DR1, 1)
3. $q \supset (p \vee q)$ (PL)
4. $Aq \supset A(p \vee q)$ (DR1, 3)
5. $(Ap \vee Aq) \supset A(p \vee q)$ (PL, 2, 4)

A 5. $A(p \supset q) \supset (Rq \supset Rp)$ (A MT)
1. $(p \supset q) \supset (-q \supset -p)$ (PL)
2. $A(p \supset q) \supset A(-q \supset -p)$ (DR1, 1)
3. $A(-q \supset -p) \supset (A-q \supset A-p)$ (SR, AK)
4. $A(p \supset q) \supset (A-q \supset A-p)$ (PL Tranz, 2, 3)
5. $A(p \supset q) \supset (Rq \supset Rp)$ (ER, 4, D1)

A 6. $(A(p \vee q) \wedge Rp) \supset Aq$ (P Alt)
1. $((p \vee q) \wedge -p) \supset q$ (PL)
2. $A((p \vee q) \wedge -p) \supset Aq$ (DR1, 1)
3. $A((p \vee q) \wedge -p) \equiv A(p \vee q) \wedge A-p)$ (SR, A3)
4. $(A(p \vee q) \wedge A-p)) \supset Aq$ (ER, 2, 3)
5. $(A(p \vee q) \wedge Rp) \supset Aq$ (ER, 4, D1)

A 7. $(R(p \wedge q) \wedge Ap) \supset Rq$ (P Incop)
1. $-(p \wedge q) \wedge p) \supset -q$ (PL)
2. $A-(p \wedge q) \wedge p) \supset A-q$ (DR1, 1)

Universitatea Spiru Haret

3. $A(-(p \wedge q) \wedge p) \equiv (A-(p \wedge q) \wedge Ap)$ (SR, A3,)
4. $(A-(p \wedge q) \wedge Ap) \supset A-q$ (ER, 2, 3)
5. $(R(p \wedge q) \wedge Ap) \supset Rq$ (ER, 4, D1)

A 8. $(A(p \supset q) \wedge A(q \supset r)) \supset A(p \supset r)$ (P Tranzit.)

1. $((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset (p \supset r)$ (PL)
2. $A((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset A(p \supset r)$ (DR1, 1)
3. $A((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \equiv A((p \supset q) \wedge A(q \supset r))$ (SR, A3)
4. $(A(p \supset q) \wedge A(q \supset r)) \supset A(p \supset r)$ (ER, 2, 3)

A 9. $(A(\lambda \vee C) \wedge A(-\lambda \vee B)) \supset A(C \vee B)$ (Resol P)

1. $((\lambda \vee C) \wedge (-\lambda \vee B)) \supset (C \vee B)$ (PL)
2. $A((\lambda \vee C) \wedge (-\lambda \vee B)) \supset A(C \vee B)$ (DR1, 1)
3. $A((\lambda \vee C) \wedge (-\lambda \vee B)) \equiv (A(\lambda \vee C) \wedge A(-\lambda \vee B))$ (SR,A3)
4. $(A(\lambda \vee C) \wedge A(-\lambda \vee B)) \supset A(C \vee B)$ (ER,2, 3)

A 10. $Tp \equiv -A - p$

$p \equiv - -p$ (PL)
$Ap \equiv - -Ap$ (SR, 1)
$Ap \equiv - -A - -p$ (ER, 2, 1)
$Rp \equiv A-p$ (D1)
$-Rp \equiv -A-p$ (PL, 4)
$Tp \equiv -A-p$ (ER, 5, D2)

A 11. $Ap \equiv -T-p$

1. $-Tp \equiv - -A- p$ (PL, A10)
2. $-T-p \equiv - -A- -p$ (SR, 1)
3. $-T-p \equiv Ap$ (ER, 2, LP, duble neg.)
4. $Ap \equiv -T-p$ (LP, 3)

A 12. $T(p \vee q) \equiv (T p \vee Tq)$

1. $A(-p \wedge -q) \equiv (A-p \wedge A-q)$ (SR, A3,)
2. $A-(p \vee q) \equiv (A-p \wedge A-q)$ (PL, De Morgan, 1)
3. $-A-(p \vee q) \equiv -(A-p \wedge A-q)$ (PL Neg ≡, 2)
4. $-A-(p \vee q) \equiv -A-p \vee -A-q$ (PL, De Morgan, 3)
5. $T(p \vee q) \equiv (Tp \vee Tq)$ (E R, 4, A10)

Vom introduce o nouă regulă de derivare:

RD4. Dacă $\alpha \supset \beta$ este o lege în logica propozițiilor, atunci: $M\alpha \supset M\beta$

Va fi o lege în sistemul de logica acceptării.

Schematic, vom avea ca teză formula:

$\models \alpha \supset \beta \Rightarrow \models T\alpha \supset T\beta$

1. $\alpha \supset \beta$ ip.
2. $- \beta \supset -\alpha$ PL, Contrapos

Universitatea Spiru Haret

3. A-β ⊃ A-α	DR1, 2
4. -A-α ⊃ - A-β	Contrapos, 3
5. Tα ⊃ Tβ	ER, 4, A10
A 13. T(p ⊃ q) ≡ (Ap ⊃ Tq)	
1. T(-p ∨ q) ≡ (T-p ∨ Tq)	(SR, A12)
2. –Ap ≡ T-p	(PL, A11)
3. T(-p ∨ q) ≡ (-Ap ∨ Tq)	(ER, 1,2)
4. T(p ⊃ q) ≡ (Ap ⊃ Tq)	(ER, 3)
A 14. T(p∧q) ⊃ (Tp ∧ Tq)	
1. (p ∧ q) ⊃ p	(P L)
2. T(p ∧ q) ⊃ Tp	(DR4, 1)
3. (p ∧ q) ⊃ q	(PL)
4. T(p ∧ q) ⊃ Tq	(DR4, 3)
5. T(p ∧ q) ⊃ (Tp ∧ Tq)	(PL, 2, 4)
A 15. A(p ∨ q) ⊃ (Ap∨ Tq)	
1. A(-q ⊃ p) ⊃ (A-q ⊃ Ap)	(SR, AMP)
2. A(q ∨ p) ⊃ (-A-q ∨ Ap)	(PL, 1)
3. A(p ∨ q) ⊃ (Ap ∨ -A-q)	(PL, 2)
4. A(p ∨ q) ⊃ (Ap ∨ Tq)	(ER, 3, D1, D2)

11.2. Sistemul D şi logica acceptării. Sistemul AD

Adăugăm la sistemul AK prezentat mai sus o nouă axiomă (vezi AD mai jos) care agentului de referință să fie consistent în opiniile, ofertele sau deciziile sale. Pe această cale vom obține un nou sistem axiomatic normal de logica acceptării, analog sistemelor deontice wrightiene P sau O pe care le-am prezentat şi discutat critic cu două decenii în urmă în cartea noastră Teoria acțiunii şi logica formală.

Axiomele sistemului AD sunt:

A(p ⊃ q) ⊃ (Ap ⊃ Aq)	(AK)
- (Ap ∧ Rp)	(AD)

Axioma AD declară că nici o opinie, ofertă, pretenție, rugăminte sau scuză etc. nu poate fi în același timp şi acceptată şi respinsă. Această axiomă este analoagă axiomei wrightiene –(Op∧-Op). Axioma AD descrie un principiu axiologic al consistenței mutuale a deciziilor pe care le luăm şi a judecăților de valoare pe care le facem. Acestea nu trebuie să se bată cap în cap. În viața politică şi în administrația locală nu o dată legile, deciziile pe care le iau autoritățile se contrazic unele pe altele creând oportunități pentru abuzuri, infracțiuni şi contravenții.

Universitatea Spiru Haret

Pe baza axiomei AD, a definiției D2 şi a regulii extensionalității sau a substituirii echivalentelor putem demonstra teoremele:

A 16. Ap ⊃ Tp

1. –Ap ∨ -Rp	(PL, AK)
2. Ap ⊃ -Rp	(PL, 1)
3. Ap ⊃ Tp	(ER, 2, D2)

A 17. T(p ∨ -p)

1. A(p ∨ -p) ⊃ T(p∨ -p)	(SR, A16)
2. p ∨ -p	(PL)
3. A(p ∨ -p)	(Accept Rul., 2)
4. T(p ∨ -p)	(MP, 1, 3)

A 18. Tp ∨ T-p

1. T(p ∨ -p) ⊃ (Tp ∨ T-p)	(SR, A10)
2. Tp ∨ T-p)	(MP, 1, A17)

A 19. Ap ∨ Rp ∨ Ip

1. p ∨ -p	(PL)
2. Dp ∨ -Dp	(SR, 1)
3. Dp ∨ Ip	(ER,2, D4)
4. Ap ∨ Rp ∨ Ip	(ER, 3, D3)

A 20. Ip ⊃ -Ap

1. p ∨ -p ∨ q	(PL)
2. Ap ∨ -Ap ∨ Rp	(SR, 1)
3. Ap ∨ Rp ∨ -Ap	(PL, 2)
4. Dp ∨ -Ap	(ER, 3, D3)
5. –Dp ⊃ -Ap	(PL, 4)
6. Ip ⊃ -Ap	(ER, 5, D4)

A 21. Ip ⊃ -Rp

1. q ∨ p ∨ -p	(PL)
2. Ap ∨ Rp ∨ -Rp	(SR, 1)
3. Dp ∨ Tp	(ER, 2, D2,D3)
4. –Ip ∨ Tp	(PL, 3, D3, D4)
5. Ip ⊃ Tp	(PL, 4)
6. Ip ⊃ -Rp	(ER, 5)

A 22. Tp ≡ Ap ∨ Ip

1. Ip ⊃ Tp	(ER, T21, D3)
2. Ap ⊃ Tp	(A16)
3. (Ap ∨ Ip) ⊃ Tp	(PL, 1, 2)
4. Rp ∨ Ap ∨ Ip	(PL, T19)
5. –Rp ⊃ Ap ∨ Ip	(PL, 4)

Universitatea Spiru Haret

6. $Tp \supset (Ap \vee Ip)$ (ER,5, D2)
7. $Tp \equiv Ap \vee Ip$ (PL, 3, 6)

A 23. $Cp \equiv Ap \vee Rp$

1. $p \equiv p$ (PL)
2. $Cp \equiv Cp$ (SR, 1)
3. $Cp \equiv Ap \vee Rp$ (ER, 2, D3 9

Sistemul AD descrie o teorie normală a acceptării sau respingerii opiniilor, pretenţiilor, ofertelor sau argumentelor. În plus, spre deosebire de sistemul AK, în sistemul AD este în mod explicit postulată teza consistenţei mutuale a aserţiunilor, ofertelor sau programelor pe care un agent le acceptă.

În plus, opiniile acceptate de către un agent sunt, totodată, tolerate.

Logica acceptării cere agenţilor să accepte toate legile logice sau cel puţin să le tolereze. Acceptarea legilor logice impune agenţilor participanţi la dialogul social sau la conduitele sociale o restricţie de raţionalitate.

În raport cu un enunţ, ofertă sau opinie un agent poate adopta doar una din următoarele trei atitudini: 1. să-l accepte, 2. să-l respingă sau 3. să rămână indecis în privinţa acestuia. (vezi T 19).

Angajarea unui agent în privinţa unei opinii sau oferte înseamnă depăşirea stării de dubiu sau îndoială şi fixarea unei atitudini explicite de acceptare sau respingere (vezi T 23). Invers, indecizia sau îndoiala înseamnă în acelaşi timp neacceptare şi nerespingere. Este o stare de incertitudine sau ezitare, o stare de neangajare. Indecizia sau dubiul presupune sau implică toleranţa sau nerespingerea (vezi A22)

Angajarea şi indecizia sau dubiul sunt una negaţia celeilalte (vezi D2)

În raport cu o opinie sau o problemă dată, un agent poate fi într-o stare de edificare, decizie sau angajare sau dimpotrivă, într-o stare de indecizie sau dubiu. Atitudinile sau stările agenţilor sunt dinamice şi depind de evoluţia sistemului de referinţă şi de informaţiile şi argumentele pe care le deţin aceştia.

Versiunile monadice de logica acceptării prezentate în sistemele AK şi AD descriu atitudini posibile ale agenţilor individuali sau colectivi, dar nu dau seama de dinamica acestora, de mecanismul intim al schimbării atitudinilor. Pentru aceasta vom avea nevoie de teorii ale opiniilor nemonotone şi dinamice sau de teorii ale disputelor argumentative cu baze de cunoştinţe ce pot fi actualizate, înnoite parţial sau total.

Universitatea Spiru Haret

În plus, nu trebuie uitat că lumea opiniilor şi atitudinilor este mereu legată de lumea proiectelor, deciziilor şi conduitelor umane. Logica acțiunii, logica doxastică sau teoria opiniilor şi logica judecăților de valoare trebuie văzute ca teorii intim legate între ele.

Ceea ce ne-a condus la o teorie logică a acceptării a fost nevoia construirii unui model sintactic, semantic şi pragmatic al demersului argumentativ dintre un argumentator şi adresantul său, replicile sau contra-argumentele sale şi moderatorul disputei şi asistența acestora. Acceptarea sau respingerea unui argument, ca şi a unei propuneri în tratative duse între adversari, sunt judecăți de valoare făcute în contexte pragmatice.

Teoriile prezentate mai sus sunt teorii formale axiomatice dezvoltate într-un cadru de logică clasică, monotonă, care nu dau seama de agenții care acceptă sau resping, de situațiile în care fac aceste acte.

Este, desigur, utilă o tentativă de „tălmăcire" în termenii teoriei acceptării a sistemelor logice modale mai tari, cum sunt T, S4, B, S5.

Axioma specifică a sistemului T, $Lp \supset p$ nu pare a fi relevantă pentru teoria pe care o avem în vedere. Formula $Ap \supset p$ nu are interpretări adecvate, după noi, nici în logica deontică, nici în cea a scopurilor şi nici în cea a acceptării. Expresia „Dacă accept p, atunci p" nu pare a corespunde unei stări de fapt.

În schimb, sistemele cu operatori iterați, cum sunt S4 şi S5, ca şi alte sisteme situate ca ordin de tărie între acestea S4.1, S4.2 şi S4.3 pot tenta şi încuraja construcțiile formale.

12. **Sfârşit de capitol şi început de drum**

Cercetarea de față propune o teorie logică a actelor de evaluare şi decizie a unor aserțiuni, opinii, propuneri, oferte, cereri, pretenții, proiecte etc. pe care noi am numit-o logica acceptării. Logica acceptării este o teorie logică trivalentă în care în loc să operăm ca în logica matematică clasică cu valorile „adevărat" şi „fals" sau 1 şi 0, operăm cu valorile aparent subiective „accept", „resping" sau „rămân indecis". Valorizările „accept", „resping" şi „rămân indecis" pot fi privite ca o generalizare a logicii clasice legată de valorile de adevăr. În logica acceptării putem accepta un enunț pentru că este adevărat şi-l putem respinge pentru că este fals. Dar noi putem accepta o decizie pentru că este corectă, justă sau legală, putem accepta o propunere

Universitatea Spiru Haret

pentru că este convenabilă şi putem accepta o rugăminte a unui solicitant pentru că aceasta este îndreptățită. Putem accepta un program sau o metodă pentru că sunt adecvate situației, pentru că sunt ieftine sau eficace.

Logica acceptării este apropiată de situațiile acționale şi de actele de vorbire. Putem construi multe variante aplicate de logică a acceptării în funcție de situațiile acționale pe care le avem în față şi de clasele de probleme pe care le avem de rezolvat. O teorie logică devine astfel un limbaj formal însoțit de o semantică şi o pragmatică adecvată.

Logica acceptării este o teorie axiologică de nivel metateoretic. După cum am văzut în capitolul V ea poate fi prezentată ca o generalizare a logiciilor epistemice, doxastice create de Jakko Hintikka sau a teleologicii propuse de noi în 1978.

Logica acceptării intervine în mod firesc în disputa argumentativă pe parcursul căreia interlocutorii acceptă, se îndoiesc sau îşi resping pe rând unele argumente sau teze pe care le apără. Într-o argumentare obiectul disputelor nu-l constituie doar enunțurile adevărate sau false, ci şi atitudinile, deciziile, programele şi conduitele participanților la controversele publice şi la activitățile sociale.

Am elaborat pentru logica acceptării şi o tratare axiomatică, Tratarea axiomatică este una inițială, simplă, normală, de tip K şi D. Am demonstrat 23 de teoreme analoage unor teoreme din sistemul K prezentate în manualele clasice de logică modală semnate de G.E. Hughes şi M. J. Cresswell. Cele două sisteme de logica acceptării sunt sisteme normale, monadice, fără agenți, fără să stipuleze condiții sau criterii pentru acceptarea sau respingerea unor opinii, cereri, oferte, rugăminți, pretenții sau ordine. Sunt sisteme sărace, nepragmatizate. Pot fi conectate cu modele programabile de logica acțiunii şi cu modele programabile de teoria argumentării. La fel, pot fi conectate cu teoria formală a negocierii şi ofertelor, căci şi ofertele pot fi acceptate sau respinse.

Am captat în sistemele axiomatice de logica acceptării schemele de inferență stoice şi principiul rezoluției. Ele fac uz de noțiunile de acceptare, respingere şi tolerare.

Multe dintre teoremele logicii monadice a acceptării sunt sub raport sintactic de tip D, ca cele din logica deontică standard, cu două deosebiri. Sistemul standard D este îmbogățit cu definițiile D1 –D4 din coloana dreaptă şi este interpretat în domeniul teoriei acceptării. Sistemul D descrie o teorie „normală „a acceptării şi respingerii unor opinii, pretenții,

Universitatea Spiru Haret

argumente, oferte etc. . În plus, faţă de sistemul K, în el apare problema consistenţei mutuale a angajărilor noastre axiologice. Potrivit acestui sistem: acceptările sunt tolerabile; tautologiile sunt tolerabile sau ceva trebuie întotdeauna tolerat; în raport cu o opinie, pretenţie, cerere putem adopta numai una dintre cele trei atitudini: să o acceptăm; să o respingem sau să rămânem indecişi; indecizia este neacceptare şi nerespingere; tolerabilitatea este acceptare sau indecizie; tolerabilitatea este nerespingere, decizia este angajare sau respingere; dubiul este „suspendarea" angajării epistemice sau doxastice este starea de oscilare, cumpănă sau indecizie într-o chestiune oarecare.

Teoria logică a acceptării, nepragmatizată şi neoperaţionalizată, nu spune prea multe, nici pentru teoria deciziei şi nici pentru teoria evaluării situaţiilor acţionale sau a conduitelor accesibile din diferite situaţii acţionale. Dar ea reprezintă o schemă sau o structură sau carcasă logică de bază care poate fi dezvoltată în mai multe direcţii.

Putem dezvolta această teorie prin introducerea situaţiilor acţionale şi a modelelor lor, prin introducerea pentru fiecare agent a unor stări iniţiale şi a unor stări ţintă sau scop, precum şi a unui alfabet de acte elementare ca etichete ale unor drumuri posibile între mulţimea de start a stărilor iniţiale şi în mulţimea stărilor terminale pe care sunt definite scopurile. Mai departe, conduita agenţilor, relaţiile lor de cooperare şi competiţie pot fi descrise cu ajutorul unor automate nedeterministe. [60].

Logica acceptărilor poate fi tratată şi în contextul bazelor relaţionale de cunoştinţe ce fac uz de demonstraţii automatizate şi de programare logică.

Cercetarea de faţă poate fi întregită prin adăugarea la sistemul prezentat a unor noi axiome analoage sistemelor D, T, S4, B, S5.

Teoria acceptării poate fi dezvoltată prin trecerea la sisteme cu un grad sporit de angajare pragmatică sau acţionalistă: logica acceptării cu agenţi şi situaţii acţionale care să permită functori iteraţi. La acest nivel logica acceptării va putea descrie acordurile şi conflictele doxastice, precum şi strategiile de monitorizare şi soluţionare a acestora.

Am cercetat în capitolul IV distincţia dintre acceptare şi acceptabilitate, distincţia dintre o acceptare accidentală şi o acceptare sistematică sau convingere şi am construit modele, semantice pentru acestea.

Cercetarea logică a corelaţiilor dintre, stările de fapt, stările de opinie şi componenta discursivă ne-a permis să captăm în teoria logică noţiunile de sinceritate, rea credinţă, felonie şi minciună. La fel, am

Universitatea Spiru Haret

putut defini într-un sistem de logică modală ideea de acceptare ocazională sau accidentală şi conceptul de convingere a unui agent într-o situaţie sau circumstanţă dată.

Logica acceptării este o speţă de logica acţiunii ce descrie judecăţile de valoare ale agenţilor. Ea are relevanţă moral-filozofică şi apare ca o generalizare la nivel axiologic, căci, în mod firesc, individul uman acceptă ceea ce este adevărat, bine, util, legal, plăcut şi frumos şi respinge ceea ce este fals, rău, inutil, ilegal, neplăcut sau urât. Logica acceptării este o teorie a evaluărilor circumstanţiale efectuate de către agentul individual după propriile sale criterii şi opţiuni valorice. De îndată ce admitem mai mulţi agenţi putem cerceta şi concordanţa şi conflictele de opinie, de scop sau de program precum şi gradele diferite de eficacitate sau eficienţă.

Un agent poate accepta o bază de cunoştinţe sau, dimpotrivă, poate avea reţineri, obiecţii faţă de unele dintre itemurile din care este alcătuită aceasta şi poate cere revizuirea bazei de cunoştinţe, în concordanţă cu un nou stadiu de dezvoltare a experienţei, cunoştinţelor şi sistemului de valori la care aderă o comunitate umană. O etapă în dezvoltarea logicii acceptării o va reprezenta cercetarea devenirii în timp a opiniilor sau credinţelor unui subiect cunoscător sau decident, descrierea formală a biografiei spirituale a acestuia. Încheiem aici un capitol cu speranţa că este un început de drum al nostru şi al altora.

Încheiere

Punem aici capăt drumului nostru prin ţara logicii. Nu pentru că am fi parcurs toate provinciile sale, ci pentru că puterile călătorului sunt limitate.

În primul volum ne-am ocupat de două teorii de bază ale logicii moderne, de logica propoziţiilor şi de logica predicatelor. Acestea sunt temelia pe care se înalţă toate celelalte teorii logice.

După cum am văzut, chiar din primul volum logica nu este o teorie unică, ci un ansamblu de limbaje formale, fiecare cu semantica sa, care la un loc dau seama de o clasă de demersuri şi proprietăţi ale gândirii umane corecte. În plus, logica modernă, spre deosebire de logica aristotelică sau clasică, dispune de o gamă variată de metode şi procedee de decizie prin care putem verifica statutul formulelor ce

Universitatea Spiru Haret

descriu, la nivelul teoriilor logice, demersul raţional al fiinţelor umane ce fac uz de limbile naturale.

Am cercetat în volumul întâi mai multe astfel de metode, multe dintre ele pentru prima dată în literatura logico-filosofică românească. Metoda arborilor de decizie, metoda lui Quine, rezoluţia lui Robinson şi rezoluţia duală, diferite strategii rezolutive, calculul secvenţial, metoda extinderii conservative a interpretărilor parţiale, metoda Davis-Putmam, toate sunt procedee de decizie şi evaluare a formulelor bine formate care ne dezvăluie virtuţile sau viciile raţionamentelor sau bazelor de cunoştinţe de la care am plecat. Desigur, pentru aceasta a fost nevoie să „traducem" enunţurile din limba naturală în limbajele logice, să le formalizăm.

Gândirea umană redată de teoriile logice, ca şi producţia modernă înfăptuită prin tehnologii, nu se poate face fără unelte, mai mult sau mai puţin rafinate. Nici măcar lemne nu putem tăia fără secure. Peste tot avem nevoie de unelte, de instalaţii şi maşini şi mai recent de calculator.

Nu trebuie deci, să ne mirăm că avem nevoie de tehnici şi metode în logica modernă. Chiar şi logica aristotelică avea nevoie de anumite tehnici şi metode, cum ar fi simbolistica silogismelor, reducerea silogismelor din figurile II, III şi IV la cele din fig. I, reducerea la absurd, diagrame Euler, diagrame Venn, schemele pătratului logic. Din nefericire, limbajul logicii aristotelice are o slabă forţă expresivă şi metodele acestei logici nu dau seama de raţionamentele din limbile naturale.

În cel de al doilea volum ne-am ocupat, în primul capitol, de nivelurile la care se realizează gândirea logică: la nivelul gândirii tacite, nivelul discursului oral sau scris, nivelul limbilor naturale, nivelul limbajului obiect al unei teorii logice şi nivelul metateoretic, când vorbim despre limbajele teoriilor logice. La acestea mai adăugăm nivelul existenţei fizice sau sociale. Cercetarea acestor niveluri şi a relaţiilor dintre ele ne-a permis să înţelegem ce este o interpretare şi un model, ce este o inferenţă şi un calcul, ce înseamnă o formalizare sau o determinare, etc. .Tot în volumul 2 am prezentat axiomatizarea logicii propoziţiilor şi a logicii predicatelor, metateoria acestor teorii, demonstraţiile de non contradicţie şi completitudine, independenţa etc.

Am prezentat, mai departe, într-o viziune nouă, teoria definiţiilor şi teoria clasificărilor în contextul teoriei sistemelor axiomatice sau a deducţiei din ipoteze sau din baze de cunoştinţe.

Universitatea Spiru Haret

Teorema deducției s-a dovedit a fi o cale de scurtare a demonstrațiilor din sistemele axiomatice şi un prilej de a exercita nişte scheme de calcul natural.

Un spațiu larg am acordat logicilor neclasice, în deosebi logicilor modale aletice, sistemelor normale K, D, T, S4, B, S5. Am prezentat succint logicile temporale, şi cele dinamice. Logicii deontice i-am acordat un spațiu mai extins.

Dar am omis, din motive de spațiu, logica intuiționistă, ca o variantă de logică neclasică deviantă, care abandonează sau respinge unele legi admise în logica clasică cum ar fi principiul dublei negații. La fel, am omis logicile epistemice şi doxastice create de Jakko Hintikka şi teoria logică a scopurilor şi programele propusă de noi în anii 70. Într-un fel, scopurile asumate de către un agent pot fi privite, din perspectiva logicii deontice, ca auto-obligații, tot aşa cum obligațiile pot fi văzute, din perspective teleologicii, ca scopuri cu agent extern sau diferit de subiectul executant.

Am încheiat itinerarul nostru cu expunerea unei teorii noi, logica acceptării publicată de noi în 2001 ca o variantă de logică a judecăților de valoare.

Logicile modale sunt pământuri noi pe harta domeniilor logicii. Exploatarea lor este abia la început. Dincolo de interesul lor teoretic speculativ pentru un capitol sau altul al reflecției filosofice, cum ar fi ontologia, epistemologia, lumea valorilor şi a conduitelor umane, etica sau filosofia dreptului, logicile modale interesează astăzi inteligența artificială, ştiințele cognitive, disciplinele tehnice şi inginereşti şi, evident, disciplinele sociale, dreptul, sociologia, managementul, ştiințele politice şi cele administrative etc. .

Asistăm la un proces rapid de pragmatizare a logicii. Se dezvoltă în ritm rapid ramurile logicii legate de activitățile practice umane pe care noi le cuprindem astăzi sub denumirea de logica acțiunii. Includem aici: teleologica sau teoria logică a scopurilor şi programelor, performantica sau teoria execuției efective a unui program anterior fixat, teoria abilităților sau competențelor executive ale agenților, logica deontică, teoria structurilor organizaționale sau a instituțiilor ca teorie a agenților colectivi, a statutelor şi atribuțiilor acestora, a relațiilor ierarhice şi a raporturilor de comandă şi de execuție, teoria relațiilor de cooperare, competiție şi de concurență, teoria directivelor practice, logica acceptării şi logica imperativelor ca sisteme de axiologie formală, teoria erorilor practice şi a succesului, teoria argumentării ca logică aplicată la o situație

Universitatea Spiru Haret

acţională, precum şi mai multe de sisteme modale mixte de care ne-am ocupat în anii 1980.

Pe atunci am cercetat sistemele teleodeontice simple, fără operatori iteraţi, sistemele temporal teleologice, axiologico-deontice şi alte specii de hibridări modale. Am introdus, încă de pe atunci, în sistemele modale mixte, agenţii şi condiţiile în care interveneau angajările teleologice, normative sau axiologice. Astăzi ne atrag sistemele modale mixte cu operatori iteraţi în care să putem da seama de propoziţii de forma: S(x, q, O(y, r, Do(z, s, p))) care descriu propoziţia: „Agentul x îşi asumă în situaţia q scopul de a obliga pe agentul y în situaţia r de a-l face pe agentul z să execute, în situaţia s acţiunea p". La fel putem concepe variante de logici modale mixte edificate, în loc de logica propoziţiilor, pe logica predicatelor de ordinul întâi.

Putem porni şi invers de la diferite propoziţii exprimate în limbile naturale ale căror formalizări ne impun alcătuirea unor formule modale mixte. „Nimeni nu poate tot ce vrea. Trebuie să vrem ce putem.". Termenii „poate", „putem", „vrea", „vrem" din propoziţia citată sunt termeni de logică modală. Dar nu de logică modală aletică în sens clasic, şi nici de logică a modalităţilor fizice,ci de logica modalităţilor acţionale într-un sens pe care noi l-am definit prin anii 1983-86, într-un mănunchi de studii publicate în Revista de Filosofie, în Revue Roumaine des Sciences Sociales, Serie de Philosophie et Logique, în Analele ştiinţifice ale Universităţii „Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi, tom XXXII, 1986 sau în studiul „Logica modalităţilor acţionale" din Logica acţiunii. Studii, coordonat de noi şi tipărit la Editura Ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.

Trăim în epoca sistemelor modale multidimensionale şi în epoca sistemelor modale dinamice. La nivelul acestora se concep modele operaţionale pentru multe aspecte ale activităţilor umane, inclusiv pentru relaţiile de cooperare şi competiţie dintre agenţi, pentru descrierea planurilor şi programelor de acţiune, a criteriilor şi actelor de decizie. Logica acţiunii, având direcţiile tematice menţionate mai sus, şi de care noi ne ocupăm de aproape trei decenii este o disciplină de viitor. La fel, considerăm de certă actualitate teoretică şi practică teoria argumentării.

Sperăm să avem, în acest deceniu, răgazul unor sinteze monografice pe aceste două teme majore.

Universitatea Spiru Haret

Bibliografie

Åqvist, L., *A New Approach to the Logical Theory of Actions and Causality*, în S Stenlund (ed) *Logical Theory and Semantic Analysis*, D Reidel Publishing Company Dordrecht Holland, 1974, p.73-91.

Åqvist, Lennart, *Deontic Logic*, în D Gabbay and F. Guethner(eds) Handbook of Philosophical Logic, vol II, 1984, p. 6o5-714.

Åqvist, Lennart, *Supererogation and offence în deontic logic. An Analysis within Systems of Alethic Modal Logic with Levels of Perfection în Rysiek Sliwinski,* (ed) *Philosophical Crumbs. Essays dedicated to Ann-Mari Henschen – Dahlquist on the occasion of her seventty-fifth birthday,* Uppsala, Department of Philosophy, Uppsala University, 1999 (*Uppsala Philosophical Studies* 49, p. 261-276, © Lennart Åqvist 1999.

Balzer, W., Sander, J. *Towards the Qualitative Plan-based Simulation of International Crisisy* (preprint)

Barbuceanu Mihai, *Agents That Work în Harmony by Knowing and Fulfuling Their Obligations*, AAAI, 1998,

Barwise, Jon, *Scenes and other Situations,* în *The Journal of Philosophy*, Inc. 1981.

Barwise, Jon, *The Situation în Logic – I*, în Barcan Marcus et al., eds., *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*, © Elsevier Science Publishers B. V. (1986) 183 – 203.

Barwise,. Jon, *On the Model Theory of Common Knowledge.*

Benthem, J.van, *Temporal Logic*.

Bieltz, Petre, Gheorghiu, Dumitru, *Logică Juridică,* Editura ProTran-silvania, Bucureşti, 1998.

Bieltz, Petre, Gheorghiu, Dumitru, *Logică şi argumentare,* Teora Educațional.

Boolos, George S, Jeffrey, Richard C. *Computability and Logic,* Cambridge University Press, 1989.

Bratko, Ivan, *Programming in Prolog for Artificial Intelligence,* Addison-Weslwy, 1986.

Bus, David M, Gomes, Mary, Higgins, S. Dolly, and Lautern, Karen, *Tactics of Manipulations, Journal of Personality and Social Psychology,* 1987, Vol 52, No 6, 1291-1229.

Universitatea Spiru Haret

Conte, Rosaria and Castelfranchi, *Cristiano Norms as mental objects. From normative beliefs to normative goals,* SBSP, *Social Behavior Simulation Project*, Istituto di Psicologia, CNR, V. le Marx 15, I-00137 Roma, Italia.

Copy, M., Irving Gödel' Proof, *Scientific American*, 1959, reprodus în *Contemporary Readings în Logical Theory*, The Macmillan Company, New Yorck, 1967.

Dumitru Mircea, Modalitate .....

Espinas, Alfred, *Les origines de la technologie*, în *Revue Philosophique de la France et de l' Europe*, 1980.

Eemeren, Frans H.van, *Handbook of Argumentation Theory*, Amsterdam, 1987.

Eemeren, Frans H. van Grootendorst, Rob, *Argumentation, Communication, and Fallacies,* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, London, 1992.

Engestrom, Y., *Developmental work research: reconstructing expertise through expansive learning*, în Nurminen, M. I. & Weir, G.R.S. (eds.) Human jobs and computer interfaces. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 265-290.

Cristian Coarfa, *Negociation – Based Multiagent System, Agent Based Approaches in Intelligent Systems*, „Politehnica" University of Bucharest, 13-16 July 1998.

Ellis, B. *Rational Belief Systems*, Oxford: Blackwell, 1979.

Enescu Gh. *Tratat de logică*, Editura Lider, 1997.

Fitting, Melvin, *Basic Modal Logic*, p. 365-447.

Gabbay, Dov, Kurucz,A. Wolter, F., Zakharyaschev, *Many-dimensi-onal Modal Logic: Theory and Applications* http://www.dcs.kcl.ac.uk/staff/my/GKWZ/gkwz.html

Gavriliu, Leonard, *Mic tratat de sofistică*, Editura Iri, 1996.

Genesereth, M.R., Nilsson, Nils, *Logical Foundation of Artificial Intelligence,* Morgan Kaufmann Publ., 1987.

Gardenfors, Peter, *Knowledge în Flux, Modelind the Dynamics of Epistemic States*, The MIT Press, Cambridge, Massashusetts, London, England, 1988.

Georgeff, M.P. *A Theory of Action for Multi-agents planing*, în *Proc AAAI-84* Austin TX. 1984, p. 125-129.

Harel, David, *First Order Dynamic Logic*, volume 68, *Lecture Notes in Comput*. Sci. Springer Verlog, 1978.

Harel, David, Kozen, Dexter, Tiuryn, Jerzy, *Dynamic Logic*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2000.

Huges, G. E., Cresswell, M.J. *An Introduction to Modal Logic*, Methuen.

Universitatea Spiru Haret

Huges, G. E., Cresswell, M.J. *An New Introduction to Modal Logic*.
Hilbert, D., Bernays, P. *Grundlagen der Mathematik, I*, în l. rusă *Osnovania Matematiki Loghiceskie iscisleniia i formalizația Ariftetiki*, Moskva, Nauka, 1982.
Hilbert, D., Bernays,P. *Grundlagen der Mathematik, II* în l. rusă *Osnovania Matematiki*, Teoria Dokazatelstva, Moskva Nauka, 1982.
Hintikka, J.K.K., *Knowledge and Belief*, Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1962.
Nienhuys-Cheng, Shan-Hwei şi Wolf, de Roland, *Foundations of Inductive Logic Programming*, Springer, 1997.
Ioan Petru, *Axiomatica*, Editura Științifică, 1980.
Ioan, Petru, *Logică şi metalogică*, Junimea 1983, p. 93-155.
Kahane, Howard, *Logic and Contemporary Rhetoric*, Wadsworth Publishing Company, 1991.
Kambartel, F. and Schneider, H. J *Constructing a pragmatic founda-tion for semantics,* în *Contemporary philosophy. A new survey*, vol 1, p. 155-178.
Kalinowski, George, *Introduction a la Logique Juridique*, LCDY, Paris, 1965.
Kleene, S. C. *Introduction to Metamathematics*, D. van Nostrand Company 1952, v. rusă 1957din 1955 p. 332-340.
Kneebone, G. T. *Mathematical Logic and the foundations of mathematics*, Van Nostrand, 1963.
Lifschitz, Vladimir, *Formal Theories of Action (Preliminary Report), Reasoning*, p.966-972.
Lucas, J. R., *Responsibility*, Clarendon Press, 1993.
Menzies, Tim *Applications of Abduction: Knowledge- Level Modeling*, Dept Software Development, Monash University, Caulfield East, Melbourne, Melbourne, Australia 3185.
Meyer, J.-J. Ch. *A Different Approach to Deontic Logic: Deontic Logic Viewed as Variant of Dynanic Logic*. În Notre Dame Journal of Formal Logic, 1991, 29 (1)109-136.
Meyer J.-J.Ch., R.J. Wieringa, *Applications of deontic logic in computer science: A concise overview*, în J.-J.Ch. Meyer and R.J. Wieringa, editors, *Deontic Logic în Computer Science: Normative System Specification,* p. 17-40. Wiley, 1993.
Miettenin, R., *The Concept of Activity in Analysis of Hetereogenuous Network în Innovation Process*, CSTT Workshop, Actor Network and After; July 1997.
Nowakowska, Maria, *Language of Motivation and Language of Action*. The Hague, 1973.
Levi, Isaac, *For the Sake of the Argument, Ramsey Test Conditionals, Introductive Inference, and Nonmonotonic Reasoning*, Cambridge University Press, 1996.

Universitatea Spiru Haret

Livius, Titus, *Ab urbe condita (De la fundarea Romei),* vol. 1-2, Biblioteca pentru toţi,

Mihai Gheorghe, Elemente constructive de argumentare juridică, Minerva, Bucureşti, 1976.

Maritain, Jacques, *An Introduction to Logic, Sheed and Ward*, London, 1937.

Meyer, Michel, *Logique et argumentation*, Bruxelles, 1991.

Mihai, Gheorghe, *Elemente constructive de argumentare juridică*, Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1982.

Mihai, Gheorghe, Papaghiuc, Gheorghe, *Încercări asupra argumentării*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

Năstăşel, Eugen, Ursu, Ioana, *Argumentul sau despre cuvântul bine gândit,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1980.

P.S.Novikov, *Elementî Matematiceskoi Loghiki*, Iz. Nauka, Moskva, 1973, 244-253.

Plantin, Cristiana, *Essais sur l'Argumentation, Introduction linguistique a l'etude de la parole argumentative*, Edition Kime, 1990.

Popa, Cornel, *Teoria definiţiei*, Editura Ştiinţifică, 1972.

Popa, Cornel, *Logic of Cognitive Acceptances and the Hypotheses of Epistemic Automata*, în *Progress in Cybernetics and Systems Research,* Eds Robert Trappl, Luigi Ricciardi and Gordon Pask, Hemisphere Publishing Corporation, 1982, p. 447-451.

Popa, Cornel, *Conceptul de cunoaştere*, în *Teoria cunoaşterii ştiinţifice*, Editura Academiei Republicii Socialiste România,1982, p. 87-124.

Popa, Cornel, *Logica predicatelor*, Editura Hyperion, 1992.

Popa, Cornel, *Teoria acţiunii şi logica formală*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1984.

Popa, Cornel, Florea, Adina, Magda *Human Action, Automata and Prolog,* în *Economic Computation and Economic Cibernetics Studies and Research*, 1-4, 1995, p. 33-52.

Popa, Cornel, *Logic, Formal Languages and Theory of Argumentation în Revue Romaine des Sciences Juridiques*, Tome VI, nr. 2, 1995, p. 205-220.

Popa, Cornel, (în colaborare), *Expert System and Argumentation Theory*, *Revue Roumaine des Sciences Juridiques*, Tome VII(XL), Nr. 1, Janvier – Juin 1996, p. 75-87.

Popa, Cornel, (în colaborare), *Automated Problem Solving and Argumentation*, în *Revue Roumaine des Sciences Juridiques*, Tome VIII(XLI) Nr. 1, Janvier-Juin 1997, p. 97-108.

Popa, Cornel, *Logica simbolică şi bazele de cunoştinţe*, I, II, Universitatea „Politehnica" Bucureşti, 1998, vezi partea IV-a, *Teoria argumentării.*

Popa, Cornel, *Logica acţiunii, programele şi conflictele interumane*, în *Revista Română de Informatică şi Automatică*, vol. 10, nr.1, 2000, p 29-43.

Universitatea Spiru Haret

Popa, Cornel *Teoria acţiunii şi logica formală*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1984.

Popa, Cornel, **(coordonator) Cornel Popa**, *Logica acţiunii. Studii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1983.

Popa, C., Lopatan, I., Stratulat, S., *Logic, Prolog and Legal Sentence. Workshop on Legal Applications of Logic Programming.* Genova, June 13-16, 1994. p.112-127.

Popa, C., *Logic of Action and Rationality of Human Activity, în Praxeologies and the Philosophy of Economics*. J.L. Auspitz, W. W. Gasparski, M. Mlicki, K. Szaniawski, Eds., Transactions Publishers, New Jersey, 1992, p.537-585.

Popa, C. *Norms, Behaviour and Lawfulness*, în *Revue Roumaine des Sciences Juridiques*. Tome III, XXXVI, nr.1, Janvier-Juin, 1992, p.17-48.

Popa, C., *Eilenberg Automata, Formal Languages and Semantics of Modal Logic,* în *Revue Roumaine de Philosophie*. Tome 35, nr. 3-4, 1991, p.163-171.

Popa,C., *Purposive Automata and Action Modalities* în *Revue Roumaine de Philosophie*, Tome 35, nr. 1-2, 1991.

Popa, C., *Goals, Norms and Finite Automata*, în *III International Congress on Expert Systems in Law*. Florence, 1989.

Popa, C., *Logic of Operational Modalities and Artificial Intelligence*, în *Revue Roumaine de Sciences Sociales. Serie de Philosophie et Logique*, Tome 29, nr.3-4, Juillet-Decembre, 1985. p.243-253.

Popa, C., *Logic of Cooperation, Efficiency of Actions and the Concept of Practical Error*, în *Philosophical Thinking in Romania Today*, Editura Ştiinţificcă şi Enciclopedică, Bucharest 1979, p. 146-173.

Popa, Cornel, *Logica predicatelor*, Editura „Hyperion", 1992

Popa, Cornel (joint paper with Professor Adina Magda Florea), *Human Action, Automata and Prolog*, în *Studii şi Cercetări de calcul economic şi cibernetică economică*, februarie 1996

Popa, C., *A Semiotic and Epistemic Approach in Theory of Argumenta-tion*, Section 6. Logic, Language and Cognition in the *11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Cracow, Poland, 1999.

Popa C., *Logica acţiunii, programele şi conflictele interumane*, în *Revista Română de Informatică şi Automatică*, vol. 10, nr. 1, 2000. p. 29-41.

Popa, Cornel, *Logica simbolică şi bazele de cunoştinţe*, 2 vol, Universitatea „Politehnica" Bucureşti 1998, reeditat în 1999, p. 544

Popa, Cornel, *Logică şi metalogică*, Editura Fundaţiei „România de Mâine" Bucureşti 2000, 384 p.

Universitatea Spiru Haret

Popa C., *Logica epistemică şi teoria argumentării*, *Analele Universităţii „Spiru Haret", Seria Studii de Filosofie*, An 1, nr.1, 1999, p.103 –134.

Popa, C. *Logica acţiunii şi calitatea actului politic, în Optium Q,* vol IX, Nr. 2-3-4, 1999 p 158-173.

Popa C., Lopătan, I, *Logic and Verification of Mutual Consistency Testimonies* în *Verso un Sistema Esperto Giuridico Integrale*, CEDAM, Tomo II p. 273-289.

Popa, Cornel *An Axiomatic System for the logic of Acceptance*, în *Noesis*, XXV, Bucureşti 2000, p. 57-72.

Popa, Cornel, *Modeling of Argumentation disputes*, comunicare la Academia Română la a V-a Conferinţă pe tema *Modelarea structural fenomenologică*, 14-15 Iunie 2001.

Pratt R,Vaughan, *Semantical Considerations on Floyd-Hoare Logic, 17 th IEEE Symposium on Foundatoin of Computer Sciences*, p. 109-121, oct. 1976.

Quintilian, *Arta oratorică*, I-III, Biblioteca pentru toţi, Editura Minerva, Bucureşti, 1974.

Ricoeur, Paul, *Eseuri de hermeneutică*, Humanitas, 1995.

Salomaa, Arto, *Formal Languages*, Academic Press, 1973.

Skolem, Th. *Sur la Porté du Théorème de Löwenheim –Skolem* în Th Skolem, *Selected Works în Logic*, Editura J E Fenstad Univesatalsforloget, Oslo 1970.

Stoianovici, Drăgan, Dinu, Teodor, Marga, Andrei, *Logica generală*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

Suppes, Patrick, *Introduction to Logic*, Van Nostrand,1957.

Thucydides, *Războiul peloponesiac*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

Toulmin, S. *The Use of Argument*, Cambridge University Press, 1958.

Turner, Raymond, *Logic for Artificial Intelligence*, 1984.

Zaharie, Dorin şi Năstase, Pavel, *Sisteme expert de gestiune*, Editura Romcart, 1993.

Ziembinski, Z., *Practical Logic*, D.Reidel Publ. Comp. Dordrecht, Holland, 1976.

Pratt,Vaughan R., *Semantical Considerations on Floyd-Hoare Logic, 17 th IEEE Symposium on Foundatoin of Computer Sciences*, p. 109-121, oct. 1976.

Shanahan, Murray, *Prediction is Deduction, but Explanation is Abduction*, Proceedings IJCAI 89, p. 1055-1060.

Shoham, Y., *Agent oriented Programming, în Artificial Intelligence*, vol. 60, 1993, p. 57-92.

Toumela, Raimo, *Human Action and its Explanation*, D. Reidel Publishing Company, 1977.

Wooldridge, M. and N.R. Jennings, *Agent Theories, Arhitectures and Languages,* în Wooldridge, M. and N.R. Jennings eds., *Intelligent Agents*, Springer Verlag, 1995, p 1-22.

Wooldridge, M. and N.R. Jennings eds. *Intelligent Agents*, Springer Verlag, 1995, p 1-22.

Wright, von, Georg H. *Deontic Logic*, în Mind, 1951,LX, pp1-15.

Wright, von, Georg H, *An Essay în Modal Logic*, North Holand Publishing Company, Amsterdam 1951.

Wright, von, Georg H, *Norm and Action*, Routledge and Kegan Paul, London, 1963.

Wright, von, Georg H. *An Essay în Deontic Logic and General Theory of Action*, în *Acta Fhilosophica Fennica*, fasc. XXI, North Holand Publishing Company,1968.

Wright, von, Georg H., *A New System of Deontic Logic* în *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings* (Ed) R. Hilpinen, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland 1970.

Wright von, Georg, Henrik, *Explanation and Understanding*, Routledge and Kegan Paul, 1971, vezi şi *Explicaţie şi înţelegere*, Humanitas, 1995.

Universitatea Spiru Haret